



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a - b = 12$, а значение выражения $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$ равно $19p^4$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 6$, $\cos(2\angle CEM) = -\frac{3}{4}$.
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 12$.
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$① \quad x^2 + 4\sqrt{2}t \cdot x + (9 + t^2 - 9) = 0$$

$$D = 32t^2 - 4 \cdot 1 \cdot (9 + t^2 - 9) = 32t^2 - 4t^2 = 4(9 - t^2) \Rightarrow 9 - t^2 > 0 \Rightarrow t \in (-3; 3)$$

$$x = \frac{-4\sqrt{2}t \pm 2\sqrt{9 - t^2}}{2} = -2\sqrt{2}t \pm \sqrt{9 - t^2} = x$$

скобки круглые, т.к. два различных действ. корня

Произведение корней положительно $\Rightarrow$ либо они оба отрицательны, либо оба положительны.

(1) оба отрицательны $\Rightarrow$ больший из них отрицателен:

$$-2\sqrt{2}t + \sqrt{9 - t^2} < 0$$

при $t < 0$ ничего не выйдет $\Rightarrow t > 0$

$$-2\sqrt{2}t < -\sqrt{9 - t^2}$$

$$2\sqrt{2}t > \sqrt{9 - t^2}$$

$$8t^2 > 9 - t^2$$

$$9t^2 > 9 \Rightarrow t^2 > 1 \Rightarrow t > 1 \Rightarrow t \in (1; 3)$$

(2) оба положительны $\Rightarrow$ меньший из них положителен:

$$-2\sqrt{2}t - \sqrt{9 - t^2} > 0$$

при $t > 0$ ничего не выйдет $\Rightarrow t < 0$.

$$2\sqrt{2}t > \sqrt{9 - t^2}$$

$$8t^2 > 9 - t^2$$

$$t^2 > 1 \Rightarrow t > 1 \text{ ИЛИ } t < 0 \Rightarrow t < -1 \Rightarrow t \in (-3; -1)$$

$$\text{Ответ: } (-3; -1) \cup (1; 3)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

① Поскольку $a-b=12$, и чисел a и b одинаковая четность (то есть либо оба четные (4.), либо оба нечетные (н.)). Проверим оба случая:

(1) оба 4.

$$a^2-4.; 2ab-4.; b^2-4.; 3a-4.; 3b-4. \Rightarrow$$

$$a^2+2ab+b^2+3a+3b=19b^4 \text{ — тоже } 4.$$

$$\text{Значит } 19b^4 \text{ 4.} \Rightarrow b^4-4. \text{ Но } b\text{-простое} \Rightarrow b=2.$$

(2) оба н.

$$a^2\text{-н.}; 2ab\text{-4.}; b^2\text{-н.}; 3a\text{-н.}; 3b\text{-н.} \Rightarrow$$

$$a^2+2ab+b^2+3a+3b=19b^4-4. (н.+н.+н.+н.+4.=4)$$

$$\text{Значит аналогично (1) } b=2.$$

Получаем в обоих случаях $b=2$ и $19b^4=304$

$$a^2+2ab+b^2+3a+3b=304$$

$$(a+b)^2+3(a+b)-304=0$$

$$D=3^2+4 \cdot 1 \cdot 304=9+1216=1225=35^2$$

$$a+b=\frac{-3 \pm 35}{2}$$

$$(1) \begin{cases} a+b=\frac{-3-35}{2}=-19 \\ a-b=12 \end{cases}$$

$$a-b=12$$

$\Rightarrow 2a=-7 \Rightarrow a=-3.5$. Но a и b — натуральные $\Rightarrow$ не подходит.

$$(2) \begin{cases} a+b=\frac{-3+35}{2}=16 \\ a-b=12 \end{cases}$$

$$a-b=12$$

$\Rightarrow 2a=28 \Rightarrow a=14$ и $b=2$. Все подходит.

