



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{(25x-9)(x-6)}$, девятый член равен $x+3$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}, \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $2 : 5$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 100×400 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 710$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.

12 20



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

Пусть (b_n) - геометрическая прогрессия $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

$$b_7 = b_1 \cdot q^6 = \sqrt{25x-9}(x-6)$$

$$b_9 = b_1 \cdot q^8 = x+3$$

$$b_{15} = b_1 \cdot q^{14} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$$

ОДЗ: $\begin{cases} (25x-9)(x-6) \geq 0 \\ x-6 \neq 0 \end{cases}$ тогда выполняется $\frac{25x-9}{(x-6)^3} \geq 0$
 $x \neq 6$

$$b_7 \cdot b_{15} = b_1^2 \cdot q^{20} = \sqrt{\frac{(25x-9)^2}{(x-6)^2}} = \left| \frac{25x-9}{x-6} \right| = \frac{25x-9}{x-6}$$

$$\Rightarrow b_1 \cdot q^{10} = \sqrt{\frac{25x-9}{x-6}} = b_{11} \quad \text{но ОДЗ:}$$

≥ 0 по ОДЗ

$$b_7 \cdot b_{11} = b_1^2 \cdot q^{16} = (b_9)^2 \Rightarrow (b_9)^2 = \sqrt{(25x-9)^2} = |25x-9|$$

$$b_9 = \sqrt{25x-9}$$

при этом $b_9 = x+3 \Rightarrow \sqrt{25x-9} = x+3$

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ 25x-9 = x^2+6x+9 \end{cases}$$

$$25x-9 = x^2+6x+9$$

$$x^2-19x+18=0$$

$$\begin{cases} x=1 \text{ (+)} \\ x=18 \text{ (+)} \end{cases}$$

$$25x-9 = -x^2-6x-9$$

$$x^2+31x=0$$

$$\begin{cases} x=0 \text{ (+)} \\ x=-31 \text{ (-)} \end{cases} \text{ т.к. } x \geq -3$$

Проверка: $x=1$ $b_7=1$ $b_9=4$ $b_{15}=1/16$ $b_{11}=1/10$ $b_1=108$ $q=1/108$ $b_{15}=108 \cdot (1/108)^{14} = 108 \cdot \frac{1}{6^3 \cdot 108^3} = \frac{3}{6^3 \cdot 108^3}$ $x=18$ $b_7=18$ $b_9=21$ $b_{15}=1/108$ $b_{11}=1/10$ $b_1=108$ $q=1/108$ $b_{15}=108 \cdot (1/108)^{14} = 108 \cdot \frac{1}{6^3 \cdot 108^3} = \frac{3}{6^3 \cdot 108^3}$

Проверка: $x=0$: $b_7 = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$ $b_9 = 3$ $b_{15} = \sqrt{\frac{-9}{-216}} = \frac{3}{6\sqrt{6}}$ $q^2 = \frac{1}{16}$ $q = \pm \frac{1}{4}$ $b_1 \cdot q^6 = 3$ $b_1 \cdot \frac{1}{36} = 3 \Rightarrow b_1 = 108$ $b_{15} = 108 \cdot \frac{1}{(1/4)^{14}} = 108 \cdot \frac{1}{6^3 \cdot 108^3} = \frac{3}{6^3 \cdot 108^3}$ (+)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Проверка: $x=18$: $b_7 = \sqrt{(25-18-9) \cdot 12} = \sqrt{441 \cdot 12} = 42\sqrt{3}$
 $b_9 = 21$

$$b_{15} = \sqrt{\frac{25 \cdot 18 - 9}{12^3}} = \sqrt{\frac{441}{12^3}} = \frac{21}{24\sqrt{3}}$$

$$q^2 = \frac{b_9}{b_7} = \frac{21}{42\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \Rightarrow q = \pm \frac{1}{\sqrt{12}} ; b_1 \cdot q^8 = 21$$

$$b_1 \cdot \frac{1}{144} = 21$$

$$b_{15} = 144 \cdot 21 \cdot \frac{1}{(\sqrt{12})^{14}} = \frac{144 \cdot 21}{144 \cdot 12 \cdot \sqrt{12}} = \frac{21}{24\sqrt{3}} \quad \oplus$$

