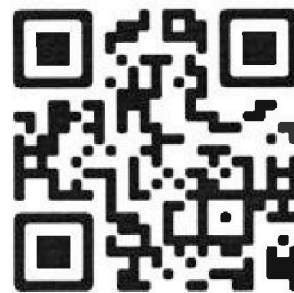




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 15



1. [3 балла] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $4x^2 - (4a + 8)x + a^2 + 4a = 0$ имеет два действительных корня, которые отличаются ровно в 5 раз?
2. [5 баллов] Дан треугольник ABC такой, что $AB = 30$, $BC = 24$, $AC = 18$. На стороне BC отмечено последовательно 23 точки: $B_1, B_2, \dots, B_{23}$ так, что эти точки разбивают BC на 24 единичных отрезка. Аналогично, на стороне AC отмечено последовательно 17 точек: $A_1, A_2, \dots, A_{17}$ так, что эти точки разбивают AC на 18 единичных отрезков. Сколько существует треугольников с площадью 11 и вершинами, которые выбираются из точек $A, A_1, A_2, \dots, A_{17}, B, B_1, B_2, \dots, B_{23}, C$?
3. [4 балла] AH – высота равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$). Точка M – середина стороны AB . Из точки M опущен перпендикуляр MK на сторону AC . Найдите периметр треугольника ABC , если $AH = MK$, и $AK = 5$.
4. [4 балла] Из множества M , состоящего из пяти подряд идущих натуральных чисел, выбираются четвёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из четвёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M , если $p^2 - q^2 = 240$.
5. [5 баллов] Остроугольный треугольник ABC площади 80 вписан в окружность с центром O , а AA_1 , BB_1 и CC_1 – его высоты. Найдите площадь треугольника BOA_1 , если площади треугольников COB_1 и AOC_1 равны 12 и 20 соответственно.
6. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{a^3}{b} - 2ab = 4, \\ \frac{b^3}{a} - 3ab = 8. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Компания владеет тремя заводами, производящими некоторые приборы. Затраты на поддержание заводов в рабочем состоянии везде одинаковы, а вот затраты непосредственно на производство продукции разные. Выпуск q ($q \in \mathbb{N}$) приборов в месяц потребует на первом заводе $2q^2$ тыс.руб., на втором заводе $2q^2 + 2q$ тыс.руб., и на третьем $2q^2 - q$ тыс.руб. Каждый завод может выпускать до 100 приборов в месяц. Как нужно распределить производство продукции между заводами, чтобы за месяц выполнить с наименьшими затратами заказ на 250 приборов?



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4x^2 - (4a+8)x + a^2 + 4a = 0$$

Пусть первый корень: $x_1 = t \Rightarrow$ второй корень $x_2 = 5t$

~~4x^2 - (4a+8)x + a^2 + 4a = 0~~
 $x_1 = t: 4t^2 - (4a+8)t + a^2 + 4a = 0$

$$x_2 = 5t: 100t^2 - (4a+8) \cdot 5t + a^2 + 4a = 0 \quad \ominus$$

$$4t^2 - (4a+8)t - 100t^2 + 5t(4a+8) = 0$$

$$\cancel{4t^2 - 8t} - 96t^2 + 4t(4a+8) = 0$$

1) $t = 0 \Rightarrow$ ур. не имеет корни $x_1 = 0, x_2 = 0 \Rightarrow$ только один корень

$\Rightarrow$ не подходит

$$2) t \neq 0 \Rightarrow -96t^2 + 4t(4a+8) = 0 \quad | : t \neq 0$$

$$-96t + 4(4a+8) = 0$$

$$-24t + 4a + 8 = 0$$

$$-6t + a + 2 = 0$$

$$a = 6t - 2$$

$$\Rightarrow 4t^2 - (4(6t-2)+8)t + (6t-2)^2 + 4(6t-2) = 0$$

$$\underline{4t^2} - \underline{24t^2} + \underline{8t^2} - \underline{8t} + \underline{36t^2} - \underline{24t} + \underline{4} + \underline{24t} - \underline{8} = 0$$

$$\cancel{4t^2} \quad \cancel{36t^2} - 4 = 0 \Rightarrow t^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow t = \pm \frac{1}{2}$$

$$t = \frac{1}{2}: a = 3 - 2 = 1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$t = -\frac{1}{2} : a = -3 - 2 = -5$$

Ответ: $a = -5$ или $a = 3$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$AB^2 = 30^2 = 900$$

$$BC^2 = 24^2 = 576$$

$$AC^2 = 18^2 = 324$$

$$\Rightarrow AB^2 = 900 = 576 + 324 = BC^2 + AC^2$$

$\Rightarrow$ по теореме, обратной теореме Пифагора: $\triangle ABC$ - прямоугольный, $\angle C = 90^\circ$