Ответ: $a=14; b=2$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

③

$DM \parallel AN$ и $CM = 2EN$ ~~и~~ $DE \parallel AC$
(AC лежит на DE) $\Rightarrow \triangle DMC \sim \triangle ANC$ с
коэф. 2. Значит $AC = 2AN$. Пусть
 $AC = x$. Тогда $AD = x$ и $AB = 2x$.

Вспомогательная св-во биссектрисы
каждого угла: она делит противо-
лежащую сторону в отношении
прилежащих сторон.

Заметим, что

$$\frac{AC}{CN} = \frac{AB}{BN} = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{AC}{CN} = \frac{AB}{BN} = \frac{x}{2}$$

AN — биссектриса $\angle BAC \Rightarrow$

$$\cos(2\angle CAN) = \cos(\angle BAC) = -\frac{3}{4}$$

Тогда запишем теорему косинусов для $\triangle ABC$:

$$6^2 = x^2 + (2x)^2 - 2 \cdot x \cdot 2x \cdot \cos(\angle BAC) = x^2 + 4x^2 + 4x^2 \cdot \frac{3}{4} = 8x^2 = 36$$

$$x^2 = \frac{36}{8} = \frac{9}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Тогда } AB = 2x = 3\sqrt{2} = AB$$

Ответ: $AB = 3\sqrt{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6 Назовем деревни, из которых выходит 5; 6; 7 и 9 дорог соответственно 5-ой; 6-ой; 7-ой и 9-ой. Тогда между этими 4-мя деревнями может проходить не более 3 дорог, т.к. иначе из одного из этих городов до другого можно будет добраться как минимум двумя разными маршрутами. Также из каждого из городов 5-го; 6-го; 7-го и 9-го выходят соответственно 5; 6; 7 и 9 дорог, а пока из них суммарно выходят $3 \cdot 2 = 6$ дорог (умножаем на 2, т.к. каждое ребро мы считаем дважды). Значит оставшиеся дороги идут в города, из которых выходит по одной дороге $\Rightarrow$ таких городов $6 + 9 + 7 + 5 - 6 = 21$. Мы назовем такие города "единичными".

Докжем, что из любого города до любого другого можно добраться единственным маршрутом:

- добраться из единичного города в единичный можно всего одним маршрутом, т.к. между ними 3 дороги (так, что из каждого города выходит такая дорога).

- добраться из единичного города можно только до одного неединичного и больше никак, а уже из этого неединичного ем. предельный пункт.

Таким образом суммарно $21 + 4 = 25$ городов это единственный верный и возможный вариант.

Ответ: 25



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$⑦ \sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x-y-1|} = 2$$

выражение под корнем должно быть ≥ 0

$$1 - |x-y-1| \geq 0$$

$$|x-y-1| \leq 1$$

$$x-y-1 \in [-1; 1]$$

$$x-y \in [0; 2]$$

Поскольку числа целые
есть всего 3 варианта:

$$(1) x-y=0$$

$$(2) x-y=1$$

$$(3) x-y=2$$

$$(1) x-y=0$$

$$2x-2y-x^2-y^2 \geq 0$$

$$x^2+y^2 \leq 0 \Rightarrow x=0 \text{ и } y=0$$

$$\text{но тогда } \sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x-y-1|} = 0, \text{ а не } 2.$$

