



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{(25x-9)(x-6)}$, девятый член равен $x+3$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}, \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB перескает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $2 : 5$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 100×400 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 710$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a_4 = \sqrt{25x-9} \sqrt{x-6}$ $(75x-9)(x-6) \geq 0$ $x \in (-\infty; \frac{3}{25}] \cup (6; +\infty)$
 $a_{15} = \sqrt{\frac{20x-9}{x-6}}$ $x \in (-\infty; \frac{3}{25}] \cup (6; +\infty)$
 Таким образом: $x \in (-\infty; \frac{3}{25}] \cup (6; +\infty)$.
 Рассмотрим $x = \frac{9}{25}$: $a_4 = 0$; $a_{15} = 0$; $a_9 = \frac{9}{25} \neq 0$. Тогда
 быть не может. $x \neq \frac{9}{25}$ (или все равно в том случае,
 или не может быть равно нулю).
 $x \in (-\infty; \frac{3}{25}] \cup (6; +\infty)$
 Пусть $a_4 = b \cdot q^{n-1}$, где b - первый член прогрессии, q - знаменатель
 тогда $\frac{a_9}{a_4} = q^2 = \frac{x-3}{\sqrt{25x-9} \sqrt{x-6}}$ $x \neq 3$ $x \neq 3 \Rightarrow q^2 = \sqrt{25x-9} \sqrt{x-6} \geq 0$; $x \geq -3$.
 $\frac{a_{15}}{a_4} = q = \frac{1}{\sqrt{x-6}}$ $\frac{1}{\sqrt{x-6}} = \frac{1}{\sqrt{x-6}}$
 $q^4 = \pm \frac{1}{x-6}$ но $q^4 > 0$, поэтому $q^4 = \frac{1}{x-6}$; $q = \pm \sqrt{\frac{1}{x-6}}$.
 $\frac{a_9}{a_4} = q^2 = \frac{x-3}{\sqrt{25x-9} \sqrt{x-6}}$; $q^4 = \frac{1}{x-6}$
 Рассмотрим случаи: $x > 6$ и $x \leq 6$.
 $x > 6$:
 $(x+3)^2 \geq 25x-9$; $x^2 - 19x + 18 = 0$ $\begin{cases} x=18 \\ x=1 \end{cases}$ н.к. $x \geq 6$, но не подходит только 18.
 $x \leq 6$:
 $(x+3)^2 = -(25x-9)$; $x^2 + 31x = 0$ $\begin{cases} x=-31 \\ x=0 \end{cases}$ н.к. $x \geq -3$, но не подходит только 0.
 Значит, $\begin{cases} x=18 \\ x=0 \end{cases}$ только эти значения могут быть. Проверим на $x=18$:
 $a_4 = \sqrt{441 \cdot 12} = 42\sqrt{3}$
 $a_9 = 21$
 $a_{15} = \frac{a_1}{24\sqrt{3}}$ Имеем прогрессию $q = \pm \frac{1}{\sqrt{42}}$ и $b = \frac{a_4}{q^6}$
 $x=0$:
 $a_4 = \sqrt{9 \cdot 6} = 3\sqrt{6}$ Имеем прогрессию $q = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$ и $b = \frac{a_4}{q^6}$
 $a_9 = 3$
 $a_{15} = \sqrt{\frac{9}{63}} = \frac{3}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$
 Ответ: $\begin{cases} x=18 \\ x=0 \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{y-4x^2+2}, \\ 4y+41+4/y-5 = \sqrt{81-2^2}; \end{cases}$$

Найдём минимальное значение
 $4y+41+4/y-5$.

Рассмотрим 3 промежутка: $y \in (-\infty; -4]$; $y \in [-4; 5]$; $y \in [5; +\infty)$

$y \in (-\infty; -4]$:
 $4y+41+4/y-5 = -4-4-4y+70 = 16-5y$. С ростом y значение убывает, поэтому минимум в крайней точке $y = -4$; $\min = 16 - 5(-4) = 36$.