Ответ: $x=0$ и $x=18$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

Рассмотрим $|y+4| + 4/|y-5| = \sqrt{81-z^2}$
 $\sqrt{81-z^2} \leq \sqrt{81} = 9$

По опрег модуля $|x| \geq x$
 Т.к. $|y+4| \geq y+4$
 $|y-5| \geq 5-y$, то $|y+4| + 4/|y-5| \geq y+4+20-4y = 24-3y$
 Лев. часть $\geq 24-3y$; Прав. часть ≤ 9
 $\Rightarrow 24-3y \leq 9$ (случае равенство невозможно)
 $3y \geq 15$
 $y \geq 5$

Т.к. $|y+4| \geq y+4$
 $|y-5| \geq y-5$, то $|y+4| + 4/|y-5| \geq 5y+4-20 = 5y-16$

А т.к. $y \geq 5$, то $5y-16 \geq 9$, а прав. ч. ≤ 9

$\Rightarrow$ Равенство достигнуто, только если $\begin{cases} \sqrt{81-z^2} = 9 \\ 5y-16 = 9 \end{cases}$

Тогда ~~$|4+4|$~~
 $|9| + 4/|0| = \sqrt{81}$
 $9 = 9 (+)$

$\begin{cases} z=0 \\ y=5 \end{cases}$

$\Rightarrow y=5, z=0$

Первое ур-ие: $\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{5-4x-x^2}$

Обл: $\begin{cases} x+5 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \\ x^2+4x-5 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ x \leq 1 \\ x \in [-5, 1] \end{cases}$

$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{-(x^2+4x-5)}$
 $(x+5)(x-1)$
 $\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 2\sqrt{(x+5)(1-x)} = 4$
 Перейдем к следствию и сделаем проверку:

$x+5 - 2\sqrt{(x+5)(1-x)} + 1-x = 2\sqrt{(x+5)(1-x)}$
 $4\sqrt{(x+5)(1-x)} = 10$
 $\sqrt{(x+5)(1-x)} = \frac{5}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Возведем в квадрат: $x+5 - 2\sqrt{(x+5)(1-x)} + 1/x = 4(x+5)(1-x) - 16\sqrt{(x+5)(1-x)} + 6$

$$14\sqrt{(x+5)(1-x)} = 4(x+5)(1-x) + 10$$

$$3: \sqrt{(x+5)(1-x)} = t, t \geq 0$$

$$4t^2 - 14t + 10 = 0$$

$$2t^2 - 7t + 5 = 0$$

$$\begin{cases} t = 1 \\ t = 5/2 \end{cases}$$

$$\text{Всп. з.: } \begin{cases} \sqrt{(x+5)(1-x)} = 1 \\ \sqrt{(x+5)(1-x)} = 5/2 \end{cases} \begin{cases} 5 - 4x - x^2 = 1 \\ 5 - 4x - x^2 = 25/4 \end{cases}$$

$$x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$x^2 + 4x + 5/4 = 0$$

$$(x+2)^2 = 8$$

$$(x+2)^2 = 11/4$$

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{2} - 2 \leftarrow \text{не подходит} \\ x = -2\sqrt{2} - 2 \leftarrow \text{не подходит} \\ x = \frac{\sqrt{11}}{2} - 2 \leftarrow \text{не подходит} \\ x = -\frac{\sqrt{11}}{2} - 2 \leftarrow \text{не подходит} \end{cases}$$

Проверка: ① $x = 2\sqrt{2} - 2$: $\sqrt{\frac{2\sqrt{2}+3}{20}} - \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{20}} = 2\sqrt{1} \Rightarrow \text{Верно}$

(проверяем, что возводим в квадрат выражения были одного знака, а также что подкоренные ≥ 0)

