



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12



1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность  $2^\circ$  и начинающуюся с угла  $132^\circ$ . Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?
2. [4 балла] Целые числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенству  $x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45$ . Найдите наименьшее возможное значение выражения  $x^2 + y^2 + z^2$ .
3. [4 балла] Из множества  $M$ , состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть  $p$  и  $q$  – две из таких сумм. Найдите множество  $M$ , если  $p^2 - q^2 = 1080$ .
4. [5 баллов] Диагонали  $BD$  и  $AC$  трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $M$ , а отношение оснований  $AD : BC = 1 : 2$ . Точки  $I_1$  и  $I_2$  – центры окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , вписанных в треугольники  $BMC$  и  $AMD$  соответственно. Прямая, проходящая через точку  $M$ , пересекает  $\omega_1$  в точках  $X$  и  $Y$ , а  $\omega_2$  – в точках  $Z$  и  $W$  ( $X$  и  $Z$  находятся ближе к  $M$ ). Найдите радиус окружности  $\omega_1$ , если  $I_1 I_2 = 8$ , а  $MZ \cdot MY = 9$ .
5. [5 баллов] Что больше:  $5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14}$  или  $3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$ ?
6. [4 балла] Даны 12 точек: 8 из них лежат на одной окружности в плоскости  $\alpha$ , а остальные 4 расположены вне плоскости  $\alpha$ . Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость –  $\alpha$ . Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?
7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида  $SABCDEF$  ( $S$  – вершина) со стороной основания 1 и боковым ребром  $\sqrt{2}$ . Точка  $X$  лежит на прямой  $SF$ , точка  $Y$  – на прямой  $AD$ , причём отрезок  $XY$  параллелен плоскости  $SAB$  (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $XY$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 1

1) Пусть  $n$  - количество вершин нашего многоугольника, тогда:

с одной стороны  $\sum$  его углов равен  $180^\circ(n-2)$  (эта формула применима для любого  $n$ -угольника).

с другой стороны  $\sum$  углов арифметической прогрессии, т.е.  $132^\circ + (132^\circ + (\pm 2^\circ)(n-1))$  но т.к. не указано в условии задано возрастает прогрессия или убывает, рассмотрим оба случая.

$$2) 180^\circ(n-2) = \frac{132^\circ + (132^\circ + (\pm 2^\circ)(n-1))}{2} \cdot n$$

$$360^\circ(n-2) = 264n \pm (2n^2 - 2n) \quad \begin{cases} 2n^2 - 2n + 264n - 360n + 720 = 0 & (\text{возрастает прогрессия}) \\ -2n^2 + 2n + 264n - 360n + 720 = 0 & (\text{убывает прогрессия}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n^2 - 49n + 360 = 0 \\ n^2 + 47n - 360 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (n-9)(n-40) = 0 \\ n^2 + 47n - 360 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

$$(*) D = 47^2 + 360 \cdot 4 = 3649 - \text{не полный квадрат } (60^2 = 3600 \text{ и } 61^2 = 3721)$$

если 3649 - полный квадрат, т.е.  $3649 = 2^2$ ,  $2 \in \mathbb{Z}$ ,  $170 < 121 < 61$ , но между 160 и 161 нет натуральных чисел (между углом многоугольника и натуральным числом)  $\Rightarrow$  УР-е (\*) не имеет целых, а значит и рациональных решений.

3) откуда  $n=9$  или  $n=40$ , т.к. оба варианта нарушаются при рассмотрении возрастания арифметической прогрессии, то для  $n=40$  и больше наибольший угол:  $132^\circ + 2^\circ \cdot 39 = 132^\circ + 78^\circ = 210^\circ > 180^\circ \Rightarrow$  при  $n=40$  многоугольник невыпуклый.

проверим  $n=9$ :  $132^\circ + 2^\circ \cdot 8 = 148^\circ < 180^\circ \Rightarrow$  9-угольник выпуклый.

и как известно проверяем:  $\frac{132^\circ + 148^\circ}{2} \cdot 9 = \frac{280^\circ}{2} \cdot 9 = 140^\circ \cdot 9 = 20^\circ \cdot 7 \cdot 9 = 180^\circ \cdot 7 = 180^\circ(7-2)$ , откуда выкажем только  $n=9$ .

Ответ: 9.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
4 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

а) Заметим, что  $p$  и  $q$  отличаются не более, чем на 6:

$$\sum_{max} - \sum_{min} = ((a+6) + (a+5) + (a+4) + \dots + (a+1)) - ((a+5) + (a+4) + (a+3) + \dots + a) =$$

$$= (a+6) - a = 6, \text{ где } \sum_{max} - \text{max. возможная сумма в мешке } M$$

$$\sum_{min} - \text{min. возможная сумма в мешке } M$$

б) Также ясно, что  $p$  и  $q$  - четные: если  $p \neq q$ , то  $p - q \neq 0$ , то есть  $(p^2 - q^2) : 2$ , то  $p$  и  $q$  - четные, и соответственно  $(p - q), (p + q) : 2$ .

