



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$ равно $17p^5$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 12$, $\cos(2\angle CEM) = -\frac{1}{4}$.
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наименьшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 10$.
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что уравнение имеет 2 разных действ. корня тогда и только тогда его дискриминант $D > 0$.

$$\Rightarrow D = (2\sqrt{3}t)^2 - 4(4t^2 - 4) > 0$$

По т. Виета произведение корней равно $4t^2 - 4$.

$$\Rightarrow \begin{cases} (2\sqrt{3}t)^2 - 4(4t^2 - 4) > 0 \\ 4t^2 - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 - 4t^2 > 0 \\ t^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 > t^2 \\ t^2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^2 \in (1; 4) \Leftrightarrow t \in (-4; -1) \cup (1; 4)$$

Ответ: $t \in (-4; -1) \cup (1; 4)$



1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Из условия: $\begin{cases} a+b=40; \\ a^2-2ab+b^2+15a-15b=17p^5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=40, a, b \in \mathbb{N} \\ (a-b)^2 + 15(a-b) = 17p^5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=40; a, b \in \mathbb{N} \\ (a-b)(a-b+15) = 17p^5 \end{cases}$

Заметим, что т.к. $a, b \in \mathbb{N}$, то $a-b < a < 40$

$\Rightarrow (a-b)(a-b+15) < 40 \cdot 55 = 2200 \Rightarrow 17p^5 < 2200$

Если бы $p \geq 3$, то $17p^5 \geq 17 \cdot 243 = 4131 \Rightarrow 2200 > 4131$

$\Rightarrow \Rightarrow p \leq 2$. Т.к. минимальное простое число 2, то

$p=2 \Rightarrow$ задача эквивалентна решению системы:

$\begin{cases} a+b=40; a, b \in \mathbb{N} \\ (a-b)(a-b+15) = 17 \cdot 2^5 = 544 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=40 \\ (40-b)(55-b) = 544 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=40; a, b \in \mathbb{N} \\ 2200 - 190b + 4b^2 = 544 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=40; a, b \in \mathbb{N} \\ 4b^2 - 190b + 1656 = 0 \end{cases}$

Т.к. 17 - простое, то $a-b < 40$, но либо $a-b=1$, либо $a-b=17 \cdot 2$, либо $a-b=17 \cdot 2^2$, т.к. $a-b < 40$

Если $a-b > 0$, то $\begin{cases} a-b=1 \\ a-b=17 \cdot 2 \\ a-b=17 \cdot 4 \end{cases}$, т.к. $a-b < a-b+15$

Если $a-b < 0$, то $\begin{cases} a+b=40 \\ (40-b)(55-b) = 544 = 17 \cdot 2^5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=40 \\ 4b^2 - 190b + 1656 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ б имеет макс. 2 р-на

Приведем к: $\begin{cases} a=4 \\ b=36 \end{cases}$ Заметим, что $40-2b$ и

$55-2b$ разной четн., а в произв. они дают $17 \cdot 2^5 \Rightarrow$ Одно

из них 17 , а другое 2^5 или -17 и $-2^5 \Rightarrow$ т.к. $40-2b$ четно $\Rightarrow \begin{cases} 55-2b=17 \\ 55-2b=-17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=19 \Rightarrow a=21 \Rightarrow \emptyset, \text{ т.к. } a-b+15=17, \\ b=36 \Rightarrow a=4 \text{ — выходим, т.к. } a-b=-2 \end{cases}$
 $a-b+15=-17, \text{ а } a-b=-32$

Ответ: $b=36; a=4$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Сделаю~~
~~Пусть в классе было бы не 8 учеников, а 9. Пусть у каждого ученика рост будет измерен в метрах, тогда рост i -го ученика a_i . Среди 8 старших учеников все $a_i > 0$ и $a_i \neq a_j$ если $i \neq j$. Добавим нового ученика, его рост будет $a_9 = 0$. Тогда он ниже всех и будет занимать пустую парту. Тогда теперь условие того, что ученик~~

Расставим учеников по убыванию. Тогда в ряду для каждого i -го ученика его рост $a_i > a_{i+1}$.

Тогда для того, чтобы каждый ученик видел хорошо, то в каждом ряду парт, где заняты все парты, рост учеников должен убывать по мере приближения к доске.

И.е. учеников 8, а рядов парт ^{где помещаются 3 ученика} 3, то по принципу Дирихле найдутся 2 ряда, где сидит по 3 ученика.

На первый ряд C_9^3 вариантов выбрать 3 учеников из 9, а для каждого вар. ровно 1 способ учеников рассадить.

Для второго ряда C_6^3 способов выбрать 3-х учеников из ост. 6, аналогично для каждого сп. ровно 1 рассадка.