② $x = -2\sqrt{2}$: $\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{20}} - \sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{20}} = 2 \cdot 1 \Rightarrow \text{Неверно}$

③ $x = \frac{\sqrt{11}}{2} - 2$: $\sqrt{\frac{\frac{\sqrt{11}}{2}+3}{20}} - \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{11}}{2}-2}{3-\frac{\sqrt{11}}{2}}} = 2 \cdot \frac{5}{2} \Rightarrow \text{Верно}$

④ $x = -\frac{\sqrt{11}}{2} - 2$: $\sqrt{\frac{-\frac{\sqrt{11}}{2}+3}{20}} - \sqrt{\frac{3+\frac{\sqrt{11}}{2}}{2}} = 2 \cdot \frac{5}{2} \Rightarrow \text{Неверно}$

Ответ: ~~два~~ $(x; y; z): (2\sqrt{2}-2; 5; 0); (\frac{\sqrt{11}}{2}-2; 5; 0)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☒3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Проверка: (проверим, что возводящие в квадрат выражения были одного знака, а также что подкоренные ≥ 0)

① $x = 2\sqrt{2} - 2$: $\sqrt{2\sqrt{2} + 3} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = 2\sqrt{1} - 4 \Rightarrow$ неверно.
 $\begin{matrix} > 0 & < 0 \end{matrix}$

② $x = -2\sqrt{2} - 2$: $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 2\sqrt{1} - 4 \Rightarrow$ подходит.
 $\begin{matrix} 3 - 2\sqrt{2} > 0, \text{ т.к. } \sqrt{2} < 1.5 \\ 3 + 2\sqrt{2} > 0 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} < 0 & < 0 \end{matrix}$

③ $x = \frac{\sqrt{11}}{2} - 2$: $\sqrt{\frac{\sqrt{11}}{2} + 3} - \sqrt{3 - \frac{\sqrt{11}}{2}} = 2 \cdot \frac{5}{2} - 4 \Rightarrow$ Верно (подходит).
 $\begin{matrix} \frac{\sqrt{11}}{2} + 3 > 0 \\ 3 - \frac{\sqrt{11}}{2} > 0, \text{ т.к. } 3 > \frac{11}{4} \end{matrix}$
 $\begin{matrix} > 0 & > 0 \end{matrix}$

④ ~~$x = -\frac{\sqrt{11}}{2} - 2$~~ : $\sqrt{-\frac{\sqrt{11}}{2} + 3} - \sqrt{3 + \frac{\sqrt{11}}{2}} = 2 \cdot \frac{5}{2} - 4 \Rightarrow$ неверно.
 $\begin{matrix} < 0 & > 0 \end{matrix}$

$\Rightarrow$ подходит: $\begin{matrix} x = -2\sqrt{2} - 2 \\ x = \frac{\sqrt{11}}{2} - 2 \end{matrix}$

Ответ: $(x, y, z): (-2\sqrt{2} - 2, 5, 0); (\frac{\sqrt{11}}{2} - 2, 5, 0)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$3: \cos x = t, \quad t \in [-1; 1]$$