доп-во  
т.к.  $p \neq q$ , то чтобы  $(p^2 - q^2)$  было четным  $\frac{p^2 - q^2}{2}$  нужно, чтобы хотя бы один из множителей  $(p - q)$  или  $(p + q)$  был четным 2, что означает, что  $p$  и  $q$  - четные, но четных простых чисел всего одно  $\Rightarrow p$  и  $q$  - четные,  $\therefore$  имеет  $(p - q), (p + q) : 2$

в) т.к.  $p, q$  - простые, то  $p, q > 0 \Rightarrow p + q > p - q$  ( $p > q$ )  
 $2q > 0$   
 $q > 0$

$$1) p^2 - q^2 = 1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot (a, b, c)$$

$$(p - q)(p + q) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \Leftrightarrow \begin{cases} p - q = 2 & (3) \\ p + q = 540 & (3) \\ p - q = 4 & (2) \\ p + q = 270 & (2) \\ p - q = 6 & (1) \\ p + q = 180 & (1) \end{cases}$$

других вариантов быть не может, т.к. иначе или  $p - q > 6$ , что противоречит а) или  $p - q, p + q$  - четные, что противоречит б) или  $p - q > p + q$ , что противоречит в).

(1)  $\begin{cases} p - q = 6 \\ p + q = 180 \end{cases} \oplus \Rightarrow p = 93, q = 174$   $\Rightarrow$  не подходит.

(2)  $\begin{cases} p - q = 4 \\ p + q = 270 \end{cases} \oplus \Rightarrow p = 137, q = 133$ ;  $q = 133 : 7 \Rightarrow$  не подходит

(3)  $\begin{cases} p - q = 2 \\ p + q = 540 \end{cases} \oplus \Rightarrow p = 271, q = 269$ . не подходит, т.к. это простые числа.

2) пусть  $\sum_{max}$  - max. возможная сумма в мешке  $M$   
 $\sum_{min}$  - min. возможная сумма в мешке  $M$ , тогда  $a$  - 1-е число (самое маленькое в  $M$ ),  $a \in \mathbb{N}$ .

$$\sum_{min} = 3((a+3) + (a+2)) = 3(2a+5)$$

$$\sum_{max} = 3((a+4) + (a+3)) = 3(2a+7), \text{ тогда должно быть верно}$$

$$\begin{cases} 3(2a+5) \leq 269 \\ 3(2a+7) \geq 271 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+5 \leq \frac{269}{3} \\ 2a+7 \geq \frac{271}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+5 \leq 89 \\ 2a+7 \geq 91 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leq 42 \\ a \geq 42 \end{cases} \Rightarrow a = 42$$

А значит  $M = \{42, 43, 44, 45, 46, 47, 48\}$

3) Проверим выполнимые условия сразу же для этого множества.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$42 + 43 + 44 + 45 + 47 + 48 = 240 + 14 + 15 = 269$$

$$42 + 43 + 45 + 46 + 47 + 48 = 240 + 10 + 21 = 271$$

$$271^2 - 269^2 = \frac{(271 - 269)}{2} (271 + 269) = 2 \cdot 540 = 1080$$

Ответ:  $M = \{42; 43; 44; 45; 46; 47; 48\}$



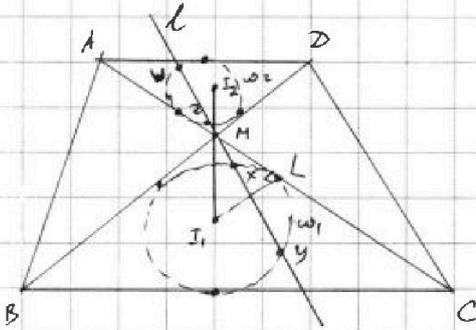
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4



Дано

ABCD - трап. (AD, BC - осн.); AD:BC = 1:2

$\omega_1$  - вписана в  $\triangle BMC$  ( $I_1$  - центр)

$\omega_2$  - вписана в  $\triangle AMD$  ( $I_2$  - центр)

$W, Z, M, X, Y$  - на прямой  $l$

$X, Y \in \omega_1$ ;  $Z, W \in \omega_2$

$I_1, I_2 = 8$

$MZ \cdot MY = 9$

Найти  $r_1$  - ?

Решение

- 1)  $\triangle AMD \sim \triangle BMC$ :  $\angle AMD = \angle BMC$  (как вертикальные),  $\angle MAD = \angle BCF$  (как углы при параллельных AD и BC и секущей AC) - по 2-м углам  
 $\Rightarrow$  все эл-ты будут относиться в  $\triangle AMD$  и  $\triangle BMC$  как AD:BC = 1:2.  
 $\Rightarrow I_2 M : I_1 M = 1:2$ , но также по условию  $M \in I_1 I_2$  (т.к.  $I_2$  - биссектриса  $\angle AMD$  и  $I_1$  - биссектриса  $\angle BMC$ , а биссектрисы вертикальных углов совпадают)  
 $\hookrightarrow I_1 I_2 = 8 \Rightarrow I_2 M = \frac{16}{3}$

2) Сделаем, что  $l$  - диаметр

$H_M^{-2}(\triangle AMD) = \triangle CMB$  (касательная с центром в  $I_1$  и хордой  $CM$  - 2)

$H_M^{-2}(l) = l \Rightarrow H_M^{-2}(Z) = X$ ,  $H_M^{-2}(W) = Y$ , а значит:

~~$\frac{MZ}{MX} = \frac{MW}{MY} = 2$~~   $\frac{MZ}{MX} = \frac{MW}{MY} = 2 \Rightarrow MX = 2MZ \Rightarrow$

