



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен $6 - 9x$, шестой член равен $(x^2 - 2x)^2$, а десятый равен $9x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $3y + 6x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$ и $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$ равно $11p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 6$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 10×10 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 4$, $AN = 5$.



СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

Пусть a - первый член прогрессии, d - разность арифметической прогрессии. 4-ый член - $a+3d$; 6-ой член - $a+5d$; 10-ый член - $a+9d$.

Получим систему уравнений:

$$(1) \begin{cases} a+3d = (6-9x) \end{cases}$$

$$\text{Из (2) вычтем (1): } (x^2-2x)^2 - (6-9x) = 2d \quad (4)$$

$$(2) \begin{cases} a+5d = (x^2-2x)^2 \end{cases}$$

$$\text{Из (3) вычтем (2): } 9x^2 - (x^2-2x)^2 = 4d \quad (5)$$

$$(3) \begin{cases} a+9d = 9x^2 \end{cases}$$

$$\text{Разделим (5) на (4): } \frac{9x^2 - (x^2-2x)^2}{(x^2-2x)^2 - (6-9x)} = 2 \quad (6)$$

$$\frac{9x^2 - (x^2-2x)^2}{(x^2-2x)^2 - (6-9x)} = 2 \quad (6) \quad 9x^2 - (x^2-2x)^2 = 2(x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 6 + 9x);$$

$$9x^2 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 = 2x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 12 + 18x;$$

$$3x^4 - 12x^3 + 3x^2 + 18x - 12 = 0; \quad x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0;$$

$$(x-1)(x^3-3x^2-2x+4)=0; \quad (x-1)^2(x^2-2x-4)=0.$$

$$\text{Решим уравнение } x^2-2x-4=0: \quad D=4+4 \cdot 4=20=(2\sqrt{5})^2.$$

$$x_1 = \frac{2+2\sqrt{5}}{2} = 1+\sqrt{5}; \quad x_2 = \frac{2-2\sqrt{5}}{2} = 1-\sqrt{5}. \quad \text{Значит, корни}$$

$$\text{уравнения (6): } x_1=1; \quad x_2=1+\sqrt{5}; \quad x_3=1-\sqrt{5}.$$

Проверим, что все они подходят:

$$1) \quad x_1=1, \quad a+3d=-3; \quad a+5d=1; \quad a+9d=9; \quad (\Rightarrow) d=2; \quad a=-9.$$

Подходит.



1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) x_2 = 1 + \sqrt{5}: a + 3d = (6 - 9x_2) = (6 - 9(1 + \sqrt{5})) = -3 - 9\sqrt{5}$$

$$a + 5d = (x_2^2 - 2x_2)^2 = (1 + \sqrt{5} - 2(1 + \sqrt{5}))^2 = (6 + 2\sqrt{5} - 2 - 2\sqrt{5})^2 = 16$$

$$a + 9d = 9x_2^2 = 9(1 + \sqrt{5})^2 = 9(6 + 2\sqrt{5}) = 54 + 18\sqrt{5}$$

$$4d = (a + 9d) - (a + 5d) = 54 + 18\sqrt{5} - 16 = 38 + 18\sqrt{5} \Rightarrow d = \frac{19 + 9\sqrt{5}}{2}$$

$$2d = (a + 5d) - (a + 3d) = 16 + 3 + 9\sqrt{5} \Rightarrow d = \frac{19 + 9\sqrt{5}}{2} \text{ Подходит.}$$

$$3) x_3 = 1 - \sqrt{5}: a + 3d = (6 - 9x_3) = (6 - 9(1 - \sqrt{5})) = -3 + 9\sqrt{5}$$

$$a + 5d = (x_3^2 - 2x_3)^2 = (6 - 2\sqrt{5} - 2 + 2\sqrt{5})^2 = 16$$

$$a + 9d = 9x_3^2 = 9(6 - 2\sqrt{5}) = 54 - 18\sqrt{5}$$

$$4d = (a + 9d) - (a + 5d) = 38 - 18\sqrt{5} \Rightarrow d = \frac{19 - 9\sqrt{5}}{2}$$

$$2d = (a_3 + 5d) - (a_3 + 3d) = 16 + 3 - 9\sqrt{5} \Rightarrow d = \frac{19 - 9\sqrt{5}}{2} \text{ Подходит.}$$

Если же $d = 0$, то $6 - 9x = (x^2 - 2x)^2 = 9x^2$

$$(2): 9x^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2; x^4 - 4x^3 - 5x^2 = 0; x^2(x^2 - 4x - 5) = 0; x^2(x - 5)(x + 1) = 0$$

При $x = 0$: $6 - 9x \neq 9x^2$. Не подходит.