$$p(4t^3 - 3t) + 3(p+4)t = 6(2t^2 - 1) + 10$$

$$4pt^3 - 3pt + 3pt + 12t - 12t^2 + 6 - 10 = 0 \quad | :4$$

$$pt^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$$

$$(p-1)t^3 + t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$$

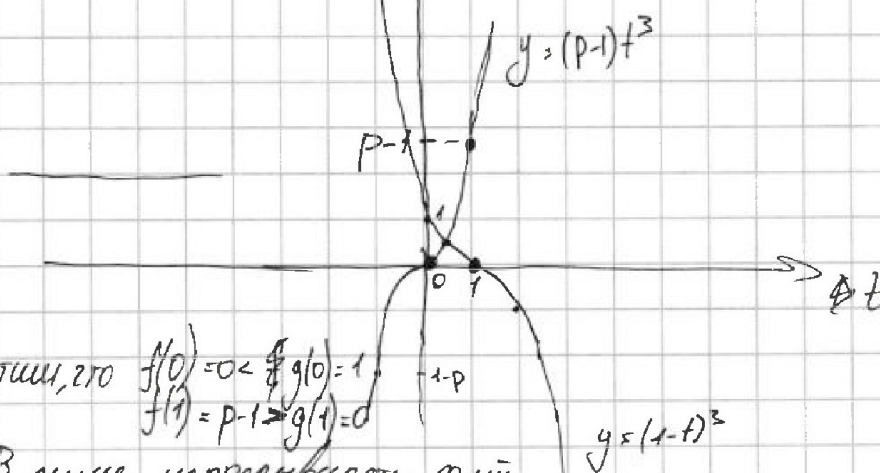
$$(p-1)t^3 + (t-1)^3 = 0$$

$$(p-1)t^3 = (1-t)^3$$

$$① \quad p=1: \quad 0 = (1-t)^3 \Rightarrow t=1$$

$$② \quad p > 1: \quad \frac{(p-1)t^3}{(1-t)^3} \neq 1 \Rightarrow \text{не более 1 корня}$$

При $p > 1$ изобразим графики функций $f(t) = (p-1)t^3$ и $g(t) = (1-t)^3$



$$\text{Заметим, что } f(0)=0 < g(0)=1, \\ f(1)=p-1 > g(1)=0$$

$\Rightarrow$ В силу непрерывности ф-ий, на отрезке $t \in (0, 1)$ найдётся точка, в которой $f(t) = g(t)$

и при таком t сп-е $\cos x = t$ будет иметь решение



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☒4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow$ при $p > 1$ ур-ие имеет хотя бы 1 решение.

Решим ур-ие
(У нас две
матрицы p).

$$(p-1)t^3 = (1-t)^3$$

или $t=0$: ~~$0=1$~~ $0=1$ $\ominus$

$\Rightarrow t \neq 0$: $(p-1)t^3 = (1-t)^3 / : t^3 \neq 0$

$$p-1 = \left(\frac{1-t}{t}\right)^3$$

$$1-p = \left(\frac{t-1}{t}\right)^3$$

$$1-p = \left(1 - \frac{1}{t}\right)^3$$

$$1 - \frac{1}{t} = \sqrt[3]{1-p}$$

$$\left(\frac{1}{t}\right) = 1 - \sqrt[3]{1-p}$$

$$t = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{1-p}}$$

$$\begin{aligned} 1 - \sqrt[3]{1-p} &\neq 0 \\ \sqrt[3]{1-p} &\neq 1 \\ p &\neq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ При любых $p \neq 0$ ур-ие имеет корень $t = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{1-p}}$

Исходная ур-ие будет иметь хотя бы 1 решение,

или $t \in [-1; 1]$, т.е. $\frac{1}{1 - \sqrt[3]{1-p}} \in [-1; 1]$

Чтобы это выполнялось: $\begin{cases} 1 - \sqrt[3]{1-p} \geq 1 \\ 1 - \sqrt[3]{1-p} \leq -1 \end{cases} \begin{cases} \sqrt[3]{1-p} \leq 0 \\ \sqrt[3]{1-p} \geq 2 \end{cases}$

$\begin{cases} 1-p \leq 0 \\ 1-p \geq 8 \end{cases} \begin{cases} p \geq 1 \\ p \leq -7 \end{cases} \Rightarrow$ ур-ие имеет хотя бы 1 реш. при $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$

Эти решения задаются так: $x = \pm \arccos\left(\frac{1}{1 - \sqrt[3]{1-p}}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: при $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$;

$x = \pm \arccos\left(\frac{1}{1 - \sqrt[3]{1-p}}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть A - способы закрасить с симметрией относ. центра.

B - способы закрасить с симметрией относ. вертик. ср. линии.

C - способы закрасить с симметрией относ. гориз. ср. линии.