$\Rightarrow MZ \cdot MY = 9 \Rightarrow MX \cdot MY = 2 \cdot MZ \cdot MY = 2 \cdot 9 = 18$

3) Пусть  $L$  - точка касания  $\omega_1$  и  $MC$ , тогда по св-ву отрезков касательных к хорде  $MC$

$ML^2 = MX \cdot MY = 18 \Rightarrow ML = \sqrt{18}$

Также, зная, что радиус  $r_1$  проведен в  $L$  перпендикуляр касательной, то воспользуемся теор. Пифагора для  $\triangle MI_1 L$ :

$r_1^2 = I_1 L^2 = \sqrt{MI_1^2 - ML^2} = \sqrt{\left(\frac{16}{3}\right)^2 - 18} = \sqrt{\frac{256 - 18 \cdot 9}{9}} = \sqrt{\frac{94}{9}} = \frac{\sqrt{94}}{3}$

Ответ:  $r_1 = \frac{\sqrt{94}}{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5

$$1) 5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14} \sqrt{3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{14}}$$

$$5 - 4 \sin \frac{2\pi}{7} - 3 \sin \frac{3\pi}{7} + 4 \cos \frac{3\pi}{7} \sqrt{0}$$

$$5 - 4 \cos \frac{\pi}{7} - 3 \cos \frac{2\pi}{7} + 4 \cos \frac{3\pi}{7} \sqrt{0}$$

$$16 \cos^3 \frac{\pi}{7} - 6 \cos^2 \frac{\pi}{7} - 6 \cos \frac{\pi}{7} + 8 \sqrt{0}$$

$$8 \cos^3 \frac{\pi}{7} - 3 \cos^2 \frac{\pi}{7} - 8 \cos \frac{\pi}{7} + 4 \sqrt{0}$$

$$y = 8x^3 - 3x^2 - 8x + 4$$

$$y' = 24x^2 - 6x - 8 = 0$$

$$12x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$D = 9 + 4 \cdot 4 \cdot 12 = 201$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{201}}{24}$$

$$y' = 24x^2 - 6x - 8 = 0$$

$$12x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$D = 9 + 4 \cdot 4 \cdot 12 = 201$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{201}}{24}$$

$$y = 8x^3 - 3x^2 - 8x + 4$$

$$y' = 24x^2 - 6x - 8 = 0$$

$$12x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$D = 9 + 4 \cdot 4 \cdot 12 = 201$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{201}}{24}$$

$$y = 8x^3 - 3x^2 - 8x + 4$$

$$y' = 24x^2 - 6x - 8 = 0$$

$$12x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$D = 9 + 4 \cdot 4 \cdot 12 = 201$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{201}}{24}$$

$$y = 8x^3 - 3x^2 - 8x + 4$$

$$y' = 24x^2 - 6x - 8 = 0$$

$$12x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$D = 9 + 4 \cdot 4 \cdot 12 = 201$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{201}}{24}$$

$$y = 8x^3 - 3x^2 - 8x + 4$$

2) заметим,  $2\pi < \frac{5}{6} < 3\pi$

$$\frac{5}{6} > \frac{3 + \sqrt{21}}{24}$$

$$20 > 3 + \sqrt{21}$$

$$17 > \sqrt{21}$$

$$28 > 20$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{5}{6}$$

$$\sqrt{3} > \frac{5}{3}$$

$$27 > 25$$

$$\cos \frac{\pi}{7} > \cos \frac{\pi}{6}, \text{ т.к. } 0 < \frac{\pi}{7} < \frac{\pi}{6}$$

$$3) y\left(\frac{5}{6}\right) = 8 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 - 8 \cdot \frac{5}{6} + 4 =$$

$$= \left(\frac{5}{3}\right)^3 - \frac{5^2}{2 \cdot 6} - \frac{20}{3} + \frac{12}{3} = \frac{5^3}{3^3} - \frac{5^2}{4 \cdot 3} - \frac{8}{3} =$$

$$= \frac{5^3}{3} - \frac{5^2}{3} - \frac{8}{3} = \frac{5^2}{3} (5 - 1) - \frac{8}{3} = \frac{11 \cdot 5^2}{3} - \frac{8}{3}$$

2) заметим,  $2\pi < \frac{41}{48} < 3\pi$

$$\frac{41}{48} > \frac{3 + \sqrt{21}}{24}$$

$$41 > 3 + \sqrt{21}$$

$$38 > \sqrt{21}$$

$$35 > 20$$

$$900 + 25 > 2 \cdot 30 \cdot 5$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{41}{48}$$

$$24\sqrt{3} > 41$$

$$576 \cdot 3 > 1681$$

$$1500 > 2000$$

$$\cos \frac{\pi}{7} > \cos \frac{\pi}{6}, \text{ т.к. } 0 < \frac{\pi}{7} < \frac{\pi}{6}$$

$$y\left(\frac{41}{48}\right) = 8 \cdot \left(\frac{41}{48}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{41}{48}\right)^2 -$$

$$8 \cdot \frac{41}{48} + 4 = \frac{41^3}{24^3} - \frac{41^2}{16 \cdot 48} - \frac{17}{6} =$$

$$= \frac{41^3}{36^2} - \frac{41^2}{3 \cdot 2 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 2)^2} - \frac{17}{6} =$$

$$= \frac{23 \cdot 41^3}{36^2} - \frac{17 \cdot 48^2}{8^2 \cdot 3^2} = \frac{1681 \cdot 23}{36^2} - \frac{17 \cdot 2304}{8^2 \cdot 3^2}$$