$$(2) x-y=1 \Rightarrow x=y+1$$

$$\sqrt{1-|x-y-1|} = 1 \Rightarrow$$

$$2x-2y-x^2-y^2 = 1$$

$$2 \cdot 1 - x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

$$(y+1)^2 + y^2 = 1$$

$$2y^2 + 2y = 0 \Rightarrow y=0 \text{ и } x=1 \text{ подходит}$$

$$(3) x-y=2 \Rightarrow x=y+2$$

$$\sqrt{1-|x-y-1|} = 0 \Rightarrow 2(x-y)-x^2-y^2 = 2^2 = 4$$

$$4 - x^2 - y^2 = 4 \Rightarrow x=0 \text{ и } y=0 \Rightarrow \text{нет.}$$

Ответ: $x=1; y=0$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

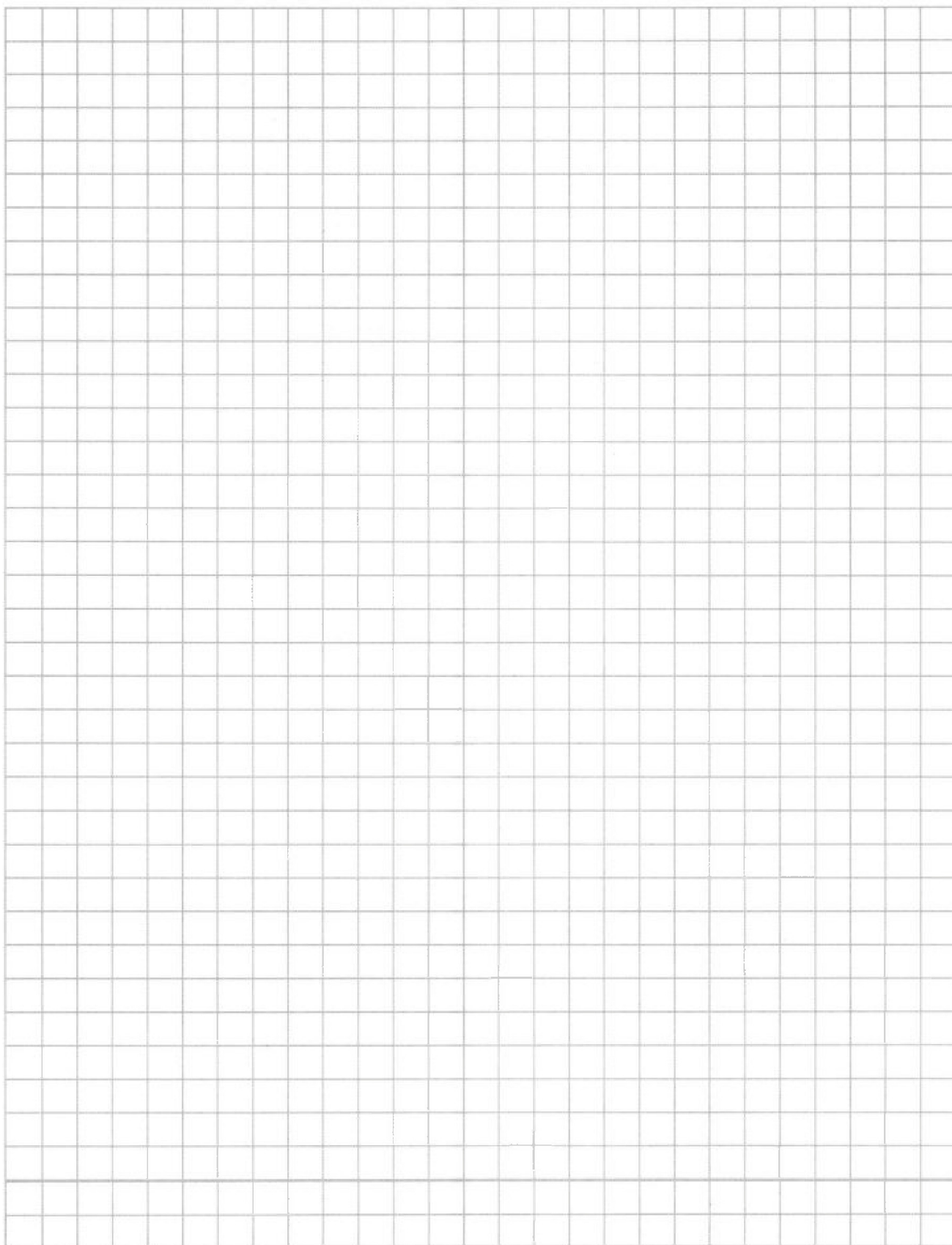
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 4\sqrt{2}x + 9t^2 - 9 = 0$$