Всего шток: $100 \cdot 400 = 40000$

$$\text{Тогда } n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$n(A)$: Покрыв Рядов клетки на пары клеток, обладающие симметрией относ. центра. Выбираем одну клетку из каждой пары. Тогда, выбрав 4 клетки из 20000 (т.е. всего: 40000 клеток) произвольного множества мы однозначно определим 4 парные клетки, необходимые для симметрии.

Тогда кол-во способов закрасить = кол-во способов выбрать 4 клетки из 20000: C_{20000}^4

$n(B)$: Заметим, что выбрав 4 закрас. клетки слева от вертик. ср. линии, мы однозначно определим 4 закрас. клетки справа, симметричные закрасленным. $\Rightarrow$ Нужно выбрать 4 клетки слева, т.е. $n(B) = C_{20000}^4$ (т.е. из половины шток)

$n(C)$: Аналогично B , только выбираем 4 клетки из 20000 сверху от ср. линии: $n(C) = C_{20000}^4$

Заметим, что если выполнены ~~какая-то из этих двух симметрий~~, то выполнены ~~все 3 (и наоборот)~~ (и наоборот). Действительно, если есть симметр A и B , то

$\Rightarrow$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

$$a, b, c \in \mathbb{Z}$$

$$a < b$$

$$(b-a) \nmid 3$$

$$(a-c)(b-c) = p^2, \quad p - \text{простое}$$

$$a^2 + b = 710$$

$$(a-c)(b-c) = p^2 \Rightarrow$$

$$(a-c) \text{ и } (b-c) - \text{делители } p^2$$

$$\Rightarrow \text{Все варианты: } \pm 1; \pm p; \pm p^2$$

$$(т.к. p - \text{простое})$$

$$\textcircled{1} \quad a-c=1 \quad \begin{cases} a=c+1 \\ b=c+p^2 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \quad a-c=p^2 \quad \begin{cases} a=c+p^2 \\ b=c+1 \end{cases}$$

$$\text{но } p^2 \geq 4 \Rightarrow a > b \quad \textcircled{-}$$

$$\textcircled{3} \quad a-c=-1 \quad \begin{cases} a=c-1 \\ b=c-p^2 \end{cases}$$

$$p^2 \geq 4 \Rightarrow a > b \quad \textcircled{-}$$

$$\textcircled{4} \quad a-c=-p^2 \quad \begin{cases} a=c-p^2 \\ b=c-1 \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \quad a-c=b-c=p \quad \begin{cases} a=b \\ b=b \end{cases} \quad \textcircled{-}$$

$$\textcircled{6} \quad a-c=b-c=-p \quad \begin{cases} a=b \\ b=b \end{cases} \quad \textcircled{-}$$

$$\Rightarrow \text{Либо } \begin{cases} a=c+1 \\ b=c+p^2 \end{cases} \quad (b-a) = p^2 - 1 \nmid 3$$

$$\text{Либо } \begin{cases} a=c-p^2 \\ b=c-1 \end{cases} \quad (b-a) = 1 - p^2 \nmid 3$$

$$\Rightarrow p^2 - 1 \nmid 3$$

Но по малой теореме Ферма

$$p^2 \equiv 1 \pmod{3}, \text{ если } p \not\equiv 0 \pmod{3}$$

$$(p, 3) = 1$$

$$\Rightarrow \text{Это возможно только если } (p, 3) \neq 1$$

$$\Rightarrow p \text{ имеет в разложении } 3$$

$$\text{а т.к. } p - \text{простое, то единственно возможное } p = 3$$

$$p = 3 \Rightarrow (b-a) = 8 \nmid 3$$

$$b = a + 8$$

$$\text{Нам известно, что } a^2 + b = 710 \Rightarrow$$

$$a^2 + a + 8 = 710$$

$$a^2 + a - 702 = 0$$

$$\begin{cases} a = -27 \\ a = 26 \end{cases}$$

$$a^2 + (a+8)^2 = 710$$

$$2a^2 + 16a + 64 = 710$$

$$a^2 + 8a + 32 = 355$$

$$a^2 + 8a - 323 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если $a = -27$, то $b = -27 + 8 = -19$