$$\frac{6}{7} > \frac{3 + \sqrt{201}}{24}$$

$$6 \cdot 24 > 3 \cdot 7 + 7 \sqrt{201}$$

$$123 > 7 \sqrt{201}$$

$$123^2 > 49 \cdot 201$$

$$15129 > 9849$$

$$14400 > 10050$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{6}{7}$$

$$7\sqrt{3} > 12$$

$$49 \cdot 3 > 144$$

$$147 > 144$$

$$\cos \frac{\pi}{7} > \cos \frac{\pi}{6}, \text{ т.к. } 0 < \frac{\pi}{7} < \frac{\pi}{6}$$

$$y\left(\frac{6}{7}\right) = 8 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^2 - 8 \cdot \frac{6}{7} + 4 =$$

$$= \left(\frac{12}{7}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^2 - \frac{20}{7} = \left(\frac{6}{7}\right)^2 \left(\frac{6}{7} \cdot 8 - 3\right) - \frac{20}{7} =$$

$$= \frac{27}{7} \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^2 - \frac{20}{7} = \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^2 (27 - 20) =$$

$$= \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^2 \cdot 7 > 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

506

Заметим, что если любые 4 точки  $\in (\beta)$ , то  $\beta = \alpha$ .

Пусть  $A, B, C, D \rightarrow T$ , не лежащие в плоскости  $(\alpha)$ , тогда  $\exists (\beta) : A, B, C, D \in \beta$ .

1. 1-ая тетраэдра -  $ABCD$ . (точка  $A, B, C, D$ )

2. Верно, что для каждой из них можно построить инт. на прямую с вершинами только  $\alpha$  ( $\alpha$ ), т.е.  $A, B, C$  или  $D$  - одна вершина, а ост. вершин  $\alpha$  тогда, тогда тетраэдр  $\alpha$ .

$$4 \cdot \left( \frac{8! \cdot 7! \cdot 6!}{3!} + \frac{8! \cdot 7! \cdot 6! \cdot 5!}{4!} + \frac{8! \cdot 7! \cdot 6! \cdot 5! \cdot 4!}{5!} \right)$$

$$AB, CD \quad \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{5!} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6!} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{7!} +$$

выбирая  $3 \text{ из } (\alpha)$        $4 \text{ из } (\alpha)$        $5 \text{ из } (\alpha)$        $6 \text{ из } (\alpha)$        $7 \text{ из } (\alpha)$

$$+ \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{8!} = 4 \cdot (56 + 70 + 56 + 28 + 8 + 1) = 219 \cdot 4 = 876$$

$8 \text{ из } (\alpha)$

если 2 вершин  $\alpha$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

522

$$1) x \lg_{25} + y \lg_{75} + z \lg_{125} = \lg_{45} \quad (1) \quad \lg_5(20)$$

$$x \lg_5 25 + y \lg_5 75 + z \lg_5 125 = \lg_5 45$$

$$2x + y(2 + \lg_5 3) + 3z = 1 + \lg_5 9 = 1 + 2\lg_5 3$$

$$2x + 2y + 3z - 1 = \lg_5 3 \cdot (2 - y)$$

т.к.  $x, y, z \in \mathbb{Z}$ , то  $2x + 2y + 3z - 1$ ,  $2 - y \in \mathbb{Z}$  и  $\lg_5 3 \cdot (2 - y) \in \mathbb{Z}$ , то

возможно только при  $2 - y = 0$ , т.к.  $\lg_5 3 \notin \mathbb{Z}$ .  $\Rightarrow y = 2$ .

2) подставим  $y = 2$ , получаем:

$$2x + 2 \cdot 2 + 3z - 1 = 0$$

$$3 + 3z + 2x = 0$$

т.к.  $3, 3z, 0 \div 3$ , то  $2x \div 3$ , т.е.  $x \div 3$ .

$$A = x^2 + y^2 + z^2 = 4 + (x^2 + z^2)$$

Заметим, что  $A$  минимально, когда  $(x^2 + z^2)$  минимально (т.к. мы уже определили  $y$ ).

при  $|x| \geq 3$ ,  $x^2 + z^2 \geq 9$ .

поэтому проверим  $|x| \leq 3$ , и  $x \div 3$ , и  $x \in \mathbb{Z}$ , т.е.  $x = 0$ :

$$3 + 3z + 2 \cdot 0 = 0, \text{ и получим } x^2 + z^2 = 0^2 + (-1)^2 = 1 < 9$$

$$z = -1 \quad (\text{для остальных } x, |x| \geq 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{минимальный ответ } (x^2 + y^2 + z^2)_{\min} = 0^2 + 2^2 + (-1)^2 = 5$$

Ответ: 5.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

откуда:

$$y(\cos \frac{\pi}{8}) > (\cos \frac{\pi}{8}) = y(\frac{\sqrt{5}}{2}) > y(\frac{7}{8}) > 0 \quad (\text{т.к. на } [\frac{7}{8}; \infty) - y \text{ - возрастает})$$

$$\Rightarrow \text{отвеч: } 5 - 4 \sin \frac{2\pi}{14} > 3 \sin \frac{2\pi}{14} - 4 \cos \frac{2\pi}{7}$$

Отвеч:  $5 - 4 \sin \frac{2\pi}{14}$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45$$