~~Пусть вершины прямоугольника так, что A_i лежит между~~
Рассмотрим треугольники образованные вершинами A_i, B_j и C ,

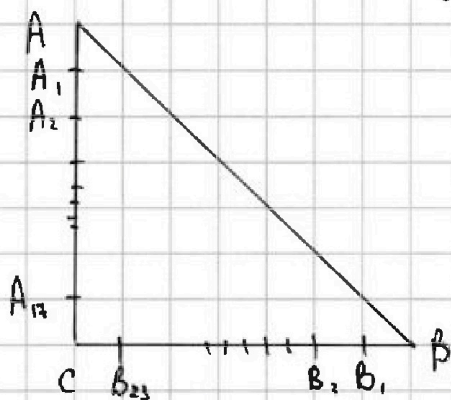
Если A_i это A , то $i = 0$, если B_j это B , то $j = 0$

$\triangle A_i B_j C$ - прямоугольный с $\angle C = 90^\circ \Rightarrow S_{\triangle A_i B_j C} = \frac{A_i C \cdot B_j C}{2}$

~~Пусть~~ Пусть вершины прямоугольника так что A_i лежит между

A и A_2 , A_2 лежит между A_1 и A_3 и т.д., B_1 лежит между

B и B_2 , B_2 лежит между B_1 и B_3 и т.д.



$$\Rightarrow A_i C = 18 - i$$

$$B_j C = 24 - j$$

$$\Rightarrow \frac{(18-i)(24-j)}{2} = S_{\triangle A_i B_j C}$$

Рассмотрим при каких парах $(i; j)$

$$S_{\triangle A_i B_j C} = 11: \frac{(18-i)(24-j)}{2} = 11$$

$$(18-i)(24-j) = 22$$

$$22 = 1 \cdot 22 = 2 \cdot 11 = 11 \cdot 2 = 22 \cdot 1$$



1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Т.к. $j, i \in \mathbb{Z}$ и $j, i \geq 0$, то возможен 4 случая:

$$1) \begin{cases} 18-i=1 \Rightarrow i=17 \\ 24-j=122 \Rightarrow j=2 \end{cases} \Rightarrow \Delta A_{17} B_2 C$$

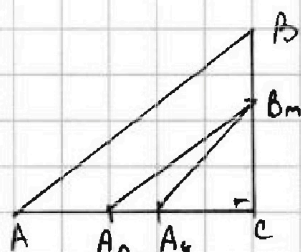
$$2) \begin{cases} 18-i=2 \Rightarrow i=16 \\ 24-j=11 \Rightarrow j=13 \end{cases} \Rightarrow \Delta A_{16} B_{13} C$$

$$3) \begin{cases} 18-i=11 \Rightarrow i=7 \\ 24-j=2 \Rightarrow j=22 \end{cases} \Rightarrow \Delta A_7 B_{22} C$$

$$4) \begin{cases} 18-i=24 \Rightarrow i=-6 \Rightarrow i < 0 \Rightarrow \text{не может быть} \\ 24-j=21 \Rightarrow j=3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Возможны 3 треугольника: $\Delta A_{17} B_2 C$; $\Delta A_{16} B_{13} C$; $\Delta A_7 B_{22} C$

Соединив ^{Аналог} 2 точки A_n и A_k треугольник можно поделить, соединив их еще и с B_m ($C-A_n-A_k \Rightarrow \Delta A_n A_k C$ нет)



$$\Rightarrow S_{\Delta A_n A_k B_m} = \frac{B_m C \cdot A_n A_k}{2}$$

$$B_m C = 24 - m$$

$$A_n A_k = k - n$$

$$\Rightarrow \frac{(24-m)(k-n)}{2} = 11 \Rightarrow (24-m)(k-n) = 22$$

Возможны 4 случая:

$$1) \begin{cases} 24-m=1 \Rightarrow m=23 \\ k-n=22 \Rightarrow k=22+n \Rightarrow k > 22 \Rightarrow A_k \text{ не существует} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 24-m=2 \Rightarrow m=22 \\ k-n=11 \Rightarrow k=11+n \Rightarrow k \in [11; 17], n \in [0; 6] \end{cases} \Rightarrow \text{возможно 7 треугольников}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 9

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3) \left\{ \begin{array}{l} 24 - m = 11 \Rightarrow m = 13 \\ k - n = 2 \Rightarrow k = n + 2 \Rightarrow k \in [2; 15], n \in [0; 13], \text{ где каждого } k - \text{одно значение} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

