



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a - b = 12$, а значение выражения $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$ равно $19p^4$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 6$, $\cos(2\angle CEM) = -\frac{3}{4}$.
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 12$.
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 1

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ gt^2 - 9 > 0 \end{cases}$$

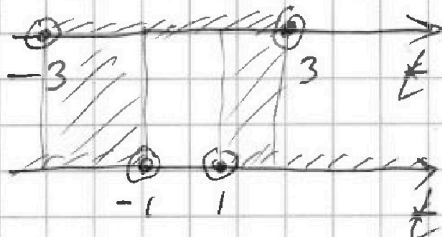
$$4(3t-1)(3t+1)$$

$$\begin{cases} 32t^2 - 4(gt^2 - 9) > 0 \\ g(t-1)(t+1) > 0 \end{cases}$$

$$\text{м.к. } x_1, x_2 = gt^2 - 9$$

$$\begin{cases} 4(9 - t^2) > 0 \\ g(t-1)(t+1) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4(3-t)(3+t) > 0 \\ g(t-1)(t+1) > 0 \end{cases}$$



$$\text{Ответ: } t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$$



1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$a - b = 12$$

$$(a+b)^2 + 3(a+b) = 19p^4$$

$$(a+b)(a+b+3) = 19p^4$$

$$a - b = 12 \quad a = b + 12$$

~~$$\text{случай: } (a+b) : 19$$~~

~~$$\text{тогда если } p \neq 19, \text{ то } (a+b+3) : 19$$~~

$$(2b+12)(2b+12+3) = 19p^4$$

$$2(b+6)(2b+15) = 19p^4$$

Левая сторона - четная, значит

т.к. 19 - нечетное $p^4 : 2 \Rightarrow p = 2$

т.к. 2 единственное четное простое число

$$2(b+6)(2b+15) = 19 \cdot 2 \cdot 8$$

$$2b^2 + 27b + 90 = 152 \quad 2b^2 + 27b - 62 = 0$$

$$(b-2)(2b+31) = 0 \quad b = 2 \quad b = -\frac{31}{2}$$

$$a = 14 \quad a = -\frac{3}{2}$$

Ответ: $(14; 2); (-3,5; -15,5)$

по мере косинусов:





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
4 из 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC = BC^2$$

$$\cos \angle CAN$$

$$\cos(2\angle CAN) = \cos \angle BAC$$

$$AC = x \quad AB = 2x$$

$$5x^2 + 4x^2 \cdot \frac{3}{4} = 6^2$$

$$3x^2 = 6^2$$

$$x^2 = \frac{36}{3} = 12$$

$$x = \sqrt{12}$$

$$AB = 2x = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$$

$$\text{Ответ: } 4\sqrt{3} = AB$$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

5 ИЗ 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5

Назовём деревом с $n > 1$ вершинами n -угольником. На ~~соединении~~ между ними может быть максимум 8 дорог (каждая две соединены). Минимальное число дорог соединяющих n -угольником — 3. Докажем, что 2 быть не может.

Из n -угольника в n -угольнику можно попасть либо напрямую, либо через n -угольнику n -угольника. Если дорог, соединяющих их — 2. То из n -угольника n -угольнику, нельзя попасть в n -угольнику. т.к. 2 дороги могут соединить только 3 n -угольника, а их 4. $k > 3$ — не подходит, иначе можно добраться > 1 маршрутом.

$$N_{\text{деревья}} = 4 + 5 + 6 + 7 + 8 - 2k \quad k \in [3]; \quad \text{---}$$

$$N_{\text{деревья}} = 25; \quad \text{---}, \text{---}, \text{---}, 19$$

$$\text{Ответ: } 25; \quad \text{---}, \text{---}, \text{---}, 19$$

$k > 3$ не подходит, иначе можно добраться > 1 маршрутом



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

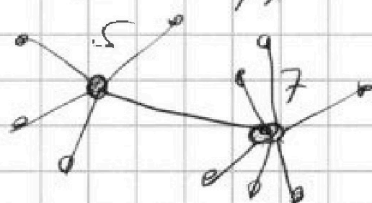
$$Ta \approx 2 - \sqrt{b}$$

$$2x - 2y - x^2 - y^2 = 4 + 1 - 1x - y - 1 - 4\sqrt{x - y - 1}$$

Заметим, что для деревьев из кото-
рых выходит $n > 1$ дорожка (из 4)
можно поехать обратно с $n > 1$ дорожкой 1 дорожкой
Например: из дерева с 5-ю доро-
жками можно поехать как минимум