При $x = 5$: $6 - 9x \neq 9x^2$. Не подходит.

При $x = -1$: $6 - 9x \neq 9x^2$. Не подходит. Значит, подходит только

1-е 3 ответа.

Ответ: $\begin{cases} x = 1 \\ x = 1 + \sqrt{5} \\ x = 1 - \sqrt{5} \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

$$|x-2y| \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y \leq 2 \\ x-2y \geq -2. \end{cases}$$

$$|2x-y| \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y \leq 1 \\ 2x-y \geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x-2y| \leq 2 \\ |2x-y| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y \leq 2 & (1) \\ x-2y \geq -2 & (2) \\ 2x-y \leq 1 & (3) \\ 2x-y \geq -1 & (4) \end{cases}$$

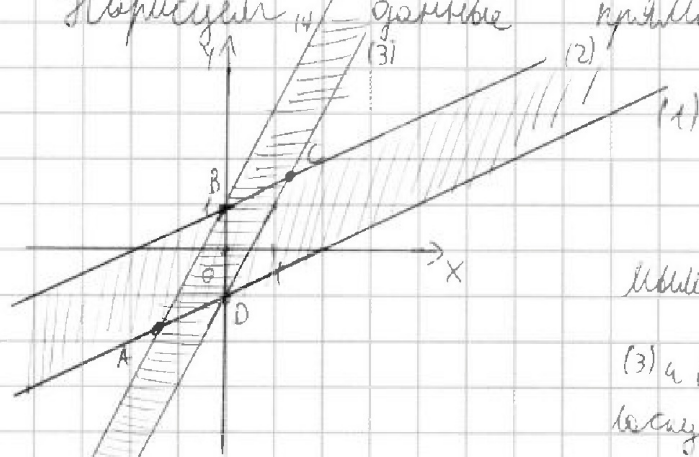
$$(1) \quad x-2y \leq 2 \Leftrightarrow y \geq \frac{x}{2} - 1 \quad (\text{над прямой } y = \frac{x}{2} - 1)$$

$$(2) \quad x-2y \geq -2 \Leftrightarrow y \leq \frac{x}{2} + 1 \quad (\text{под прямой } y = \frac{x}{2} + 1)$$

$$(3) \quad 2x-y \leq 1 \Leftrightarrow y \geq 2x-1 \quad (\text{над прямой } y = 2x-1)$$

$$(4) \quad 2x-y \geq -1 \Leftrightarrow y \leq 2x+1 \quad (\text{под прямой } y = 2x+1)$$

Нарисуем данные прямые на графике:



Условия (1) и (2) ограни-

чивают полосу между пря-

мыми (1) и (2). Аналогично условия

(3) и (4) так же ограничивают по-

лосу между прямыми (3) и (4).
Видно, что область решений - параллелограмм



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ABCD. Очевидно, что в C имеет max координату по OX и max координату по $OY \Rightarrow$ максимум выражения $3y+6x$ будет достигаться в C .

Найдем координаты C . C - пересечение прямых

$$(2) \text{ и } (3): \frac{x}{2} + 1 = 2x - 1; \quad \frac{3x}{2} = 2 \Rightarrow x = \frac{4}{3}. \quad \text{Тогда, } y = \frac{8}{3} - 1 = \frac{5}{3}.$$

$$\text{Тогда } 3y + 6x = \frac{5}{3} \cdot 3 + \frac{4}{3} \cdot 6 = 5 + 8 = 13.$$

Ответ: 13.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.

$$A = n^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = (m+2n)^2 - 7(m+2n) = (m+2n)(m+2n-7).$$

$$B = m^2n + 2mn^2 + 9mn = mn(m+2n+9). \text{ Рассмотрим случаи:}$$

1) $(m+2n)(m+2n-7) = 11p^2$. Есть несколько случаев

1.1) $m+2n=1$; $m+2n-7=11p^2$ невозможно, т.к. m, n — натуральные

Или $\Rightarrow m+2n \geq 3$.