и либо $c = a - 1 = -28$
либо $c = a + p^2 = -27 + 9 = -18$

Если $a = 26$, то $b = 26 + 8 = 34$

и либо $c = a - 1 = 25$
либо $c = a + p^2 = 26 + 9 = 35$

Ответ: $(-27; -19; -28); (-27; -19; -18);$
 $(26; 34; 25); (26; 34; 35)$

(для каждой из пар (a, b) могу взять либо такое c , что $(a-c)=1$
 $(b-c)=p^2=9$ либо такое c , что $(a-c)=-p^2=-9$
 $(b-c)=-1$, чтобы условия на $(b-c)(b-c)$ выполнялись, при этом остальные условия будут выполнены из-за того, как мы выбрали a и b .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

9

$$y=5 | z=0$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{5-4x-x^2}$$

$$|9| + 4|0| = 9 \quad (+)$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} = 2\sqrt{5-4x-x^2} - 4$$

$$① \quad x = 2\sqrt{2} - 2: \quad \sqrt{2\sqrt{2}+3} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} = 2\sqrt{(2\sqrt{2}+3)(3-2\sqrt{2})} - 4$$

$$\sqrt{2\sqrt{2}+3} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} = 2$$

$$2\sqrt{2}+3 \quad 3+2\sqrt{2}+2\sqrt{1}$$

$$2\sqrt{2}+3 - 2\sqrt{(3-2\sqrt{2})(2\sqrt{2}+3)} + 3-2\sqrt{2} = 2-4$$

$$\frac{6-2 \cdot 1}{4}$$

$$x = 2\sqrt{2} - 2$$

$$\sqrt{2\sqrt{2}+3} - \sqrt{3+2\sqrt{2}} + 4 = 2\sqrt{1}$$

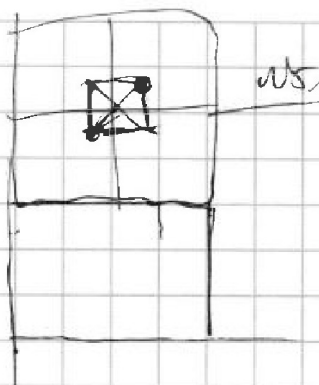


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

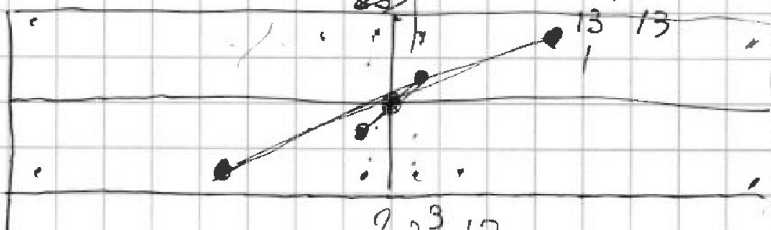


us

a^2

$$\begin{array}{r} 702 \div 2 \\ 351 \div 3 \\ 117 \div 3 \\ 39 \div 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 702 \div 2 \\ 351 \div 3 \\ 117 \div 3 \\ 39 \div 3 \end{array}$$