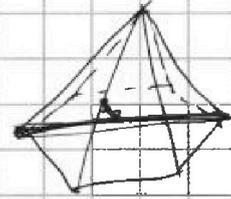
$$5 - 4 \sin \frac{\pi}{14}$$

$$\sqrt{3} \sin \frac{3\pi}{14} - 9 \cos \frac{3\pi}{7}$$



$$5 - 4 \sin \frac{\pi}{14}$$

$$3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \left( \frac{3\pi}{14} \cdot 2 \right) =$$



$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{14} = \frac{\pi}{7}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{14} = \frac{2\pi}{7}$$

$$5 - 4 \cos \frac{\pi}{7}$$

$$\sqrt{3} \sin \left( \frac{\pi}{7} \cdot 1.5 \right) - 9 \cos \frac{2\pi}{7}$$

$$3 \cos \frac{2\pi}{7} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$$

3; 4  
112  
182  
190  
28  
218

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cdot \cos \alpha - \sin 2\alpha \cdot \sin \alpha = \cos \alpha \left( \frac{\cos 2\alpha}{2 \cos^2 \alpha} - \frac{\sin 2\alpha}{2 \cos \alpha} \right) = \cos \alpha (2 \cos^2 \alpha - 1 - \sin 2\alpha)$$

$$\cos \alpha (4 \cos^2 \alpha - 3) = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$5 - 4 \cos \frac{\pi}{7} = 3 \cos \left( \frac{\pi}{7} \cdot 2 \right) - 4 \cos \frac{\pi}{7} \cdot 3 \quad \checkmark \checkmark \checkmark$$

$$\cos \left( \frac{\pi}{7} \cdot 2 \right) = 2 \cos^2 \frac{\pi}{7} - 1$$

$$5 - 4 \cos \frac{\pi}{7} = 3(2 \cos^2 \frac{\pi}{7} - 1) - 4 \left( 4 \cos^3 \frac{\pi}{7} - 3 \cos \frac{\pi}{7} \right) \quad \checkmark \checkmark$$

$$5 - 4 \cos \frac{\pi}{7} = 6 \cos^2 \frac{\pi}{7} + 3 + 16 \cos^3 \frac{\pi}{7} - 12 \cos \frac{\pi}{7} \quad \checkmark \checkmark$$

$$-16 \cos^3 \frac{\pi}{7} - 6 \cos^2 \frac{\pi}{7} + 8 \cos \frac{\pi}{7} + 8 \quad \checkmark \checkmark$$

$$-8 \cos^3 \frac{\pi}{7} - 3 \cos^2 \frac{\pi}{7} + 4 \cos \frac{\pi}{7} + 9 \quad \checkmark \checkmark$$

$$y = -8x^3 - 3x^2 + 4x + 9$$

$$y' = -24x^2 - 6x + 4 = 0$$

$$-12x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$12x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{105}}{24} = 105$$



$$-3 \pm \sqrt{105} = 10$$

$$p^2 - q^2 = 1080$$

$$(p-q)(p+q) = 1080$$

32 32

17-1102

$$\begin{array}{r} 1080 \div 2 \\ 540 \div 2 \\ 270 \div 2 \\ 135 \div 5 \\ 27 \end{array}$$

$$264h + 2h^2 - 2h = 360h - 720 \Rightarrow$$

2.11.15

2.11.15

$$\frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n =$$

$$= 180(n-2)$$

$$(2a_1 + d(n-1))n = 360(n-2)$$

$$(264 + 2(n-1))n = 360(n-2)$$

$$2n^2 - 98n + 720 = 0$$

$$n^2 - 49n + 360 = 0 \quad n = 9, 45 \quad \checkmark$$

$$1 > \cos \frac{\pi}{7} > 0$$



$$\frac{282}{-360}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125$$

$$\ln 5(x+y+z) + (\ln 5^x + \ln 15^y + \ln 25^z) = \ln 45$$

$$x \log_{45} 25 + y \log_{45} 75 + z \log_{45} 125 = 1$$

$$x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45 \quad | : \ln 5 :$$

$$x \log_5 25 + y \log_5 75 + z \cdot 3 = \log_5 45$$

$$(2 + \log_5 3)$$

$$2x + 2y + y \log_5 3 + z \cdot 3 = 1 + 2 \log_5 3$$

$$2x + 2y + z \cdot 3 - 1 = \log_5 3(2-y) \Rightarrow (2-y) \log_5 3 \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{array}{r} 256 \\ - 189 \\ \hline 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 90 \\ + 72 \\ \hline 162 \end{array}$$

$$4 + 2x + 3z = 1$$

$$3 + 2x + 3z = 0$$

$$3 + 20 + 3z = 0$$

$$3 + 2x + 3z = 0$$

$$x^2 + z^2 \rightarrow n^2$$

$$2x \Rightarrow 13$$

$$x \geq 3 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow x^2 + z^2 \geq 9$$

$$180(n-2) = \frac{132^\circ + (132^\circ \pm 2^\circ(n-1))}{n}$$

$$360(n-2) = (264 \pm 2(n-1))n$$

$$360n - 720 = 264n \pm (2n^2 - 2n) \Rightarrow \begin{cases} 2n^2 - 2n + 264n = 360n - 720 \Rightarrow \\ -2n^2 + 2n + 264n = 360n - 720 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2n^2 + 262n - 360n + 720 = 0 \Rightarrow n^2 - 49n + 360 = 0 \\ -2n^2 + 266n - 360n + 720 = 0 \end{cases}$$