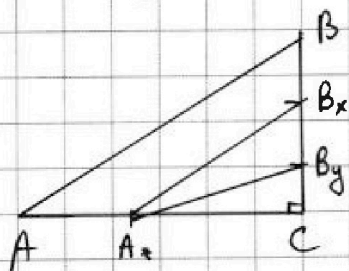
$\Rightarrow$ возможно 16 треугольников

$$4) \left\{ \begin{array}{l} 24 - m = 24 - 2 \Rightarrow m = 2 \\ k - n = 1 \Rightarrow k = n + 1 \Rightarrow k \in [1; 17], n \in [0; 16], \text{ где каждого } k - \text{одно значение} \end{array} \right\}$$

$\Rightarrow$ возможно 17 треугольников

$\Rightarrow$ возможно 40 треугольников в задаче $A_1 A_2 B_m$

Соединив 2 точки B_x и B_y треугольник не получится в том случае, если соединить их с A_2 ($C - B_x - B_y \Rightarrow \triangle B_x B_y C$ - нет)



$$\Rightarrow S_{\triangle A_2 B_x B_y} = \frac{A_2 C \cdot B_x B_y}{2} = 11$$

$$B_x B_y = y - x$$

$$A_2 C = 18 - z$$

$$\Rightarrow \frac{(18-z)(y-x)}{2} = 11 \Rightarrow (18-z)(y-x) = 22$$

Возможна 4 случая:

$$1) \left\{ \begin{array}{l} 18 - z = 1 \Rightarrow z = 17 \\ y - x = 22 \Rightarrow y = 22 + x \Rightarrow y \in [22; 23], x \in [0; 1], \text{ где каждого } x - \text{одно значение} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ возможно 2 треугольника

$$2) \left\{ \begin{array}{l} 18 - z = 2 \Rightarrow z = 16 \\ y - x = 11 \Rightarrow y = 11 + x \Rightarrow y \in [11; 23], x \in [0; 12], \text{ где каждого } x - \text{одно значение} \end{array} \right\} \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
9 ИЗ 9

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow$ Возможно 13 треугольников

$$3) \left\{ \begin{array}{l} 18 - z = 11 \Rightarrow z = 7 \\ \text{так } y - x = z \Rightarrow y = x + z \rightarrow y \in [0; 23], x \in [0; 7], \text{ для каждого } y - \text{одно значение } x \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Возможно 22 треугольника

$$4) \left\{ \begin{array}{l} 18 - z = 22 \Rightarrow z = -4 < 0 \Rightarrow \text{не может быть} \\ y - x = 1 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$ Возможно 37 треугольников вида $A_2 B_1 B_2$

$\Rightarrow$ Всего $3 + 37 + 40 = 80$ треугольников. может быть с площадью 11

Ответ: 80 треугольников



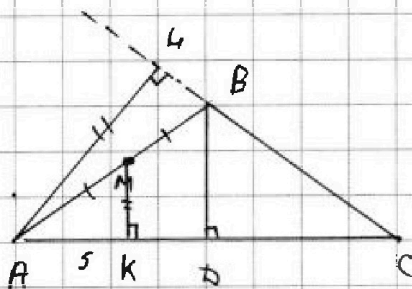
1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Возможны 3 случая: $\triangle ABC$ - тупоугольный
 $\triangle ABC$ - прямоугольный
 $\triangle ABC$ - остроугольный

1) $\triangle ABC$ - тупоугольный



Пусть $MK = AK = x \Rightarrow \triangle AMK$ - прямоугольный $\Rightarrow$ по т. Пифагора:

$$AM^2 = AK^2 + MK^2 = 25 + x^2 \Rightarrow AM = \sqrt{25 + x^2}$$

$$TM - \text{середина} \Rightarrow AM = MB = \frac{1}{2} AB \Rightarrow AB = 2AM = 2\sqrt{25 + x^2} = BC$$

$$\triangle AMB - \text{прямоугольный} \Rightarrow \text{по т. Пифагора: } AM^2 + BM^2 = AB^2$$

$$x^2 + BM^2 = 100 + 4x^2$$

$$BM^2 = 100 + 3x^2$$

$$BM = \sqrt{100 + 3x^2}$$

$$BC = BM + MC = \sqrt{100 + 3x^2} + 2\sqrt{25 + x^2}$$

Проведем высоту BD в $\triangle ABC \Rightarrow BD$, медиана, $BD \perp AC$

$$BD - \text{медиана} \Rightarrow AD = DC$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left. \begin{array}{l} BD \perp AC \\ MK \perp AC \end{array} \right\} \Rightarrow BD \parallel MK \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow MK - \text{средняя линия } \triangle ABD \Rightarrow AK = KD = 5 \\ MP - \text{средняя } AB \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow AD = 10 \Rightarrow AC = AD + CD = 2AD = 20$$