$y \in [-4; 5]$:
 $4y+41+4/y-5 = 4y-4y+70 = 24-3y$. С ростом y значение убывает, поэтому $y = 5$; $\min = 24 - 3 \cdot 5 = 9$.

$y \in [5; +\infty)$:
 $4y+41+4/y-5 = 4y+4y-20-5y-16$. С ростом y значение возрастает, поэтому $y = 5$; $\min = 5 \cdot 5 - 16 = 9$.

Получим образы: $4y+41+4/y-5 \geq 9$, и минимальное значение в $y=5$.

С другой стороны $\sqrt{81-2^2} \leq 9$ т.к. $2^2 > 0$, и максимальное значение в $z=0$. Поэтому подумай или равенства. Значит, $y=5$; $z=0$. Подставим эти значения в первое уравнение:

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{5-4x^2+2} = 2\sqrt{(1-x)(x+1)} \quad \begin{matrix} x+5 \geq 0 & x \in [-5; 1] \\ 1-x \geq 0 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} A-B+4=2AB \\ A^2+B^2=6 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{Пусть } \sqrt{x+5}=A, \quad A \geq 0, B \geq 0 \\ \sqrt{1-x}=B, \quad \text{Тогда } A-B+4=2AB \text{ и } A^2+B^2=6-4x+4x+2=6 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} (A-B)^2 &= 6 - (A-B) - 4 \\ (A-B)^2 + (A-B) - 2 &= 0 \\ \text{Отсюда } A-B &= 1 \\ A-B &= -2 \end{aligned}$$

подставим эти значения в первое уравнение:

$$\begin{cases} A=B+1 \\ 1+4=2B(B+1) \end{cases} \quad \begin{cases} A=B+1 \\ 2B^2+2B-5=0 \end{cases} \quad \begin{cases} A=B+1 \\ B = \frac{-1 \pm \sqrt{41}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=B-2 \\ -2+4=2B(B-2) \end{cases} \quad \begin{cases} A=B-2 \\ 2B^2-4B-2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} A=B-2 \\ B = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$x = A^2 - 5 = \left(\frac{1+\sqrt{41}}{2}\right)^2 - 5 = \frac{1+1+\sqrt{41}}{4} - 5 = \frac{\sqrt{41}-9}{2}$$

$$x = B^2 - 1 = \left(\frac{1-\sqrt{41}}{2}\right)^2 - 1 = \frac{1-1-\sqrt{41}}{4} - 1 = -\frac{\sqrt{41}+3}{4}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = \frac{\sqrt{41}}{2} - 2, y = 5, z = 0 \\ x = -\frac{\sqrt{41}}{2} - 2, y = 5, z = 0 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p \cos^3 x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

$$p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 3(p+4) \cos x = 12 \cos^2 x - 6 + 10$$

$$p(4 \cos^3 x - 12 \cos^2 x + 12 \cos x - 4) = 0$$

$$p \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 3 \cos x - 1 = 0$$

~~Решение~~ ~~Решение~~

$$(p-1) \cos^3 x + \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 3 \cos x - 1 = 0$$

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos x - 1)^3 = 0$$

$$(1-p) \cos^3 x = (\cos x - 1)^3$$

$$(1-p) = \left(\frac{\cos x - 1}{\cos x} \right)^3$$

$$1 - \frac{1}{\cos x} = \sqrt[3]{1-p}$$

$$\cos x = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{1-p}} \quad \text{н.е.} \quad -1 \leq \cos x \leq 1$$

~~Решение~~ Сделаем замену $t = \sqrt[3]{1-p}$ и выразим t

$$\begin{cases} \frac{1}{1-t} \geq -1, & \begin{cases} \frac{1+t-t}{1-t} \geq 0, & \frac{2-t}{1-t} \geq 0 \end{cases} \\ \frac{1}{1-t} \leq 1; & \begin{cases} \frac{1-1+t}{1-t} \leq 0; & \frac{t}{1-t} \leq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Таким образом $\begin{cases} t=0, \\ t \geq 2; \end{cases}$