$$-2n^2 + 266n - 360n + 720 = 0$$

$$-2n^2 - 94n + 720 = 0$$

$$n^2 + 47n - 360 = 0$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 7 \\ \hline 90 \\ 72 \\ \hline 162 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 256 \\ - 162 \\ \hline 94 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 146 \\ 240 \\ 344 \\ 443 \\ 542 \\ 641 \\ 740 \\ 839 \\ 938 \\ 1037 \\ 1136 \end{array}$$

$$25 = 47^2 + 4 \cdot 360$$

$$\begin{array}{r} 47 \quad 24 \\ \times 47 \\ \hline 329 \\ 168 \\ \hline 2209 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 105 \quad 35 \\ \times 4 \\ \hline 120 \\ 24 \\ \hline 1240 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3699 \\ - 3600 \\ \hline 99 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1080 / 2 \\ 540 / 2 \\ 270 / 2 \\ 135 / 3 \\ 45 / 3 \\ 15 / 3 \\ 5 / 5 \\ 1 \\ 61 \\ \times 61 \end{array}$$

$$p^2 - q^2 = 1080$$

$$(p-q)(p+q) = 1080$$

$$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$p-q < p+q \Rightarrow 4 \cdot 1 \cdot 9 > 0$$

$$\begin{cases} p-q = 2 \\ p+q = 540 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 2 \\ q = 540 \end{cases}$$

$$p-q \leq 6$$

$$132^\circ + 2^\circ \cdot 99$$

$$132^\circ + 2^\circ$$

$$k-u=9$$

$$k+u=9$$

$$4-u=4 \Rightarrow u=0$$

$$4+u=4 \Rightarrow u=0$$

$$271 - 269 = 2$$

$$\begin{array}{r} 137 \\ - 133 \\ \hline 4 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical solution on grid paper, including a diagram of a pyramid and various calculations.

**Diagram:** A pyramid with apex S and base ABCDE. A point U is marked on the base. A right-angled triangle is shown with legs of length 3 and 4, and hypotenuse 5. Another right-angled triangle is shown with legs of length 3 and 4, and hypotenuse 5.

**Calculations:**

$$\frac{41}{41} \times \frac{48}{48} = \frac{1681}{576}$$

$$27 - \frac{20 \cdot 42}{36} = 900$$

$$5 - 4 \sin \frac{30}{14}$$

$$5 - 7 \cos \frac{11}{7} \quad \sqrt{3} \cos \frac{29}{7} - 4 \cos \frac{24}{7}$$

$$y = 2x^3 - 3x^2 - 8x + 9 \quad \forall 0$$

$$y' = 6x^2 - 6x - 8$$

$$8 - 3 - 8 + 9 = 1$$

$$1 - \frac{3 \cdot 0,25 - 4 \cdot 4 \cdot 20 \sqrt{1}}{0,75}$$

$$\frac{7}{8} > \sqrt{\frac{13}{2}}$$

$$6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 = 144$$

$$\frac{144}{-21} > \frac{17}{24} \quad \cos \frac{7}{7}$$

$$\cos 60^\circ = 2 \cos^2 30^\circ - 1 = 2(4 \cos^2 30^\circ - 3 \cos^2 30^\circ) - 1$$

$$8 \cdot \frac{17^3}{24^3} - 3 \cdot \frac{17^2}{24^2} - 8 \cdot \frac{17}{24} + 4 \cdot 0$$

$$8 \cdot \frac{17^3}{24^3} - 3 \cdot \frac{17^2}{24^2} - \frac{5}{3} \sqrt{0}$$

$$\frac{17^3}{24^2} - 3 \cdot \frac{17^2}{24^2} - 5 \sqrt{0}$$

$$14 \cdot \frac{17^2}{24^2} - 5 \sqrt{0} \quad \times 14$$

$$14 \cdot 17^2 \sqrt{5 \cdot 24^2}$$

$$14 \cdot 289 \sqrt{120 \cdot 24}$$

$$2890 \quad 2880 \quad 12 \cdot 2$$

$$\frac{48}{7} - \frac{21}{7} = \frac{27}{7}$$

$$\frac{153 + 19 \sqrt{201}}{2 \cdot 24^2} - 8 \cdot \frac{35 + \sqrt{201}}{4 \cdot 24} - 8 \cdot \frac{3 + \sqrt{201}}{24} + 4 \sqrt{0}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{153 + 19\sqrt{201}}{6 \cdot 24} - \frac{35 + \sqrt{201}}{4 \cdot 8} - \frac{3 + \sqrt{201}}{3} + 4 \sqrt{0}$$

$$(153 + 19\sqrt{201}) \cdot 2 - (35 + \sqrt{201}) \cdot 9 - (3 + \sqrt{201}) \cdot 32 \cdot 3 + 4 \cdot 6 \cdot 24 \cdot 2 \sqrt{0}$$

$$\frac{306 + 38\sqrt{201} - 35 \cdot 9 - 9\sqrt{201} - 9 \cdot 32 - 32 \cdot 3\sqrt{201} + 9(7 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 2) \sqrt{0}}{3 \cdot 102}$$