$\triangle AHC$ - прямоугольный $\Rightarrow$ по т. Пифагора: $AC^2 = HC^2 + AH^2$

$$400 = x^2 + (\sqrt{100 + 3x^2} + \sqrt{25 + x^2})^2$$

$$400 = x^2 + 100 + 3x^2 + 100 + 4x^2 + 4\sqrt{2500 + 75x^2 + 100x^2 + 3x^4}$$

$$400 = 8x^2 + 200 + 4\sqrt{2500 + 75x^2 + 3x^4}$$

$$200 - 8x^2 = 4\sqrt{2500 + 75x^2 + 3x^4}$$

$$50 - 2x^2 = \sqrt{2500 + 75x^2 + 3x^4}$$

$$2500 + 4x^4 - 100x^2 = 2500 + 75x^2 + 3x^4$$

$$x^4 - 75x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 - 75) = 0$$

$$x \neq 0 \Rightarrow x^2 - 75 = 0 \Rightarrow x^2 = 75$$

$$AB = \sqrt{25 + 75} = \sqrt{100} = 10\sqrt{3} = BC$$

$$AP = AB + BC + AC = 10\sqrt{3} + 10\sqrt{3} + 20 = 20 + 40\sqrt{3}$$

2) $\triangle ABC$ - прямоугольный $\Rightarrow$ т. Ковалева с т. В

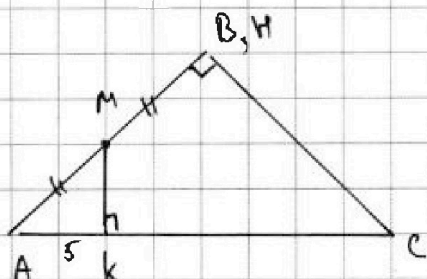


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

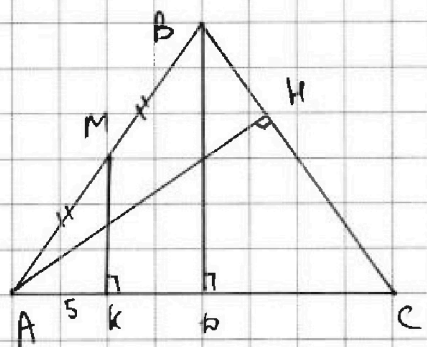


$$AM > MK \Rightarrow BH > AM > MK \Rightarrow AB > MK \Rightarrow AK > MK$$

$$\Rightarrow AK < MK \Rightarrow \text{не подходит} \Rightarrow$$

$\triangle ABC$ - не прямоугольный

3) $\triangle ABC$ - остроугольный



$$\text{Пусть } MK = AH = y$$

$\triangle AKM$ - прямоугольный $\Rightarrow$ по т. Пифагора:

$$AM^2 = AK^2 + MK^2 = 25 + y^2$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{25 + y^2}$$

$$M - \text{середина} \Rightarrow AM : BM = \frac{1}{2} AB$$

$$\Rightarrow AB = 2\sqrt{25 + y^2} = BC$$

По т. Пифагора для $\triangle ABH$:

$$AB^2 = BH^2 + AH^2$$

$$4 \cdot 100 + 4y^2 = BH^2 + y^2 \Rightarrow BH^2 = 100 + 3y^2 \Rightarrow BH = \sqrt{100 + 3y^2}$$

$$HC = BC - BH = 2\sqrt{25 + y^2} - \sqrt{100 + 3y^2}$$

Проведем высоту BD ~~в~~ $\triangle ABC$ и BD - медиана, BH - ее

$$\Rightarrow AD = DC$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left. \begin{array}{l} BD \perp AC \\ MK \perp AC \end{array} \right\} \Rightarrow BD \parallel MK \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow MK - \text{средняя линия } \triangle ABD$$