1.2) $m+2n=11$; $m+2n-7=11p^2$. Тогда, $(m+2n-7)=11-7=4 \Rightarrow p^2=4 \Rightarrow$

$p=2$. Тогда $B = 75q^2 = mn(m+2n+9) = 20mn$; $75q^2 = 20mn$

$15q^2 = 4mn$. Т.к. $15q^2 : 4$ и $15 \nmid 4$, то $q^2 : 4 \Rightarrow q=2$.

Тогда, $15 \cdot 4 = 4mn \Rightarrow 15 = mn$. Тогда случаи: $m=1$; $n=15$ не

подходит, т.к. $m+2n \neq 11$; $m=3$; $n=5$ не подходит, т.к. $m+2n \neq 11$;

$m=5$; $n=3$ (подходит); $m=15$; $n=1$ не подходит, т.к. $m+2n \neq 11$.

Значит, в этом случае подходит вариант $m=5$; $n=3$.

1.3) $m+2n=11p$; $m+2n-7=p$. Тогда, $(m+2n, m+2n-7) = p$.

То, очевидно, что $7 : (m+2n, m+2n-7) \Rightarrow p=7 \Rightarrow m+2n-7=p=7 \Rightarrow m+2n=14$.

То, то, $14 \nmid 11$. Не подходит.

1.4) $m+2n=p$; $m+2n-7=11p$. Очевидно, $m+2n > m+2n-7$, то

$p < 11p$. Тогда $\Rightarrow$ случай не подходит.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1.5) $m+2n=p^2$; $m+2n-7=11$. Но тогда $m+2n=7+11=18$, но $18 \neq p^2$ для $p \in \mathbb{N}$. $\therefore$ Не подходит.

1.6) $m+2n=11p^2$; $m+2n-7=1$. Но тогда $m+2n=7+1=8$, но $8 \neq 11p^2$.
 $\therefore$ Не подходит.

2) $mn(m+2n+9)=11p^2$.

2.1) $m=1$. Тогда $n(2n+10)=11p^2$. Заметим, что $2n+10:2 \Rightarrow 11p^2:2 \Rightarrow p=2$. Тогда $n(2n+10)=44$.

$n(n+5)=22 \Leftrightarrow n^2+5n-22=0$. $D=25+4 \cdot 22=25+88=113$ — не точный квадрат $\Rightarrow$ уравнение не имеет натуральных решений.

2.2) $n=1$. Тогда $m(m+11)=11p^2$. Но тогда $m \equiv m+11 \pmod{11}$, и или $m:11$ или $m+11:11 \Rightarrow$ и $m:11$ и $m+11:11 \Rightarrow p=11$.

Тогда $m(m+11)=11^3$, но такое не можем найти, т.к.

m и $m+11$ разной чётности $\Rightarrow m(m+11) \not\equiv 2$. $\therefore$ Не подходит.

2.3) $m \neq 1$; $n \neq 1$. В этом случае очевидно, что среди чисел $m, n, m+2n+9$ одно равно 1, а другие равны p .
Если $m+2n+9=11 \Rightarrow m+2n=2$, т.к. $m+2n \geq 3$. Иначе, $m+2n+9=p$
и или $m=p$ или $n=p$. Но в $m+2n+9 > m$ и $m+2n+9 > n$. $\therefore$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда, эти случаи не подходят. Мы рассмотрели все случаи и нашли только одну подходящую пару $m=5; n=9$.

Ответ: $m=5, n=9$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

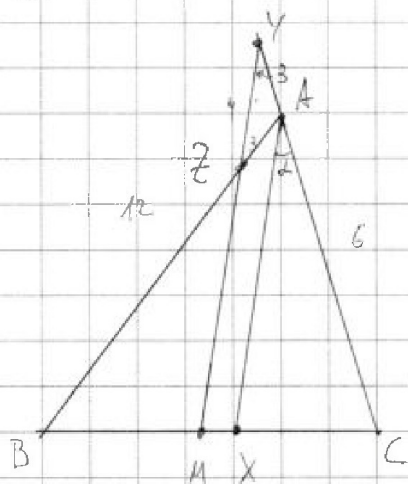
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4.