Проведём обратную замену:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{1-p} = 0 \\ \sqrt[3]{1-p} \geq 2 \end{cases} \begin{cases} p=1 \\ 1-p \geq 8; \end{cases} \begin{cases} p \geq 1 \\ p \leq -7; \end{cases} \cos x = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{1-p}}, x = \arccos \left(\frac{1}{1 - \sqrt[3]{1-p}} \right)$$

Ответ: $\begin{cases} p=1 \\ p \leq -7; \end{cases} x = \arccos \left(\frac{1}{1 - \sqrt[3]{1-p}} \right)$

no ingranajo $\frac{AC}{AD} = \frac{BD}{DE} = \sqrt{\frac{2}{5}}$ Analo: $\sqrt{\frac{2}{5}}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Найти количество способов расстановки с симметрией относительно первой, второй линии и взаимно. Сумма этих способов будет равно как бы расстановки, где

- 1) Симметрия относительно ℓ_1 - первой горизонтальной линии
- 2) Симметрия относительно ℓ_2 - второй горизонтальной линии
- 3) Пересечения, перпендикулярные диаметры - симметрия относительно ℓ_1 и ℓ_2 .

Симметрия относительно ℓ_1 и ℓ_2 одновременно - это симметрия относительно их точки пересечения, то есть относительно центра. Значит, искомым числом будет сумма всех способов с симметрией относительно ℓ_1 , способов с симметрией относительно ℓ_2 , и вычесть способы с симметрией относительно центра (т.е. это внутреннее пересечение).

Пусть ℓ_1 параллельна стороне 400, ℓ_2 параллельна стороне 100.



Количество способов расстановки с симметрией относительно ℓ_1 - это число способов 4 точки на одной из параллельных



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

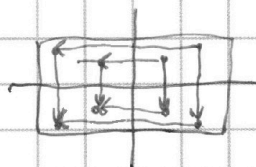
прямоугольника (м.к. Внутр и внутр по линии диагонально
защиты). Симметрично 6, равно симметрично же.

и это равно C_{20000}^4



Количество способов выбрать точки с симметрией
симметрично диагональ равно числу выборов 2 точек
на четверти прямоугольника (симметричные 2 четверти
будут ортогонально диагональ)

и это равно C_{10000}^2



Поэтому число пересечений диагоналей
равно

$$2 \cdot C_{20000}^4 - C_{10000}^2$$

$$\text{Ответ: } 2 \cdot C_{20000}^4 - C_{10000}^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a < b$$

$$b - a \neq 3$$

$$(a - c)(b - c) = p^2$$

из равенства $(a - c)(b - c) = p^2$ следует лишь следующие возможности (н.с. p - простое).

$a - c = p^2$	$a - c = -p^2$	$a - c = p$	$a - c = -p$	$a - c = 1$	$a - c = -1$
$b - c = 1$	$b - c = -1$	$b - c = p$	$b - c = -p$	$b - c = p^2$	$b - c = -p^2$

$b - a = 1 - p^2 < 0$	$b - a = p^2 - 1$	$b - a = 0$	$b - a = 0$	$b - a = p^2 - 1$	$b - a = 1 - p^2 < 0$
не подходит	$= (p - 1)(p + 1)$	0	0	не подходит	не подходит

Получаем $b - a = p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$.

Если $b - a \neq 3$, то $p - 1 \neq 3$ и $p + 1 \neq 3$. Значит, $p \not\equiv 1 \pmod{3}$, $p \not\equiv 2 \pmod{3}$.

Значит, $b - a = 3^2 - 1 = 8$.

В и для этого есть два случая. $a - c = 1$; $a - c = -1$.

либо $p \equiv 0 \pmod{3}$, $p = 3$,
либо $p = 3$ (единственное простое, делящееся на 3, $\text{div} 3$).