ТМ - середина AB

$$\Rightarrow AK = KD = 5$$

$$\Rightarrow AD = AK + KD = 10 \Rightarrow AC = AD + CD = 2AD = 20$$

$\triangle AKC$ - прямоугольный $\Rightarrow$ по т. Пифагора: $AC^2 = AK^2 + KC^2$

$$400 = y^2 + (2\sqrt{25+y^2} + \sqrt{100+3y^2})^2$$

$$400 = y^2 + 100 + 4y^2 + 100 + 3y^2 - 4\sqrt{(25+y^2)(100+3y^2)}$$

$$200 - 8y^2 = -4\sqrt{2500 + 100y^2 + 75y^2 + 3y^4} \quad | : (-4) \neq 0$$

$$2y^2 - 50 = \sqrt{2500 + 175y^2 + 3y^4}$$

$$2500 + 4y^4 - 200y^2 = 2500 + 175y^2 + 3y^4$$

$$y^4 - 375y^2 = 0$$

$$y^2(y^2 - 375) = 0$$

$$y \neq 0 \Rightarrow y^2 - 375 = 0 \Rightarrow y^2 = 375$$

$$AB = 2\sqrt{25+375} = 2\sqrt{400} = 40 = BC$$

$$P = AB + BC + AC = 40 + 40 + 20 = 100$$

Периметр равен

Ответ: $\sqrt{100}$ или $20 + 40\sqrt{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $M = \{a+2; a+1; a; a-1; a-2\}$

Возможна 45 вариантов сумм:

$$1) S_1 = a+2+a+1+a+a-1 = 4a+2$$

$$\cancel{S_2} \quad a+2 \geq 1 \Rightarrow a \geq 3 \Rightarrow a \neq 0 \Rightarrow 4a+2 \neq 2 \Rightarrow 4a+2 \geq 12, 4a+2 \geq 2$$

$\Rightarrow 4a+2$ - не простое $\Rightarrow$ не подходит

$$2) S_2 = (a+2)+(a+1)+(a)+(a-2) = 4a+1$$

$$3) S_3 = (a+2)+(a+1)+(a-1)+(a-2) = 4a$$

$a \neq 0 \Rightarrow 4a : 4 \Rightarrow S_3$ - не простое $\Rightarrow$ не подходит

$$4) S_4 = (a+2)+(a)+(a-1)+(a-2) = 4a-1$$

$$5) S_5 = (a+1)+(a)+(a-1)+(a-2) = 4a-2$$

$$a \geq 3 \Rightarrow 4a-2 \geq 10 \Rightarrow 4a-2 \neq 2 \text{ так как } \left. \begin{array}{l} 4a-2 \geq 10 \\ 4a-2 \geq 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 4a-2 \text{ - не простое}$$

$\Rightarrow S_5$ - не простое $\Rightarrow$ не подходит

$\Rightarrow$ Пусть p и q подходит только 2 суммы $S_2 = 4a+1$ и $S_4 = 4a-1$

$$\left. \begin{array}{l} p^2 - q^2 = 240 \Rightarrow p^2 - q^2 \geq 0 \Rightarrow p^2 \geq q^2 \\ p, q > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow p > q$$

$$\begin{array}{l} p = 4a+1 \Rightarrow p^2 = 16a^2 + 8a + 1 \\ q = 4a-1 \Rightarrow q^2 = 16a^2 - 8a + 1 \end{array}$$

$$p^2 - q^2 = 16a^2 + 8a + 1 - 16a^2 + 8a - 1 = 16a = 240 \Rightarrow a = 15$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow M = \{13; 14; 15; 16; 17\}$$

$$\text{Ответ: } M = \{13; 14; 15; 16; 17\}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть a приборов - выпустил I завод, b - II завод, c - III завод
 $\Rightarrow$ ~~250 - a - b~~ $c = 250 - a - b$

$\Rightarrow$ Затраты: $2a^2 + 2b^2 + 2b + 2c^2$ ~~$2(250 - a - b)^2$~~

$$= 2a^2 + 2b^2 + 2b + 2c^2 - c$$

$$a + b + c = 250$$

~~$2a^2 + 2b^2 + 2b$~~

~~$2(250 - a - b)^2$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☒☐

СТРАНИЦА

4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \frac{a^3}{b} - 2ab = 4 \\ \frac{b^3}{a} - 3ab = 8 \end{cases}$$

ОДЗ: $a, b \neq 0$

Пусть $\frac{a^2}{b^2} = x$, $ab = y \Rightarrow x, y \neq 0$

$$\frac{a^3}{b} = \frac{a^2}{b^2} \cdot ab = xy$$

$$\frac{b^3}{a} = \frac{b^2}{a^2} \cdot ab = \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xy - 2y = 4 = y(x-2) & (1) \\ \frac{y}{x} - 3y = 8 = y(\frac{1}{x}-3) & (2) \end{cases}$$

$$\frac{(1)}{(2)}, \quad \frac{y(x-2)}{y(\frac{1}{x}-3)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = \frac{x-2}{\frac{1}{x}-3}$$