Пусть $\angle BAC = 2\alpha$. Тогда,

$\angle BAX = \angle XAC = \alpha$. $AX \parallel AY \Rightarrow$

$\angle ZYA = \angle XAC = \alpha$. Тогда же,

$\angle YZA = \angle ZAX = \alpha$ из параллельности.

$\Rightarrow \angle ZYA = \angle YZA = \alpha \Rightarrow AY = AZ = 3$.

Пусть $BC = a$; $AB = c$; $AC = b$.

Тогда, $BX = \frac{ac}{b+c}$; $CX = \frac{ab}{b+c}$. $MZ \parallel AX \Rightarrow$ по т. Делеса

$$\frac{BM}{BX} = \frac{BZ}{BA} \Leftrightarrow \frac{\frac{a}{2}}{\frac{ac}{b+c}} = \frac{c-3}{c} \Leftrightarrow \frac{a(b+c)}{2ac} = \frac{c-3}{c} \Leftrightarrow \frac{b+c}{2} = c-3$$

$\Rightarrow b+c = 2c-6 \Rightarrow c = b+6 = 12 = AB$. По т. косинусов для

$\triangle YAZ$: $YZ^2 = AY^2 + AZ^2 - 2 \cos(180-2\alpha) \cdot AY \cdot AZ \Rightarrow$

$$16 = 9+9 - 2 \cos(2\alpha) \cdot 9 \Rightarrow -2 = 2 \cos(2\alpha) \cdot 9 \Rightarrow \cos 2\alpha = -\frac{1}{9}$$

по т. косинусов для $\triangle ABC$: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cos 2\alpha \cdot AB \cdot AC$

$$\Rightarrow BC^2 = 144 + 36 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) \cdot 12 \cdot 6 = 180 + \frac{2 \cdot 12 \cdot 6}{9} = 180 + 2 \cdot 4 \cdot 2 = 196 = 14^2$$

$\Rightarrow BC = 14$.

Ответ: $BC = 14$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{4+5x-x^2}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{4+5x-x^2} \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y \end{cases} \Leftrightarrow x^3 + 3x + \sqrt{2x} = y^3 + 3y + \sqrt{2y}$$

Из 2-ого уравнения понимаем, что $x \geq 0$; $y \geq 0$.

Заметим, что функция $f(x) = x^3 + 3x + \sqrt{2x}$ монотонно возрастает на промежутке $[0; +\infty)$. А значит, чтобы выполнялось равенство $f(x) = f(y)$ необходимо и достаточно, чтобы $x = y$. Тогда 1-ое уравнение приобретает вид:

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{4+5x-x^2}. \quad \text{Тогда, } x \leq 7.$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{(7-x)(x+2)}$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 9 = 2\sqrt{(7-x)(x+2)} + 2.$$

$$9 - 2\sqrt{(7-x)(x+2)} = 2 + \sqrt{7-x} - \sqrt{x+2}.$$

$$(\sqrt{7-x} - \sqrt{x+2})^2 = 2 + (\sqrt{7-x} - \sqrt{x+2}). \quad \text{Пусть } a = \sqrt{7-x} - \sqrt{x+2}.$$

$$\text{Тогда, } a^2 = a + 2 \Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow (a-2)(a+1) = 0.$$

$$1) \ a = 2. \quad \text{Тогда } \sqrt{7-x} - \sqrt{x+2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{7-x} = 2 + \sqrt{x+2}.$$

~~Заметим, что $\sqrt{7} < 2 + \sqrt{2}$, так как $x \geq 0$~~ Заметим, что $\sqrt{7} < 2 + \sqrt{2}$, так как $x \geq 0$.

$$7 < 6 + 4\sqrt{2} \Leftrightarrow 1 < 4\sqrt{2}, \text{ а это правда. Тогда, } \sqrt{7-x} < \sqrt{7} < 2 + \sqrt{x+2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} \leq 2 + \sqrt{2+x} \Rightarrow \sqrt{2-x} < 2 + \sqrt{2+x} \quad \text{Значит, этот}$$

случай не подходит.