$$D = 32t^2 - 4 \cdot 1 \cdot (9t^2 - 9) = 32t^2 - 36t^2 + 36 = 36 - 4t^2 = 2^2(9 - t^2)$$

$$t \in [-3; 3]$$

$$x = \frac{-4\sqrt{2} \pm \sqrt{D}}{2} = -2\sqrt{2}t \pm \sqrt{9 - t^2}$$

$$(1) \text{ } \partial \partial a > 0 \rightarrow (1) -2\sqrt{2}t + \sqrt{9 - t^2} > 0$$

$$(2) \text{ } \partial \partial a < 0 \rightarrow (2) -2\sqrt{2}t + \sqrt{9 - t^2} < 0$$

$$(1) -2\sqrt{2}t + \sqrt{9 - t^2} > 0$$

$$\sqrt{9 - t^2} > 2\sqrt{2}t$$

$$-2\sqrt{2}t > \sqrt{9 - t^2}$$

$$t < 0$$

$$t \in [-3; -1]$$

$$8t^2 > 9 - t^2$$

$$9t^2 > 9 \Rightarrow t > 1, \text{ но } t < 0 \Rightarrow t < -1$$

$$15$$

$$(2) -2\sqrt{2}t + \sqrt{9 - t^2} < 0$$

$$t > 0$$

$$-2\sqrt{2}t < -\sqrt{9 - t^2}$$

$$8t^2 > 9 - t^2$$

$$9t^2 > 9$$

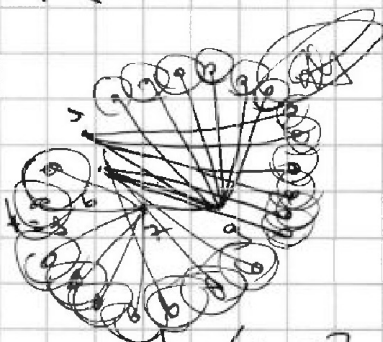
$$t > 1$$

$$t > 1$$

$$\text{нпу } t = 1$$

$$0$$

$$t = 3 \text{ и все ок } t \in (1; 3]$$



$$a - b = 12 \Rightarrow \text{четность } \text{очень}$$

$$(1) \text{ } \partial \partial a \text{ не ч.}$$

$$\text{нпу } 11 + 4 + 11 + 11 + 11 =$$

$$= 4 \Rightarrow p = 2$$

$$p = 2 \Rightarrow 19 \cdot 16 = 304$$

$$(a+b)^2 + 3(a+b) = 304$$

$$D = 3^2 + 4 \cdot 304 = 9 + 1216 = 1225 = 35^2$$

$$a+b = \frac{-3 \pm 35}{2}$$

$$(1) a - b = 12; a + b = -19$$

$$2a = -7 \text{ а не натур}$$

$$(2) a - b = 12; a + b = 30$$

$$2a = 42 \Rightarrow a = 21; b = 9$$

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times 35 \\ \hline 175 \\ + 1050 \\ \hline 1225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ \times 16 \\ \hline 114 \\ + 190 \\ \hline 304 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 25 \\ \hline 125 \\ + 500 \\ \hline 625 \end{array}$$



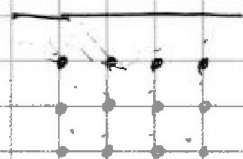
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

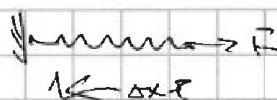
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

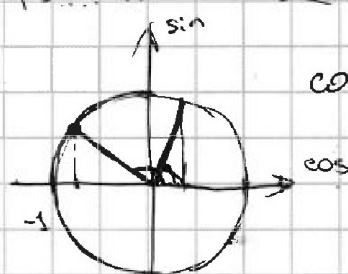


16 мест
12 мест.