$$\Rightarrow 2x-4 = \frac{1}{x}-3$$

$$x \neq 0 \Rightarrow 2x-4 = \frac{1}{x}-3 \quad | \cdot x$$

$$2x^2 - 4x = 1 - 3x$$

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$2-1-1=0$$

$$\Rightarrow x_1 = 1 \Rightarrow (1-2)y = -y = 4 \Rightarrow y = -4$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow (-\frac{1}{2}-2)y = -\frac{5}{2}y = 4 \Rightarrow y = -\frac{8}{5}$$

$$1) x = 1, y = -4: \frac{a^2}{b^2} = 1 \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ a = -b \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) a = b \Rightarrow y = ab = b^2 = -4 \Rightarrow \text{не может быть}$$

$$b) a = -b \Rightarrow y = -b^2 = -4 \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2$$

$$b = 2: a = -2 \Rightarrow (2; 2) - \text{решение}$$

$$b = -2: a = 2 \Rightarrow (2; -2) - \text{решение}$$

$$2) x = -\frac{1}{2}, y = -10$$

$$\frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{не может быть}$$

$$\text{Ответ: } (-2; 2) \text{ и } (2; -2)$$

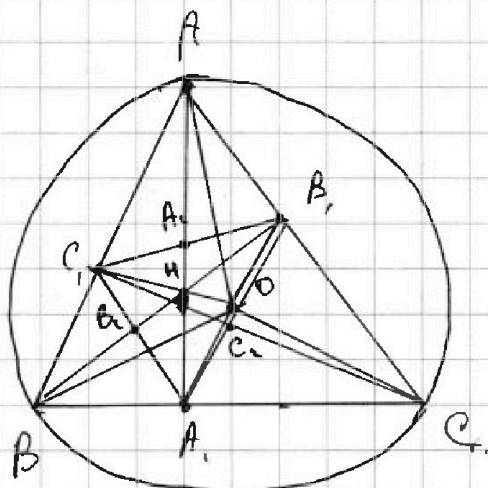


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☐☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Сведем к $\triangle A_1, \triangle B_1, \triangle C_1$

Опишем окружность около $\triangle A, B, C$

$\triangle A, B, C$ - ортоцентр $\rightarrow$ ил - окружность девяти точек

пусть $BB_1 \cap A_1C_1 = T_{B_1}$

$AA_1 \cap B_1C_1 = T_{A_1}$

$CC_1 \cap A_1B_1 = T_{C_1}$

$AA_1 \cap BB_1 \cap AA_1 = T_H$

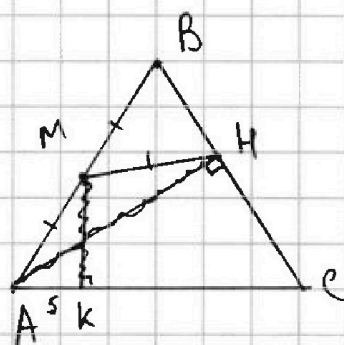
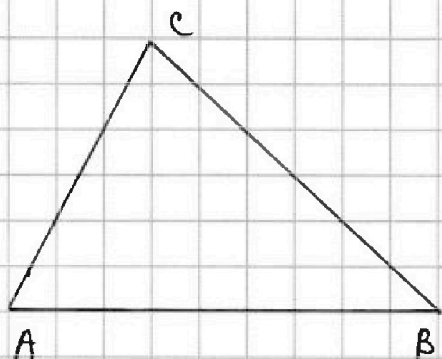


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$c = -1 - \sqrt{21} ; d = \frac{4}{-3 - \sqrt{21}}$$

$$= \frac{+4(\sqrt{21}-3)}{-(2-9)} = \frac{4(\sqrt{21}-3)}{7}$$

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{4}{9} - 1 - \sqrt{21}$$

$$ab = \frac{4(\sqrt{21}-3)}{7}$$

$$a^2 b^2 = \frac{16}{49} (\sqrt{21}-3)^2$$

$$a^4 = (-1 - \sqrt{21})(\sqrt{21}-3)^2 \frac{16}{49}$$

$$= (-1 - \sqrt{21})(9 - 6\sqrt{21}) \frac{16}{49} = (-1 - 5\sqrt{21}) \frac{16}{49}$$

$$\begin{cases} \frac{a^3}{b} - 2ab = 4 \\ \frac{b^3}{a} - 3ab = 8 \end{cases} \quad \begin{matrix} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{matrix}$$