$$\frac{9(34 - 35 - 32 + 128)}{9 \cdot 34}$$

$$\frac{23}{41} \cdot \frac{17}{48}$$

$$9 \cdot 95 + \sqrt{201} \left( \frac{38 - 9 - 32 \cdot 3}{29 - 96} \right) \sqrt{0}$$

$$- 67$$

$$\frac{94}{30} = \frac{47}{15}$$

$$9 \cdot 2 = 18$$

$$\frac{41 - 18}{18} = \frac{9 \cdot 95 \sqrt{201}}{18 \cdot 8} \cdot 67$$

$$\frac{67}{67} = 1$$

$$31 - 2 = 29$$

$$(26^2 = 1)$$

$$\frac{26}{26} = 1$$

$$81 \cdot 25 \cdot 361 \sqrt{201} \cdot 67^2$$

$$(60 + 7)^3 = 260^3 = 216000 + 343 + 3 \cdot 60 \cdot 7(60 + 7)$$

$$216393 + 3 \cdot 420 \cdot 67$$

$$27 \cdot 25 \cdot 361 \sqrt{201} \cdot 67^2$$

$$\frac{67}{67} = 1$$

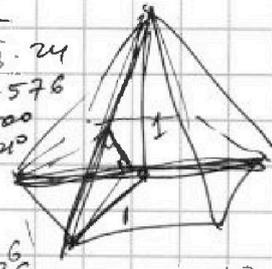
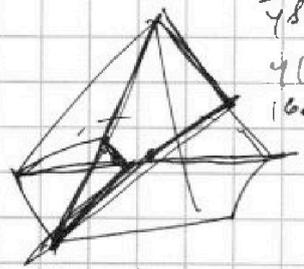
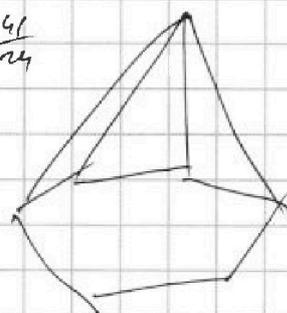
$$\begin{array}{r} 361 \\ \times 27 \\ \hline 2527 \\ 722 \\ \hline 9747 \\ \times 25 \\ \hline 48735 \\ 19494 \end{array}$$

$$\cos \frac{\pi}{8} < \cos \frac{\pi}{7} < \cos \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{5}{3} \frac{11}{36} = \frac{8}{3} \sqrt{0}$$

$$5^3 \frac{11}{125} \sqrt{8 \cdot 36}$$

$$\begin{array}{r} 4429 \\ \times 67 \\ \hline 31003 \\ 26574 \\ \hline 296743 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 47 \\ \times 47 \\ \hline 329 \\ 188 \\ \hline 2209 \\ 1440 \\ \hline 3649 \end{array}$$

$$11 \cdot 25 \sqrt{8 \cdot 36}$$

$$\frac{25}{25} = 1$$

$$\frac{36}{8} = 4.5$$

$$-\frac{41}{6} + \frac{24}{6} = \frac{288}{6}$$

$$8^3 = 512$$

$$\frac{5}{6} = \frac{20}{24}$$

$$\frac{41}{48} \sqrt{3} = \frac{48}{2}$$

$$\frac{360}{1440} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{61^2}{61} = 61$$

$$\frac{260}{120} = \frac{13}{6}$$

$$8^2 = 64$$

$$8 \cdot 2 \cdot 8 \cdot \frac{41}{3}$$

$$41 \sqrt{3} \sqrt{24} = 49 \cdot 3 \sqrt{3}$$

$$\frac{366}{3721}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5 - 4 \sin \frac{3\pi}{7} \sqrt{3 \sin \frac{3\pi}{7}} - 4 \cos \frac{3\pi}{7} \quad \text{ж.} \quad \frac{5^3}{3} - 3 \cdot \frac{5^2}{2 \cdot 6} - 4 \frac{5}{3} + 4 \sqrt{3}$$

$$5 - 4 \cos \frac{\pi}{7} \sqrt{3 \cos \frac{2\pi}{7}} - 4 \cos \frac{3\pi}{7} \quad \frac{5^3}{3} - \frac{5^2}{2 \cdot 6} - \frac{20}{3} \cdot \frac{12}{3} - \frac{20}{3}$$

$$5 - 4x \sqrt{3(2x^2 - 1)} - 4(4x^3 - 3x) \quad \frac{5^3}{3} - \frac{5^2}{2 \cdot 6} - \frac{1}{3}$$

$$5 - 4x \sqrt{6x^2 - 3} - 16x^3 + 12x$$

$$16x^3 - 6x^2 - 16x + 8 \sqrt{0} \quad \frac{5^3}{3} \parallel \frac{17}{36} - \frac{1}{3}$$

$$y = 8x^3 - 3x^2 - 8x + 4 \sqrt{0} \quad \frac{5^2}{3} \left( \frac{5}{9} - \frac{1}{4} \right)$$

$$y' = 24x^2 - 6x - 8 = 0 \quad \frac{17}{36} - \frac{1}{3}$$

$$12x^2 - 3x - 4 = 0 \quad \frac{17}{36} - \frac{1}{3}$$

$$D = 9 + 4 \cdot 4 \cdot 12 = 201$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{201}}{24}$$