подставим $a = b - 8$ в равенство $a^2 + b = 710$.

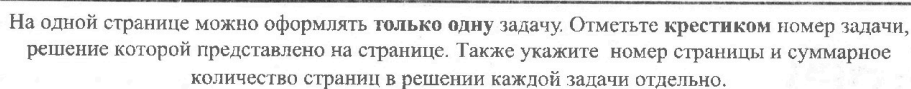
$$(b - 8)^2 + b - 710 = 0; \quad b^2 - 15b - 648 = 0; \quad (b - 34)(b + 18) = 0.$$

$$\begin{cases} b = 34 \\ b = -18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -18 \\ a = -18 - 8 = -27 \\ \begin{cases} c = a - 1 = -28 \\ c = b + 1 = -18 \end{cases} \\ b = 34 \\ a = 34 - 8 = 26 \\ \begin{cases} c = a - 1 = 25 \\ c = b + 1 = 35 \end{cases} \end{cases}$$

найдем и проверим ответ.

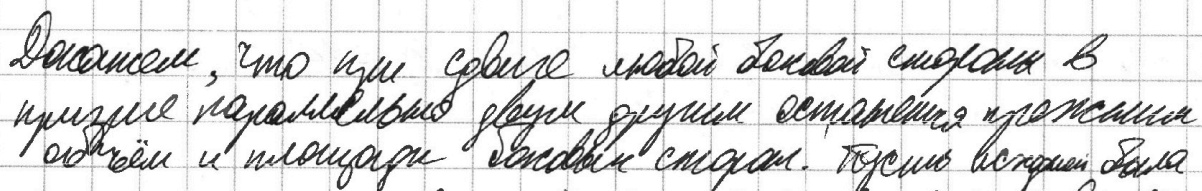
Ответ: $a = -27; b = -18; c = -28$
 $a = -27; b = -18; c = -18$
 $a = 26; b = 34; c = 25$
 $a = 26; b = 34; c = 35$.



СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Кривизна $A_1, B_2, C_3, D_4, E_5, F_6$. Отсюда
при параллельном кривизна $A_1, B_2, C_3, D_4, E_5, F_6$.
Иногда при сдвиге B_2, B_5 угадать

$H_1 C_3 H_6 C_4$ — несуществующая ввс.

А в зрешах $D_1 D_2 B_1 B_2$
 $C_3 B_2 B_1 C_4$ и т.д.
 по условию к. с.

$$\int_{\Sigma} \frac{P_1 A_6 + P_2 A_5}{2} \cdot h, \text{ а не вправо, ни}$$

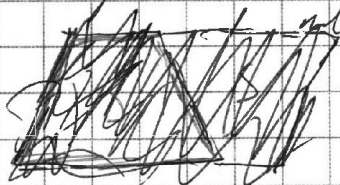
Видны рёбра не мешаются.

Данное предложение верно.

~~1. The first part of the text is a list of names and dates, which appears to be a record of some kind. The names are written in a cursive script, and the dates are written in a more formal, printed style. The list is organized into two columns, with names on the left and dates on the right.~~

$V_{\text{примесей}} = S_{\text{сечения}} \cdot \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3}$
 примесей ~~или~~ $V_{\text{неиспользуемая}}$

Длина бортам утвари не менее 2,

[illegible]

Администрация муниципального района
Калужская область



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

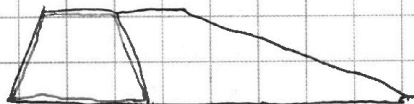
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Площадь для 2-ух сторон 3, а
третьей "уменьшилась" без самонагрузки.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