невозможно!
при $x+2 < 1$
 $x \geq -1$

$$2) \theta = -1: \sqrt{2-x} - \sqrt{x+2} = -1. \text{ Тогда } \sqrt{2-x} = \sqrt{x+2} - 1.$$

$$\text{Тогда, } 2-x = x+2+1-2\sqrt{x+2}. \quad 2\sqrt{x+2} = 2x-4 \quad (\text{тогда } x \geq 2).$$

$$\sqrt{x+2} = x-2, \text{ тогда } x+2 = x^2-4x+4 \Rightarrow x^2-5x+2=0. \quad D=25-4 \cdot 2=17.$$

$$x_1 = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$$

$$x_2 = \frac{5-\sqrt{17}}{2}$$

тотальный корень. Очевидно, что $x_1 > 0$; $x_2 > 2$, докажем,

$$\text{что } x_1 \leq 7 \Leftrightarrow \frac{5+\sqrt{17}}{2} \leq 7 \Leftrightarrow 5+\sqrt{17} \leq 14 \Leftrightarrow \sqrt{17} \leq 9, \text{ это правда!}$$

Значит, x_1 подходит.

$$\text{Тогда, } y = x = \frac{5+\sqrt{17}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} X = \frac{5+\sqrt{17}}{2} \\ Y = \frac{5+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$



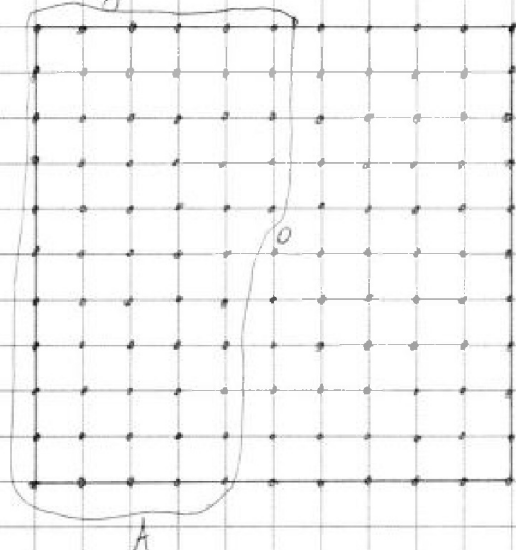
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6.



Всего узлов отмечено 121. Всего узлов отмечено

$(10+1)(10+1)=121$ узлов. Всего спосо-

бов выбрать пару различных узлов

$- C_{121}^2 = \frac{121 \cdot 120}{2} = 121 \cdot 60$ * способов

= 7260 способов. Отметим

центр квадрата O. Тогда, кол-во способов выбрать

пару узлов, центрально симметричную относи-

тельно O - $\frac{121-1}{2} = 60$ узлов. (т.к. один из узлов

точно содержится в множестве A, а 2-ой узел

восстанавливается однозначно.) Если поворачивать

вокруг и. O пару узлов, центрально симметричную

O 4 раза, то получаем 2 пары ~~разных~~ одинаковых

способов. $\Rightarrow$ Итого кол-во способов выбрать це-

нтрально симметричную пару - 30 способов. ($\frac{60}{2}=30$)

Если не брать 4 раза не симметричную центрально

пару 4 раза, то получим 4 разные расстановки $\Rightarrow$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

нужное кол-во способов выбрать не симметричную
генеральную карту: $\frac{(7260-60)}{4} = \frac{7200}{4} = 1800$. Значит, общее

кол-во нужных нам способов - $1800 + 30 = 1830$.

Ответ: 1830 способов.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

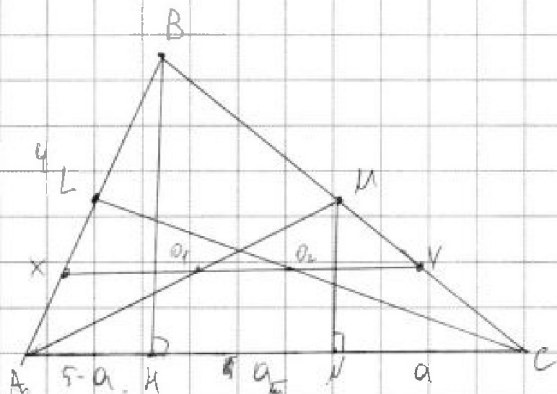


СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7.