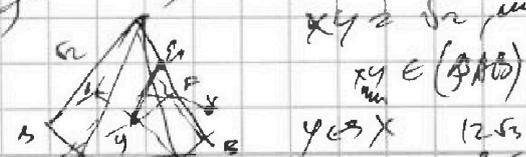
$$y = 8 \cos^3 x - 3 \cos^2 x - 8 \cos x + 4 \cos^2 \frac{\pi}{7} \times \cos \frac{\pi}{7}$$

$$y' = 24 \cos^2 x (-\sin x) - 6 \cos^2 x (-\sin x) - 8(-\sin x) = 0$$

$$-8 \sin x (24 \cos^2 x - 6 \cos^2 x - 8) = 0$$

$$8 \cdot \left( \frac{3 + \sqrt{201}}{24} \right)^3 - 3 \cdot \left( \frac{3 + \sqrt{201}}{24} \right)^2 = 8 \cdot \frac{3 + \sqrt{201}}{24} + 4 \sqrt{0}$$

$$3 \cdot 24^2 \cdot \frac{3 + \sqrt{201}}{24} - \frac{3 \cdot 24^2}{8 \cdot 24} = \frac{3 + \sqrt{201}}{3} + 4 \sqrt{0}$$



$$xy \in (A, B)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

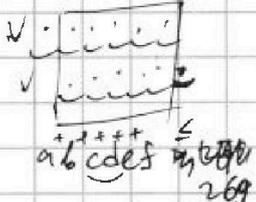
СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 271 \\ 269 \end{array} \text{ (✓)}$$

$$\begin{array}{r} 137 \\ 133 \end{array} \text{ (✗)}$$

$$\begin{array}{r} 271; 269 \\ \sim \sim \end{array}$$



$$42; 43; 44; 45; 46; 47; 48$$

$$\begin{array}{r} 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 \\ 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 \end{array}$$

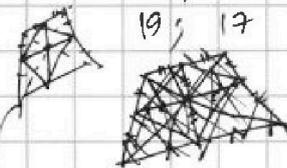
—шо

$$\begin{array}{r} 31; 29 \\ 19; 17 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 3x &\leq 269 \\ x &\leq \frac{269}{3} = 89 \\ abcdef + 9 &\geq 271 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d+e+9 &\geq \frac{271}{3} = 90 \\ y &\geq 91 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0; 1; 2; 3; 5; 6 \\ 0; 1; 3; 4; 5; 6 \end{aligned} \begin{matrix} = 13 \\ = 19 \end{matrix}$$

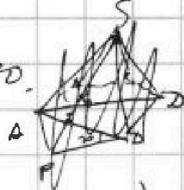


$$\begin{cases} x \leq 89 \\ y \geq 91 \\ y - x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 89 \\ y = 91 \end{cases}$$

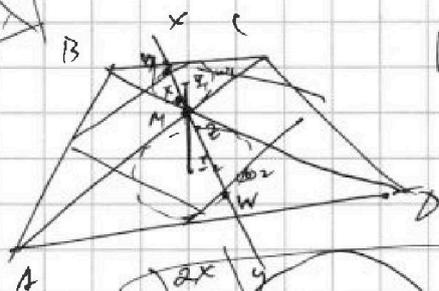
$$42 + 43 + 44 + 45 + 47 + 48 = 269$$

$$42 + 43 + 45 + 46 + 47 + 48 = 271$$

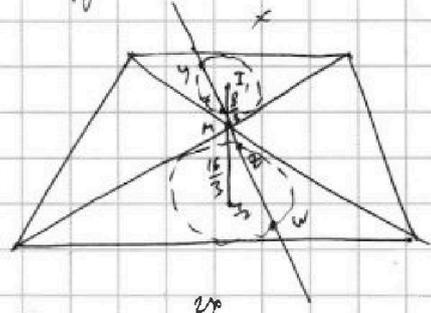
$$271^2 - 269^2 = (271+269)(271-269) = 540 \cdot 2 = 1080$$



MZ · MY

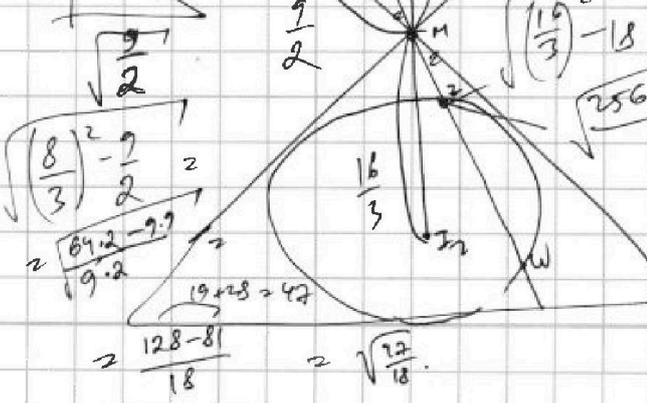


$\sqrt{w_1} = ?$   
 $I_1, I_2 = 8$   
 $MZ \cdot MY = 9$



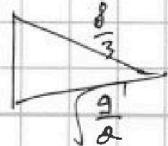
$$\frac{8}{3}$$

$$\frac{MZ}{MX} = \frac{MY}{MY} = \frac{1}{2}$$



$$MZ \cdot MY = MX \cdot MW = 9 \sqrt{18}$$

$$\frac{256 - 18 \cdot 9}{9} = \frac{256 - 162}{9} = \frac{94}{9}$$



$$\frac{64}{9} - \frac{9}{2} = \frac{128 - 81}{18} = \sqrt{\frac{47}{18}}$$