в одну деревню с $n > 1$ дорожками

используя только одну дорожку



Если это больше не так, то существует
связь с деревом с $n > 1$
Если из деревни дорожки

можно проехать по
одной из всех дорог
из каждой деревни выходит n

Из деревни с числом дорог > 1
выходит k дорог в деревню с числом
дорог $n > 1$. $k \geq 1$ но $k \leq 4$;

Если $k = 0$; значит из деревни
с $n > 1$ дорожками нельзя поехать
в деревню. Так как из деревни

с 1 дорожкой можно поехать только
обратно



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
5 из 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7

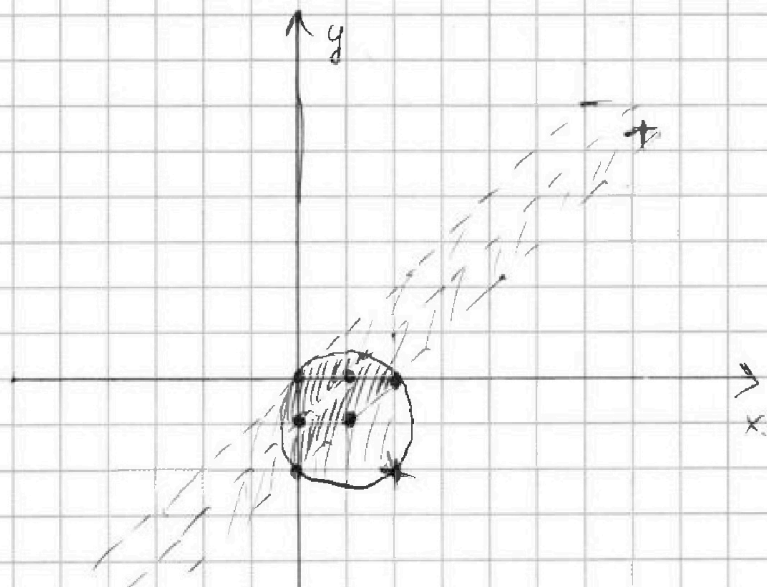
Графически определим область определе-
ни

$$2x - 2y - x^2 - y^2 \geq 0$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 2 - \text{окружность с центром } (1; -1)$$

$$1 - |x - y - 1| \geq 0$$

$$\begin{cases} x - y - 1 \geq 0 \\ 1 - x + y + 1 \geq 0 \\ x - y - 1 \leq 0 \\ 1 + x - y - 1 \geq 0 \end{cases}$$



В указанной

области бьются точки $(0; 0)$ $(1; 0)$ $(2; 0)$

$(0; -1)$ $(1; -1)$ $(0; -2)$ точки, лежащие

на окружности: $\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} = 0$, а именно

для границ точек на

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2 \quad \text{из б точек}$$

подходит 2: $(1; 0)$ $(0; -1)$ Ответ: $\begin{cases} (1; 0) \\ (0; -1) \end{cases}$

[illegible]



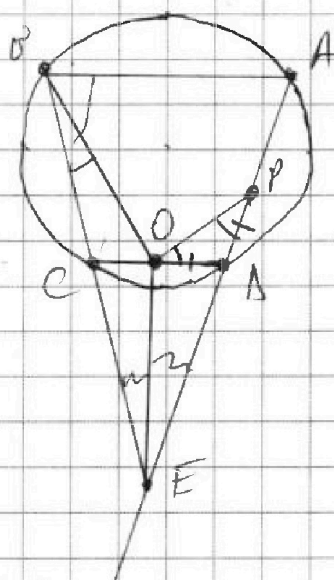
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
7 из 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5