Пусть O_1 - середина AM , O_2 - середина CL . Тогда O_1 - центр Ω , O_2 - центр ω . Очевидно, что $PQ \perp O_1O_2$. Так $PQ \parallel$

высоте $\triangle ABC$ из $m.B$, а высота из $m.B \perp AC$, то $PQ \perp AC \Rightarrow AC \parallel O_1O_2$. Пусть $O_1O_2 \cap AB = X$, $O_1O_2 \cap BC = Y$.

Так $LO_2 = O_2C$ и $XO_2 \parallel AC$, то XO_2 - средняя линия в $\triangle ALC$

$\Rightarrow AX = XL$. Аналогично, $MY = YC$. Так как $AC \parallel XY$ и $AX = XL$

и $CY = MY$, то по m . Деласа $ML \parallel AC$. Так как

M - середина AC и $ML \perp AC$, то L - середина AB

$\Rightarrow CL$ - биссектриса и высота в $\triangle ACB \Rightarrow \triangle ACB$

- равнобедренный, где $AC = BC$. Так Ω построена

на AM , как на диаметре, то $\angle AMM = 90^\circ$. Пусть

$CM = a$. BH - высота. Тогда $MM \parallel BH$ и M - середина

$BC \Rightarrow CM = MH = a$. Тогда $AM = 5 - a$. Тогда, $BC = 5 + a$.

По m . Пифагора для $\triangle AMB$: $16 = (5 - a)^2 + BH^2 \Leftrightarrow$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☐☒

СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$16 = 25 - 10a + a^2 + BH^2 \Leftrightarrow BH^2 = 10a - a^2 - 9.$$

По т. Пифагора для $\triangle BHC$:

$$(a+5)^2 = BH^2 + 4a^2 \Leftrightarrow (a+5)^2 = 10a - a^2 - 9 + 4a^2$$

$$a^2 + 10a + 25 = 10a - a^2 - 9 + 4a^2$$

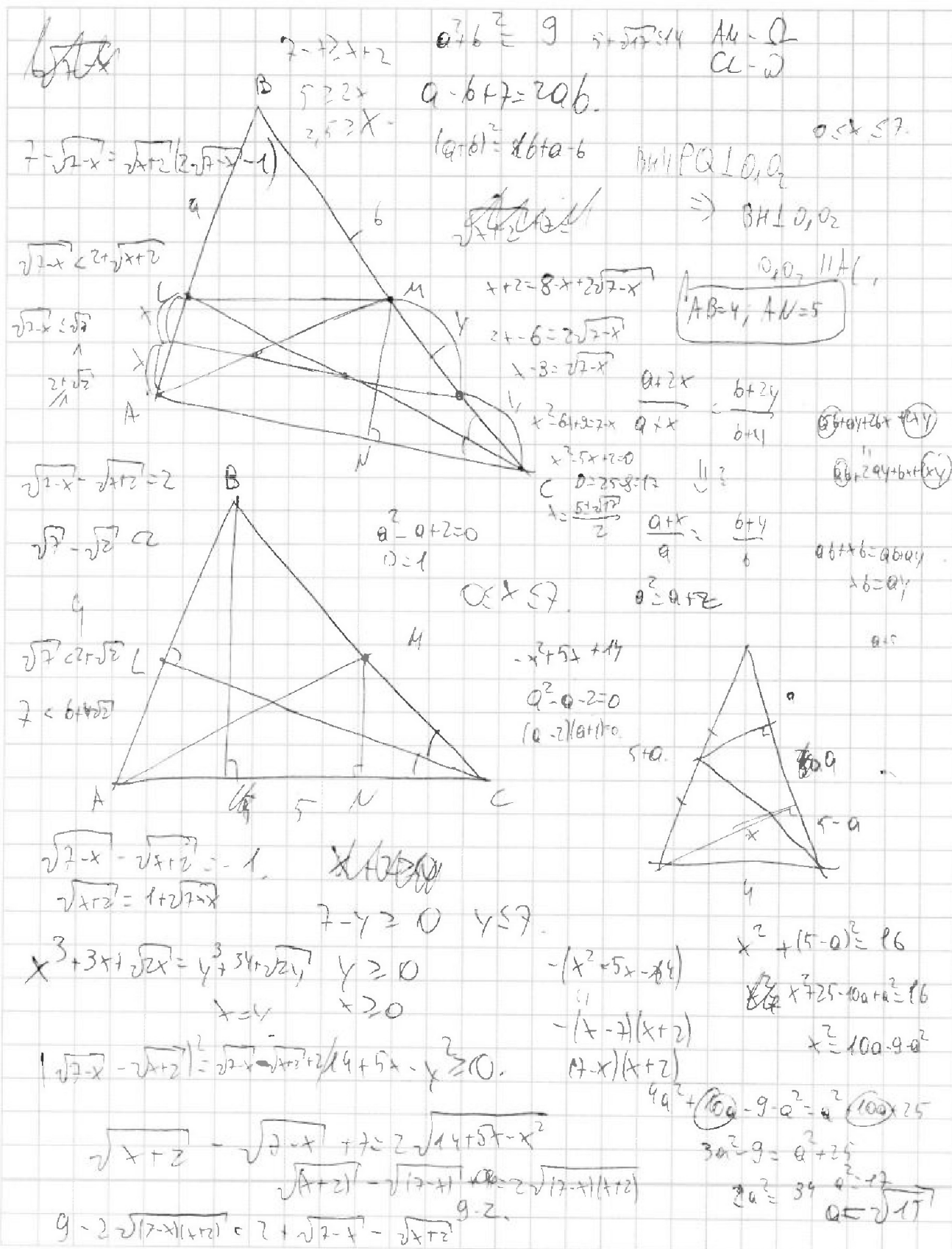
$$a^2 + 25 = -a^2 - 9 + 4a^2$$

$$a^2 + 25 = 3a^2 - 9$$

$$34 = 2a^2 \Rightarrow a = \sqrt{17}. \text{ Значит, } AC = BC = 5 + a$$

$$= 5 + \sqrt{17}.$$

$$\text{Ответ: } AC = 5 + \sqrt{17}, BC = 5 + \sqrt{17}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

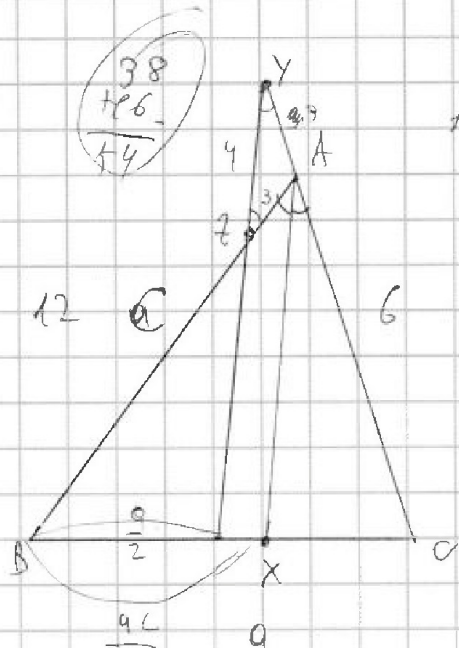
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 128 \\ 48 \\ + 16 \\ \hline 64 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 38 \\ + 16 \\ \hline 54 \end{array}$$



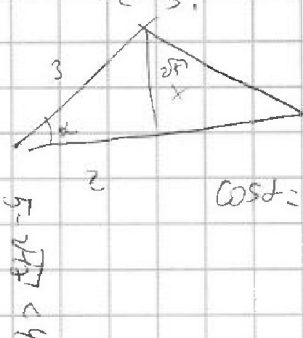
$$6 - 9x \geq 0$$

$$9x \leq 6$$

$$x \leq \frac{2}{3}$$

$$9 = 12x$$

$$x = \frac{3}{4}$$



$$\cos \alpha = \frac{2}{3}$$

$$9x^2 = 6 - 9x$$

$$9x^2 + 9x - 6 = 0$$

$$3x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$D = 9 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = 9 + 24 = 33$$

$$C + 6 = 20 - 6$$

$$C = 12$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 16 \\ \hline 56 \\ 196 \\ \hline 224 \end{array}$$