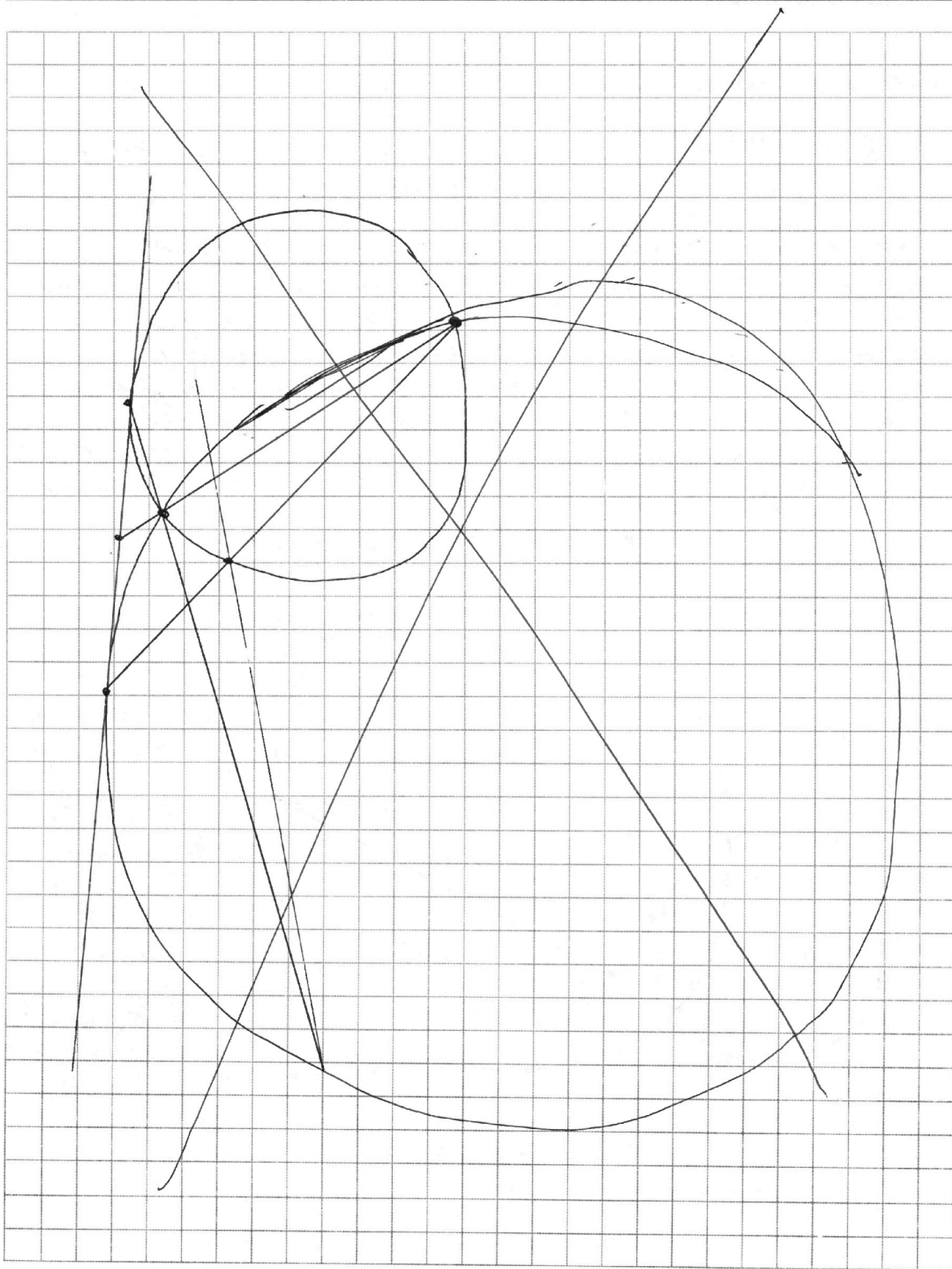
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