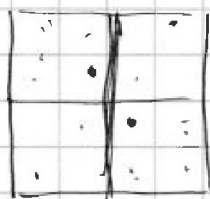


$$(a+27)(a-26) = a^2 + a - 702$$

$$100 \cdot 400 = 40000$$

$$C_{10000}^4 + C_{20000}^4 + C_{30000}^4 - C_{10000}^2 - C_{20000}^2 - C_{30000}^2 + C_{10000}^2$$

$$= 3 \cdot C_{20000}^4 - 2 \cdot C_{10000}^2$$



$$C_{10000}^4 + C_{20000}^4$$

us

$$a^{p-1} = 1$$

$$a^2 = 1$$

$$\begin{aligned} a < b \\ (b-a) \div 3 \\ (a-c) \div (b-c) = p^2 \\ a^2 + b = 710 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a-c &= 1; b-c = p^2 \\ \textcircled{1} a &= c+1; b = c+p^2 \quad \oplus, \text{ r.k.} \\ \textcircled{2} a-c &= p^2; b-c = 1 \\ a &= c+p^2; b = c+1 \quad \ominus \\ \textcircled{3} a-c &= -1; b-c = -p^2 \\ a &= c-1; b = c-p^2 \quad \ominus \\ \textcircled{4} a-c &= -p^2; b-c = -1 \\ a &= c-p^2; b = c-1 \quad \oplus \\ \textcircled{5} a-c &= b-c = p \\ a &= c+p; b = c+p \quad \ominus \quad a=b \\ \textcircled{6} a-c &= b-c = -p \\ a &= c-p; b = c-p \quad \ominus \quad a=b \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. $\&$ $7a_1: b_1 \cdot q^6$ $15a_1: b_1 \cdot q^{14}$

$9a_1: b_1 \cdot q^8$

$x+3 \geq 0: x \geq -3$

$\frac{x+3}{\sqrt{(25x-9)(x-6)}} = q^2$

$b_1^2 \cdot q^{20} = \sqrt{\frac{(25x-9)^2}{(x-6)^2}}$
 $= \frac{25x-9}{x-6}$

$\sqrt{\frac{25x-9}{x-6}} \cdot \sqrt{(25x-9)(x-6)} = x+3$

$b_1 \cdot q^{10} = \sqrt{\frac{25x-9}{x-6}}$

$|25x-9| = x+3$

$b_1 \cdot q^6 = 3\sqrt{6}$
 $b_1 \cdot q^8 = 3$

$\Rightarrow q^2 = \frac{1}{\sqrt{6}}; q = \frac{1}{\sqrt[4]{6}}$

$b_1 \cdot \frac{1}{36} = 3 \Rightarrow b_1 = 108$

$b_1 \cdot q^{14} = 108 \cdot \frac{1}{6^3 \cdot \sqrt{6}} = \frac{3}{6\sqrt{6}} =$

$\begin{array}{r} 25 \\ \times 18 \\ \hline 200 \\ + 25 \\ \hline 450 \end{array}$

$676 + 94 = 770$

- ① $b-a = 8 \cdot 12; 1 \cdot 9 = 9$ ①
- ② $b-a = 8 \cdot 13; -1 \cdot (-9) = 9$
- ③ $b-a = 8 \cdot 13$

2.

$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}$
 $\sqrt{x+5} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z} + \sqrt{1-x-4z}$

$x+5+16+8\sqrt{x+5} = \sqrt{4(y-4x-x^2+z)+1-x-4z} + 4\sqrt{(y-4x-x^2+z)(1-x-4z)}$

$x+21+8\sqrt{x+5} = 4y-16x-4x^2+4z+1-x-4z+4\sqrt{(y-4x-x^2+z)(1-x-4z)}$
 $x+21+8\sqrt{x+5} = 4y-17x-4x^2+4\sqrt{y}$

$\begin{array}{r} 29 \\ \times 22 \\ \hline 189 \\ + 54 \\ \hline 229 \end{array}$

$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ + 52 \\ \hline 676 \end{array}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p > 1:$$

$$y+4 \geq 6+y$$
$$|y-5| \geq 5-y$$

$$y+4+20-4y \leq 24-3y$$

$$4.7 \geq 24-3y$$
$$np. r. \leq 9$$

$$8y \geq 15$$

$$y \geq 1.875$$

$$p > 1 \oplus$$
$$p \neq 1 \oplus$$

$$(p-1)^3$$
$$(1-t)^3$$

$$y+4 \geq y+4$$
$$y-5 \geq y-5$$

$$y+4+4y-20 \geq 5y-16$$

$$N \leq 196 - \frac{184}{4 \cdot 44} \approx 12$$

$$\frac{(a+1)^2}{4a^2+a+1} + a^2 \leq 6$$

$$g(-1) = 8$$
$$f(-1) \geq 8$$

$$1-p \geq 8$$
$$p \leq -7$$

$$2. \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{5-4x-x^2}$$
$$\sqrt{x+5} \leq 9$$
$$\sqrt{1-x} \leq 6$$