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{4}{c} ; ab = d \quad \begin{matrix} c \neq 0 \\ d \neq 0 \end{matrix}$$

$$\frac{a^2}{b^2} \cdot ab = \frac{a^3}{b} = cd$$

$$\frac{b^2}{a^2} \cdot ab = \frac{b^3}{a} = \frac{d}{c}$$

$$\begin{cases} cd - 2d = 4 \\ \frac{d}{c} - 3d = 8 \end{cases}$$

$$(c-2)d = 4 \quad | c \neq 2$$

$$d = \frac{4}{c-2}$$

$$\frac{4}{c^2-2c} - 3 \frac{12}{c-2} = 8$$

$$\frac{4 - 32 - 36c^2 + 16c}{c(c-2)} = 0$$

$$\frac{36c^2 + 16c - 8}{c(c-2)} = 0$$

$$\frac{8(c^2 + 2c - 1)}{c(c-2)} = 0$$

$$c \neq 0 \Rightarrow c^2 + 2c - 1 = 0$$

$$c \neq 2 \Rightarrow c = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$3\sqrt{2} = 1$$

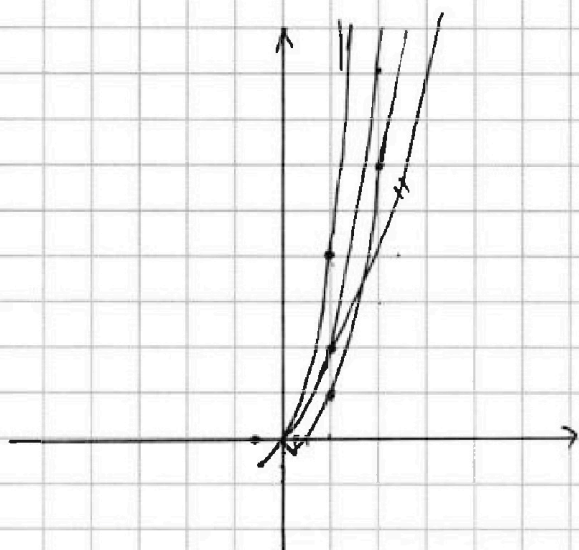


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

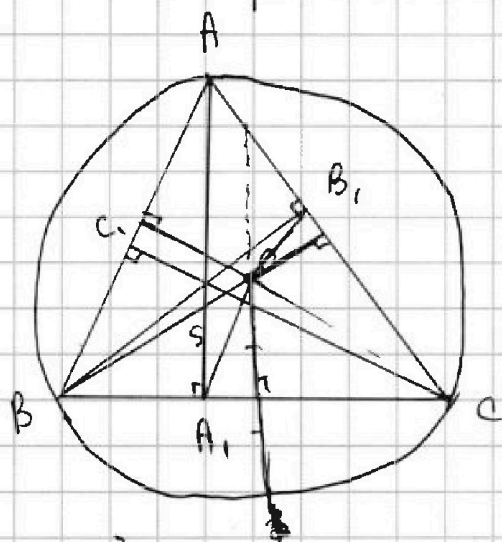


$$\frac{2}{4} - 1$$

$$\frac{1}{8} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$f^{-2}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 576 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$$

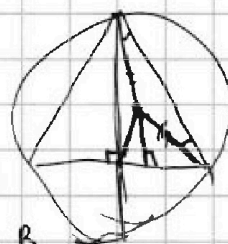


$$S_{\triangle O A_1} = \frac{S_{\triangle O B C}}{2} \cdot B A_1$$

$$B A_1 = \frac{2 S_{\triangle A A_1 B}}{A A_1}$$

$$S_{\triangle A A_1 B} = \frac{S_{\triangle A B C}}{2} \cdot A B$$

$$S_{\triangle A A_1 B} = \frac{2 S_{\triangle A B C} \cdot A B}{A A_1}$$



$$29^2 + 99$$

$$29^2 - 9$$

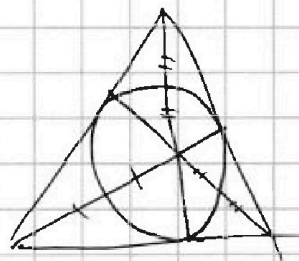
$$29^2$$

$$A A_1^2 = 160 \rightarrow A A_1 = 4\sqrt{10}$$

$$R = \frac{A B \cdot B C \cdot A C}{4 S} = \frac{A B}{\sin C} = \frac{A B \cdot B B_1}{A C}$$

$$\frac{S_{\triangle O B A_1}}{S_{\triangle O A_1 C}} = \frac{A_1 B}{A_1 C}$$

$$\sqrt{\frac{R + O A_1 + B A_1}{2}}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