На последний ряд сидят 2 ученика и остается пустое место. Пусть рост учеников a и b ; $a > b$. Тогда подходит всего 4 рассадки из $6 = 3 \cdot 2$ (вар. выбора места a и вар. b и vice versa для b):

$$1) \boxed{a \ b \ \cdot} + 2) \boxed{a \ \cdot \ b} + 3) \boxed{b \ \cdot \ a} + 4) \boxed{a \ b \ \cdot} \quad 5) \boxed{b \ a \ \cdot} \quad 6) \boxed{\cdot \ b \ a}$$

не подходит не подходит

$$\Rightarrow \text{Всего вариантов } C_9^3 \cdot C_6^3 = 4$$

$$\text{Ответ: } C_9^3 \cdot C_6^3 = 4$$

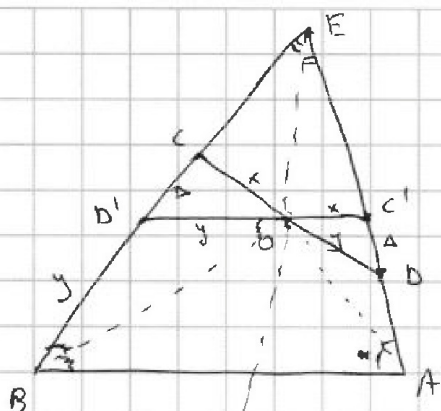


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $BE = 10$ ($ED + DO$)_{min} - ?

O — центр $\triangle ABE$;

$ABCO$ — впис.

Решение: пусть $\angle BAE = 2\alpha$,

$\angle ADE = 2\beta \Rightarrow$ из впис. $ABCO$: $\angle ECO = 2\alpha$; $\angle EDC = 2\beta$.

Проведем через O пр. $\parallel AB$. Пусть она перес.

Ограничим отрез. EO CB . Проведем $C'D'$. Пр. $\perp$

$EB \perp EA$ при симм. ограничении отрез. EO , но B' лежит на EB , C' на EA . Также т.к. $\angle EBC = \angle EDC$

$= 2\beta \Rightarrow C'D' \parallel AB$. Пусть $C'D' = C'D = a$, $EO = OC' = x$;

$BO = OD' = y \Rightarrow EC' = kx \Rightarrow EC = kx$, из подобия отрез. CB — $ED' = EB = ky$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow ED + DO = ky + y = kx + x + a$

Пр. $\perp$. $C'D' \parallel AB \Rightarrow \angle D'O B = \angle D'B O \Rightarrow BO' = y$

$\Rightarrow ky + y = BE = 10 \Rightarrow ED + DO = BE = 10$

Ответ: 10.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что если в графе из любой вершины в любую другую можно добраться единственным способом, то граф — дерево. Тогда будем рассматривать остров как граф, в котором вершины — деревни, а ребра — дороги между ними. Тогда, по сказанному ранее, этот граф — дерево.

Пусть деревень $n \geq 4$.

Посчитаем суммарное кол-во ребер k в графе.

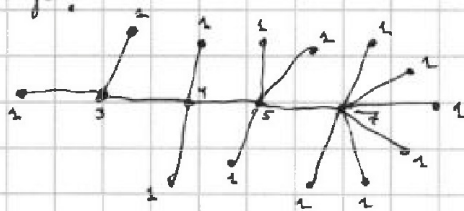
П.к. граф — дерево, то $k = n - 1$.

С другой стороны, $2k = 3 + 4 + 5 + 7 + (n - 4) \cdot 1$ — количество исходящих из вершин ребер равно удвоенному кол-ву ребер, т.к. каждое ребро имеет 2 конца.

$$\Rightarrow k = n - 1 = \frac{3 + 4 + 5 + 7 + (n - 4) \cdot 1}{2} \Rightarrow 2n - 2 = 15 + n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = 17$$

Ответ: 17 деревень. Пример:





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☒

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $x+y-2 \geq 0$. Тогда:

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{3-x-y} = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y \geq 2 \\ x+y \leq 3 \end{cases} \Rightarrow x+y=3 \rightarrow -(x^2+y^2-2x-2y) = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2-2x-2y+1=0 \\ x+y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x+y=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2xy=4 = (x+y)^2 - (x^2+y^2) \\ x+y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy=2 \\ x+y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 & y=2 \\ x=2 & y=1 \end{cases}$$

Если $x+y-2=0$: $\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{1} = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2=0 \\ x+y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x+y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xy=0 \\ x+y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 & y=2 \\ y=0 & x=2 \end{cases}$$

Если $x+y-2 < 0$: $|x+y-2| = 2-x-y \rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{x+y-1} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x+y-1 \geq 0 \\ x+y < 2 \end{cases} \Rightarrow x+y=1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2=0 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xy=-1 = (x+y)^2 - (x^2+y^2) \\ x+y=1 \end{cases}$$

П.к. $x, y \in \mathbb{Z}$, то $2xy$ четное $\Rightarrow 2xy \neq -1 \Rightarrow \emptyset$

Ответ:

$$\begin{cases} x=1 & y=2 \\ x=2 & y=1 \\ x=0 & y=2 \\ x=2 & y=0 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