$$\frac{9C}{b+C} = \frac{9C}{C+6}$$

$$\frac{9C}{C+6} = \frac{C-3}{C}$$

$$\frac{9(C+6)}{20C} = \frac{C-3}{C}$$

$$\frac{(C+6)}{2C} = \frac{C-3}{C}$$

$$\frac{C+6}{2} = C-3$$

$$BC = \sqrt{12^2 + 6^2 - 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 \cdot 6}$$

$$\sqrt{144 + 36 - \frac{4 \cdot 12 \cdot 6}{3}} = \sqrt{180 - 96} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}$$

$$x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y$$

$$(3x)^2 = (1 + 3 - 2x)^2$$

$$9x^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2$$

$$x^4 - 4x^3 + 5x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 - 4x + 5) = 0$$

$$x^2(x - 5)(x + 1) = 0$$

$$x^3 - y^3 = 3y - \sqrt{2x} + \sqrt{2y} - 9x$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) = 3y - 3x - \sqrt{2x} + \sqrt{2y}$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) = 3y - 3x - \sqrt{2x} + \sqrt{2y}$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2 + 3) = \sqrt{2x} - \sqrt{2y}$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2 + 3) = \sqrt{2x} - \sqrt{2y} = 0$$

$$\begin{array}{r} 121 \\ \times 6 \\ \hline 7260 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$16+3+9\sqrt{5}$$

$$a+d = 19+9\sqrt{5} = 2d$$

$$d = \frac{19+9\sqrt{5}}{2}$$

$$6-9(4\sqrt{5})$$

$$-3-9\sqrt{5}$$

$$16$$

$$54+18\sqrt{5}$$

$$x^4-3x^3-2x^2+4x-x^3+3x^2+2x-4$$

$$3x^2-(x^3-2x)^2$$

$$(x^3-2x)^2-(6-9x) = 2$$

$$\frac{(3x-x^3+2x)(3x+x^3-2x)}{(x^3-2x)^2-(6-9x)} = 2$$

$$\frac{1+2\sqrt{5}}{2} \Bigg/ \frac{1-2\sqrt{5}}{2}$$

$$9x^2-(x^4-4x^3+4x^2) = 2(x^4-4x^3+4x^2+9x-6)$$

$$-x^4+4x^3+5x^2 = 2x^4-8x^3+8x^2+18x-12$$

$$3x^2-12x^3+3x^2+18x-12=0$$

$$(1+2\sqrt{5})^2 = (6+2\sqrt{5})$$

$$(6+2\sqrt{5}-2-2\sqrt{5})^2$$

$$a+3d = (6-9x) = 3(2-x)$$

$$a+5d = (x^3-2x)^2 = x^2(x-2)^2$$

$$a+9d = 9x^2$$

$$6d = 9x^2 - (6-9x) = 9x^2+9x-6$$

$$3(3x^2+3x-2)$$

$$9+3 \cdot 4 \cdot 2 = 9+24 = 33$$

$$(x^3-2x)^2 - 6+9x = x^4-4x^3+4x^2+9x-6$$

$$x^4-4x^3+4x^2+9x-6$$

$$(-x^2+5x)(x^2+x) = x^2(5-x)(x+1)$$

$$1+4+4-9-6$$

$$625-4 \cdot 125+4 \cdot 25+45-6$$

$$4+4 \cdot 4 = 30 = (2\sqrt{5})^2$$

$$\frac{2+2\sqrt{5}}{2}$$

$$-3 \quad 9$$

$$2d = x^2(x-2)^2(x-2) \cdot 3$$

$$(x-2)(x^3(x-2)+3)$$

$$2d = (x-2)(x^3+2x^2+3)$$

$$6d = 9x^2+9x-6$$

$$3(1-2)(x^3-2x^2+3) = 9x^2+9x-6$$

$$(x^3-2x)^2 - 6+9x = x^4-4x^3+4x^2+9x-6$$

$$x^4-4x^3+4x^2+9x-6$$

$$x^4-4x^3+4x^2+9x-6$$

$$1+4+4-9-6$$

$$625-4 \cdot 125+4 \cdot 25+45-6$$

$$4+4 \cdot 4 = 30 = (2\sqrt{5})^2$$

$$\frac{2+2\sqrt{5}}{2}$$