поэт: 1, 2, 3, ..., 11



$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$



$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 60 = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 30 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{4}$$

$$-\frac{3}{4} = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

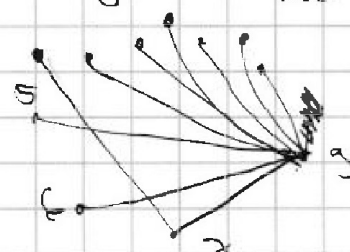
$$-\frac{3}{4} + 2\sin^2 \alpha = 1$$

$$2\sin^2 \alpha = \frac{7}{4}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{7}{8}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{8} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

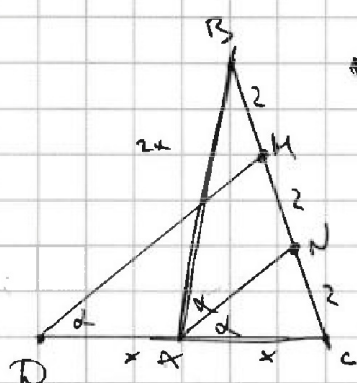
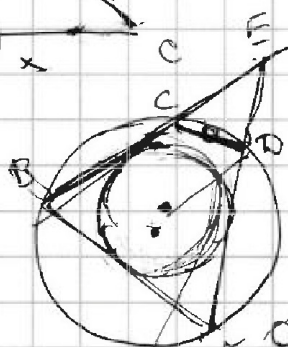
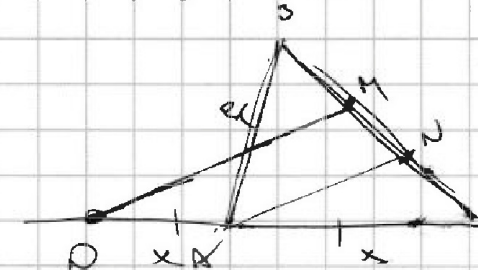
$$\cos \beta = \frac{3}{4}$$



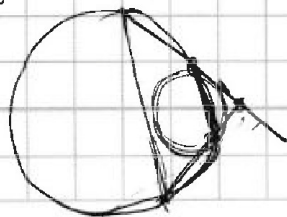
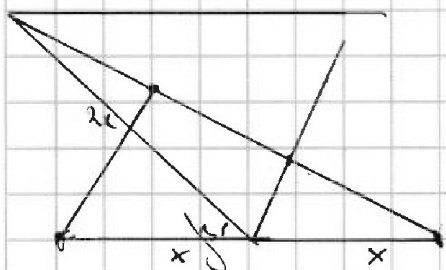
$$6^2 = x^2 + 4x^2 + 2 \cdot x \cdot 2x \cdot \frac{3}{4} = 8x^2 = 36$$

$$x^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$AB = 2x = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$



$$4 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} =$$
$$= x^2 + y^2 - \frac{\sqrt{2}xy}{2} = 4$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x=8 \\ y=0 \end{cases}$$

$$x-y=2$$

$$2(x-y)-x^2-y^2=4$$

$$4-x^2-y^2=4$$

$$x^2+y^2=0$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \text{нет}$$

$$BE=12$$

$$x-y=1$$

$$2(x-y)-x^2-y^2=1$$

$$2 \cdot 1 - x^2 - y^2 = 1$$

$$x^2+y^2=1$$

$$x=y+1$$

$$y^2+2y+1+y^2=1$$

$$2y^2+2y=0$$

$$y=0$$

$$x=1$$

$$2x-2y-x^2-y^2 \geq 0$$

$$x-y-1 \in [-1; 1]$$

$$x-y \in [0; 2]$$

$$2(x-y) > x^2+y^2$$

$$y \in \mathbb{R} \vee \exists$$

$$x-y=0$$

$$x-y=1$$

$$x-y=2$$

$$\rightarrow 2 \cdot 0 > x^2+y^2 \Rightarrow x=y=0$$

$$\text{или}$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