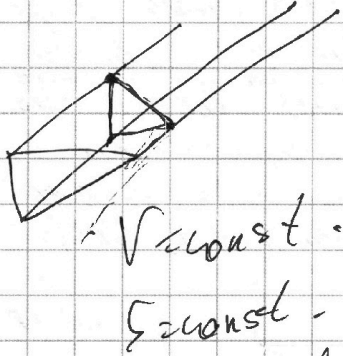
5
☐

6
☐

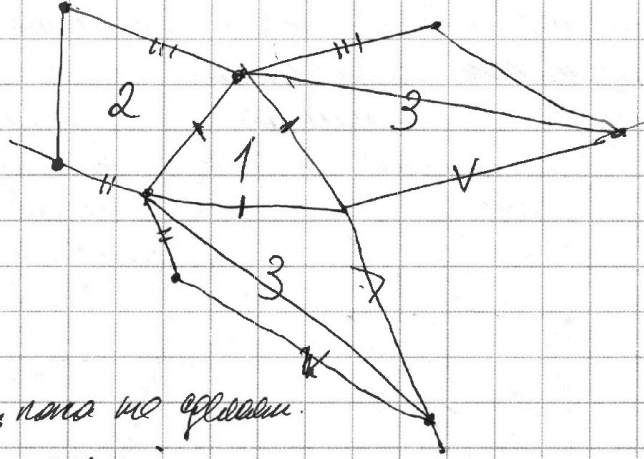
7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

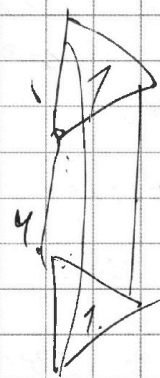
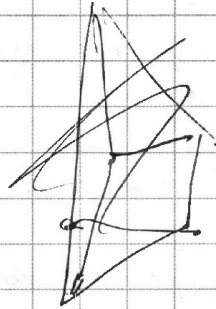


формулы, пока не будем
уточнять.



3 3 2
3 3 2
6 6 4

3 3 2
3 2 3
6 5 5





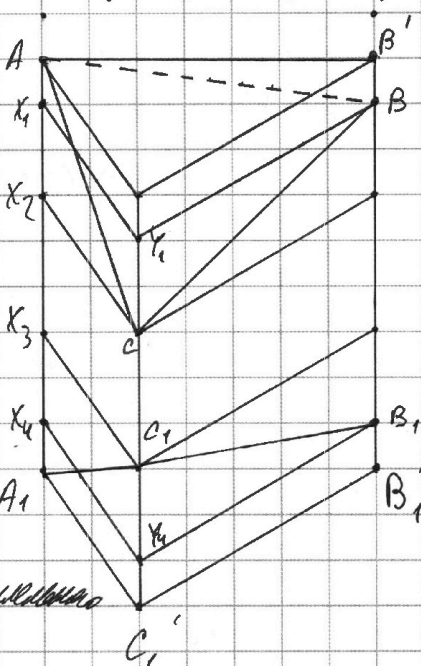
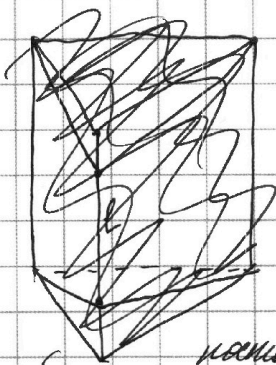
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Докажем, что мы можем свести задачу к задаче о параллельных фигурах. Пусть мы имеем тело, мы найдем то, что является его проекцией на плоскость. Пусть V_0 - объем описанной параллелепипеда. Пусть S - площадь, которую занимает фигура.



пусть исходная фигура была $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$, а описанной параллелепипедом $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$.

пусть $S_{A_1B_1C_1}$ - площадь или площадь (фигура $A_1B_1C_1$ не является),

$S_{A_1B_1C_1}$ - площадь, т.е. и не является из-за параллельности плоскости,

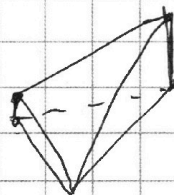
$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} h(A_1B_1C_1).$$

Аналогично $S_{B_1C_1A_1}$ не является.

$Sh_{\min}$.