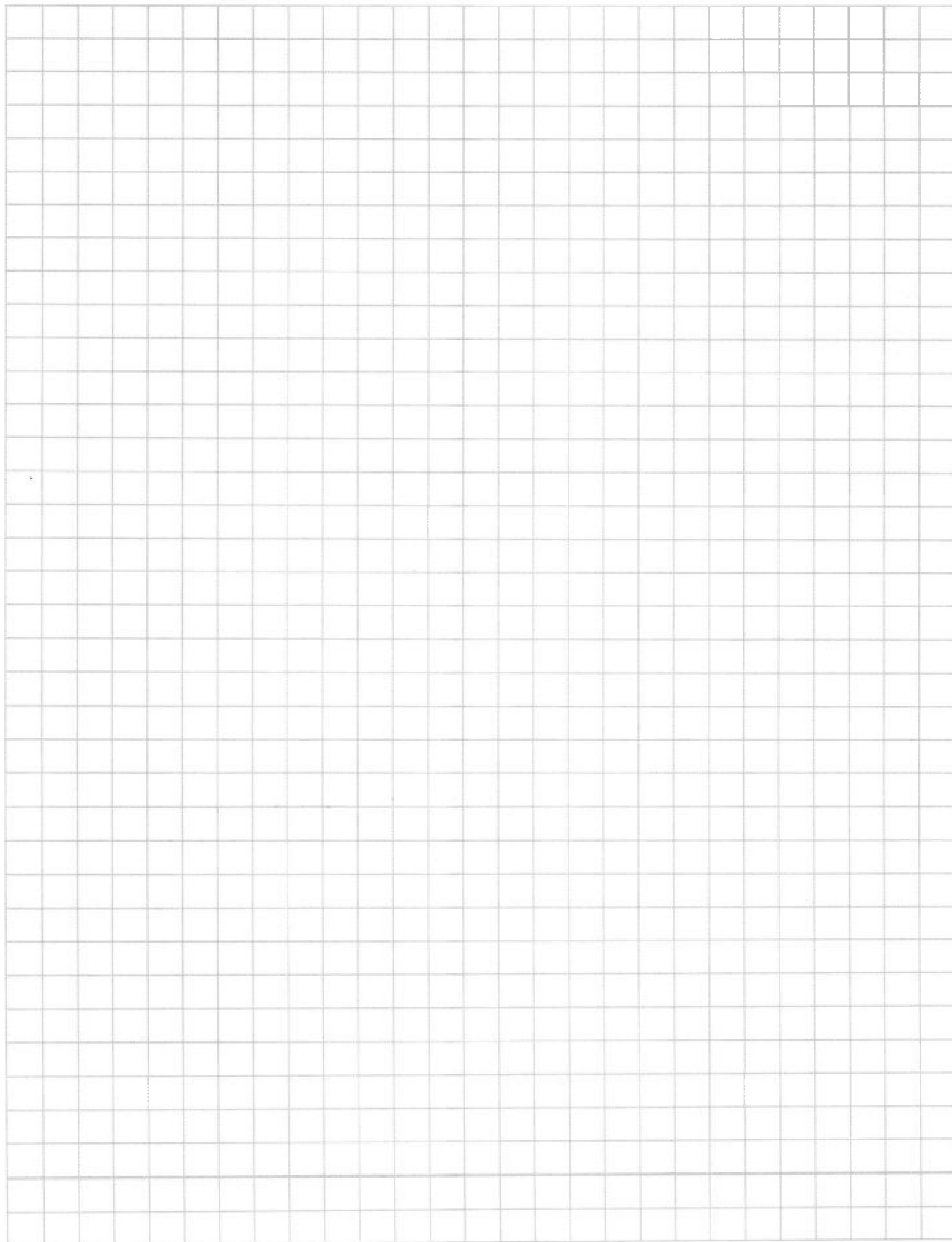
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



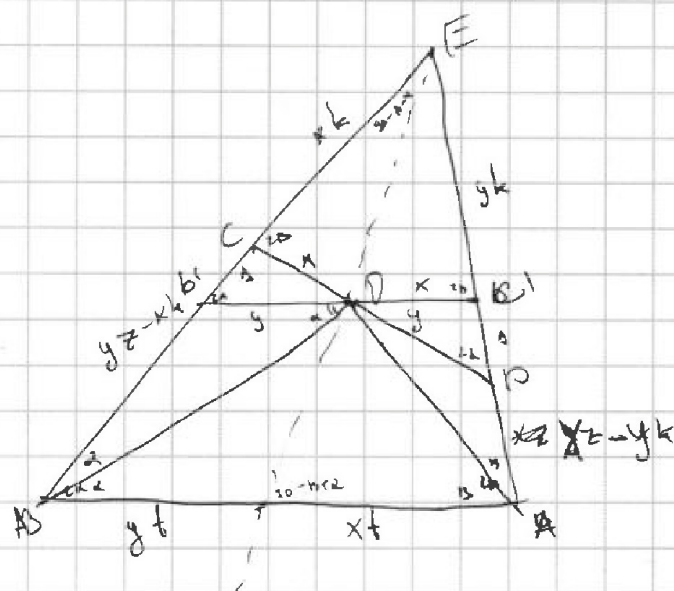


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$yz = 10$$

$$y(k-1) = ?$$

$$k = \frac{z}{t} \Rightarrow z = kt$$

$$ykt = 10$$

$$ykt$$

$$x_k + 1 + y$$