Отношения на ABP

$$PA = OA$$

точка O лежит

на биссектрисе угла

$$\angle AOE$$

$$\angle CBO = \angle OPA$$

$$\angle CPA = \angle CDE \text{ т.к. } ABCA$$

- вписанный

OPA - равнобедренный $\triangle$

$$\angle AOP = \angle CAE$$

$$\triangle BOE \sim \triangle POE \text{ т.к. } \angle EBO = \angle OPE;$$

$$\angle BEO = \angle PEO$$

$$\frac{OE}{OE} = \frac{BE}{PA + AE} = 1$$

$$BE = OA + AE = 12$$

$$\text{Ответ: } 12$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
8 из 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5

Докажем, что число дорог между
большими деревьями 3: Если между
тем 3, то из одной обязательно
можно попасть в другую 2-ым
способами если дорог меньше
тем 3 то в одну большую целоз
попасть из другой, т.к. чтобы
соединить 3 дерева нужно 3 дороги
 $N_{\text{деревья}} = 4 + 5 + 6 + 7 + 9 + 2 \cdot 3 = 25$

Докажем, что существует только
один маршрут из каждой в
каждой. Каждая маленькая деревья
соединены в кольцо с 1 большой
А любая две большие соединены
~~только~~ можно пройти только
1 способом.

Ответ: 25.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

черновик

N5

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} \geq 2 - \sqrt{1-|x-y-1|}$$

$$180 - \alpha + 180 - (180 - 2\alpha + \beta) + 180 - (180 - 2\beta + \alpha) = 180$$

$$x \geq -x+y+x$$
$$y \leq x$$

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OE}{AE} = \frac{OE}{AE}$$
$$\frac{AE}{CE} = \frac{OE}{AE} = \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{CA - OA}$$

$$\frac{PA+AE}{BE} = \frac{OP}{OB} \quad 1 - |x-y-1| \geq 0$$
$$1 \geq |x-y-1|$$

$$OA+AE = OE \quad \frac{OP}{OB} \times 1 \geq x-y-1$$

$$x^2+y^2-2x+2y \leq 0 \quad (5+5+7+9+n) \cdot 2$$

$$2 \leq \sqrt{1-|x-y-1|}$$

$$\geq 0$$

$$4 = 1 - |x-y-1|$$

$$4 = 1 - x + y + 1$$

$$2 = -x + y$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

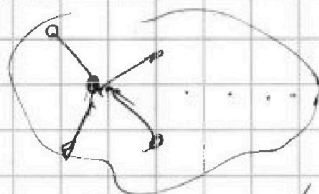
СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Если $k=0$

X



$$1 + x - y - \sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} \geq 0$$

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2}$$

$$- \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2$$

Пусть $k=3$, Тогда (для определенности из дерева $n=5$) можно положить

в каждую вершину ($n=5$; $n=7$; $n=9$)

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y \leq 5$$

$$2x - 2y - x^2 - y^2 \geq 0$$

$$N_{\text{дерева}} = \sqrt{2+3} + 4 + (5-3) + (5-1) + (7-1)$$

$$+ (9-1) = 25$$

$$1 - |x - y - 1| \geq 0$$

Если это была дерево с $n=5$; то $N_{\text{дерева}}$

$$= 25. N_{\text{дерева}} = 4 + (5-3) + (5-1) + (7-1) + (9-1)$$

$$= 25.$$

Пусть $k=2$ Тогда (для определенности из дерева

$n=5$) можно положить того же в 2

дерева с $n \geq 1$ (пусть будут $n=7$; $n=9$)

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y - x^2 - y^2 = 4$$

$$x - y - 1 \geq 0 \quad 1 - |x - y - 1| = 0 = 2 - \sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2}$$

$$1 - x + y + 1 \geq 0$$

$$\sqrt{-(x+y)^2} \geq -x-2$$

$$y \leq x-1$$

$$1 + x + y + 1 \geq 0 \quad y \geq -x-2$$