$$a^2 + b^2 = 6$$

$$a - b + 4 = 2ab$$
$$a^2 \leq 2$$
$$a = \sqrt{2}$$

$$(1-x)(x+5) = (5-4x-x^2)$$
$$\begin{cases} 2ab + b = a + 4 \\ a^2 + b^2 = 6 \end{cases}$$

$$b(2a+1) = a+4 \Rightarrow b = \frac{a+4}{2a+1} = \frac{2a+1-a+3}{2a+1}$$
$$= \frac{a+4}{2a+1}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3. \quad p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6(\cos^2 x - 1) + 10.$$

$$\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x =$$

$$= 2\cos^2 x - \cos x - 2\sin^2 x \cos x =$$

$$= 2\cos^2 x + \cos x - \frac{(1-\cos^2 x)}{2(\cos x - \cos^3 x)} - 2\cos x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$p(4\cos^3 x - 3\cos x) + 3(p+4)\cos x = 6(\cos^2 x - 1) + 10$$

$$3. \quad \cos x = t.$$

$$p(4t^3 - 3t) + 3(p+4)t = 12t^2 - 6 + 10.$$

$$4pt^3 - 3pt + 3pt + 12t = 12t^2 - 4 \Rightarrow 4pt^3 - 12t^2 + 12t - 4 = 0$$

$$4pt^3 - 12t^2 + 12t - 4 = 0 \quad | :4$$

$$pt^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0.$$

$$(p-1)t^3 + (t-1)^3 = 0.$$

$$(p-1)t^3 = (1-t)^3$$

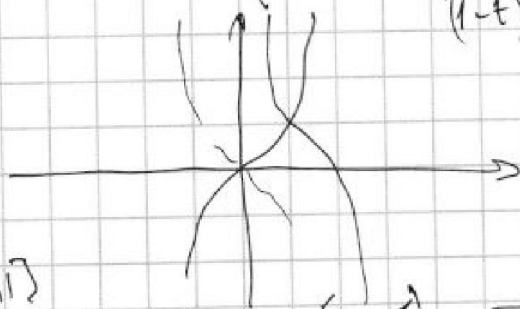
$$\text{1) } p=1: \quad 0 = (1-t)^3$$

$$\text{2) } p \neq 1: \quad \frac{(p-1)t^3}{(1-t)^3} = 1$$

$$0 = (1-t)^3$$

$$\Rightarrow \leq 1 \text{ реальн. корень}$$

$$t \in [-1; 1]$$



$$p \leq 2: \quad 1^3 \geq (1-t)^3$$

$$(p-1)t^3 = (1-t)^3 \quad | : t^3 \neq 0$$

$$\left(\frac{1-t}{t}\right)^3 = p-1$$

$$\frac{1-t}{t} = \sqrt[3]{p-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1-t}{t} = \sqrt[3]{p-1}$$

$$\frac{1-t}{t} = \sqrt[3]{p-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1-t}{t} = \sqrt[3]{p-1}$$

$$t \in [-1; 1]$$

$$\begin{cases} 1 - \sqrt[3]{1-p} \geq 1 \\ 1 - \sqrt[3]{1-p} \leq -1 \\ \sqrt[3]{1-p} \leq 0 \\ \sqrt[3]{1-p} \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1-p \leq 0 \\ p \geq 1 \\ 1-p \geq 8 \\ p \leq -7 \end{cases}$$

$$\left(1 - \frac{1}{t}\right) = \sqrt[3]{1-p} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{t} = 1 - \sqrt[3]{1-p}$$

$$\frac{1-t}{t} = \sqrt[3]{p-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1-t}{t} = \sqrt[3]{p-1}$$

$$\frac{1-t}{t} = \sqrt[3]{p-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1-t}{t} = \sqrt[3]{p-1}$$