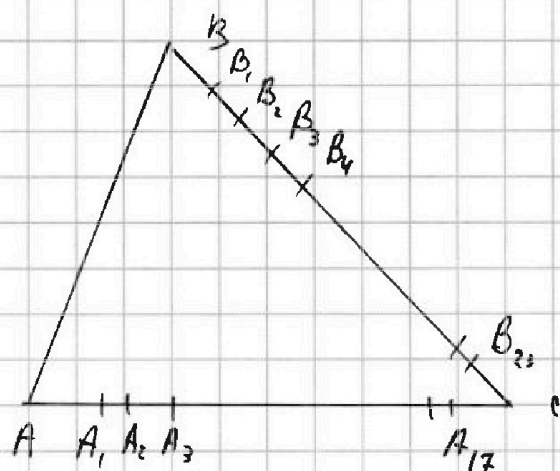
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6-3

A; B; C



$$\frac{(24-j)(18-i)}{2} = 11$$

$$(24-j)(18-i) = 22$$

$$24-j = 1 : 18-i = 22$$

$$j = 23 \quad i = 4$$

$$24-j = 2 : 18-i = 11$$

$$j = 22 \quad i = 7$$

$$24-j = 11 : 18-i = 2$$

$$j = 13 \quad i = 16$$

$$24-j = 22 : 18-i = 1$$

$$j = 2 \quad i = 17$$

Ответ: 4

$$I - 2q^2$$

$$II - 2q^2 + 2q$$

$$III - 2q^2 - 9$$

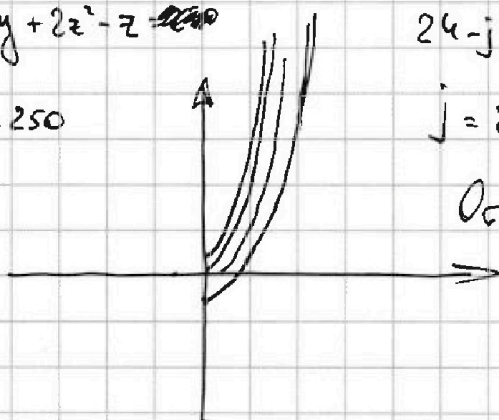
$$-\frac{2}{4}$$

$$\frac{1}{4}$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2 = 200$$

$$x + y + z = 250$$

$$III \quad 200$$



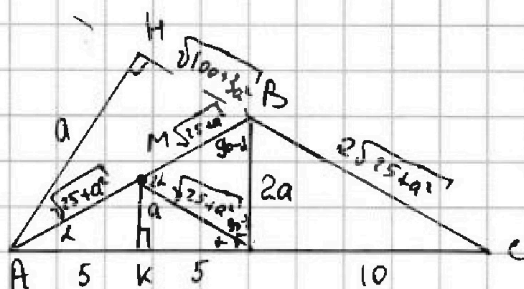
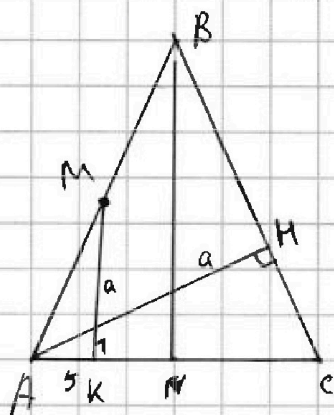


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$P = 4\sqrt{25+a^2} + 20 =$$

$$= 4\sqrt{400} + 20 = 100$$

$$2a = \frac{1}{2}\sqrt{100+4a^2-a^2}$$

$$25+a^2+25+a^2-2\cos\lambda\cdot(25+a^2)=4a^2$$

$$2\cos\lambda\cdot(25+a^2)=50-2a^2$$

$$\cos\lambda = \frac{25+a^2}{25+a^2}$$

$$\sin 2\lambda = \sqrt{1 - \left(\frac{25+a^2}{25+a^2}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{(25+a^2)^2 - (25-a^2)^2}{(25+a^2)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{+2a^2(50)}{(25+a^2)^2}} = \frac{10a}{25+a^2}$$

$$a^2 + 100 + 3a^2 + 100 + 4a^2 + 4\sqrt{(100+3a^2)(25+a^2)} = 400$$

$$8a^2 + 200 + 4\sqrt{2500 + 175a^2 + 3a^4} = 400$$

$$\sqrt{2500 + 175a^2 + 3a^4} = 50 - 2a^2$$

$$2500 + 175a^2 + 3a^4 = 2500 + 4a^2 - 200a^2$$

$$375a^2 - a^4 = 0 \Rightarrow a^2(a^2 - 375) = 0 \Rightarrow a = \sqrt{375} = 5\sqrt{15}$$