Докажем сокращение объема.

$$V_{A_1B_1C_1A_2B_2C_2} = V_0 -$$



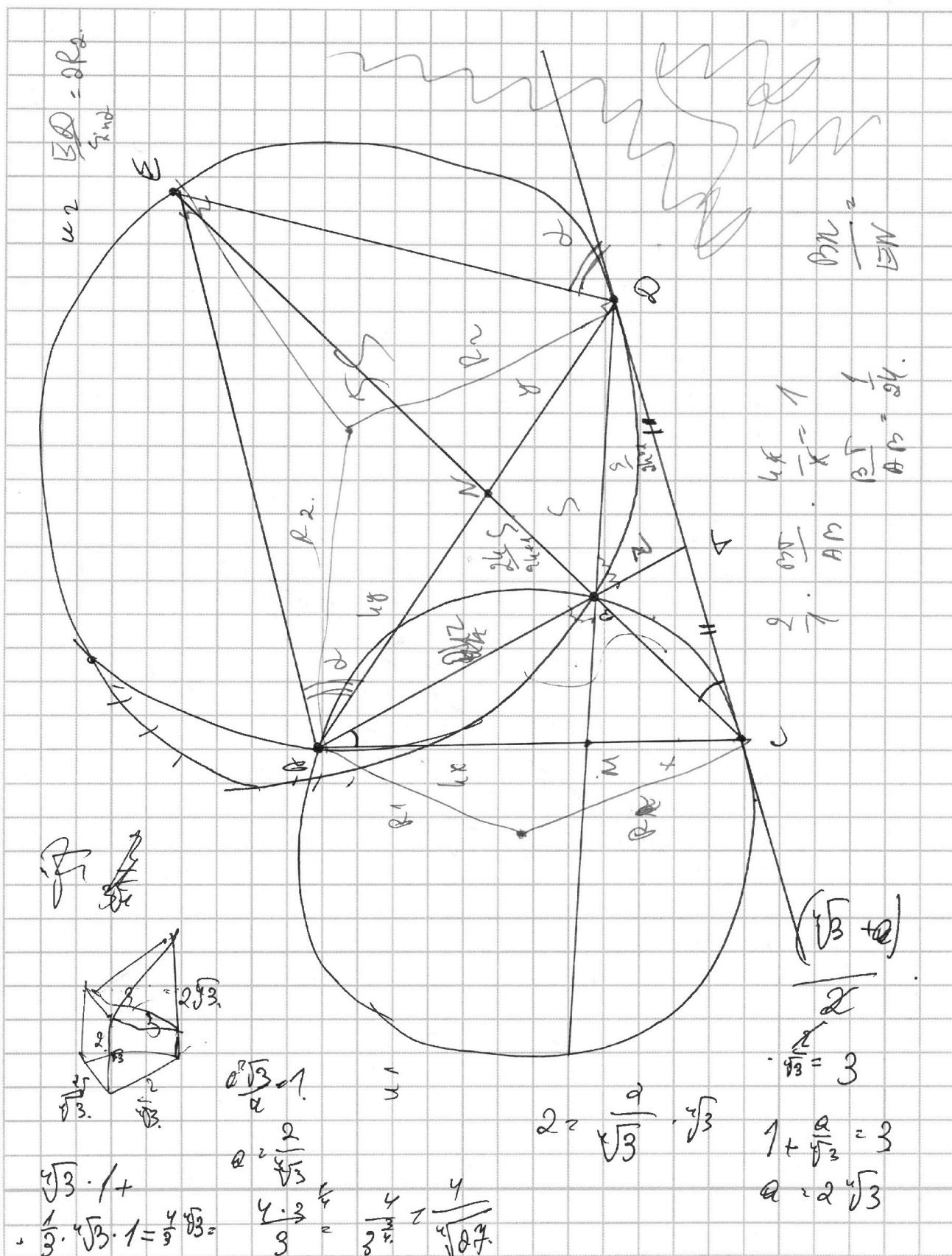


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

