



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен $\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}$, двенадцатый член равен $2 - x$, а восемнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:
- $a < b$,
 - число $b - a$ не кратно 3,
 - число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
 - выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть b - первый член прогрессии, q - её разность $\Rightarrow$

$$bq^9 = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \quad \text{— десятый член} \quad (1)$$

$$bq^{11} = 2-x \quad \text{— двенадцатый член} \quad (2)$$

$$bq^{12} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} \quad \text{— тринадцатый член} \quad (3)$$

Условие, при котором все члены существуют:

$$\frac{25x+34}{(3x+2)^3} \geq 0 \Rightarrow$$



$$x \in (-\infty, -\frac{34}{25}] \cup (-\frac{2}{3}, +\infty) \quad (*)$$

$$\frac{(3)}{(1)} : q^8 = \frac{\sqrt{25x+34}}{(3x+2)^3 \cdot \sqrt{(25x+34)(3x+2)}} = \sqrt{\frac{1}{(3x+2)^4}}$$

Т.к. $q^8 > 0$, то:

$$q^8 = \frac{1}{(3x+2)^2} \quad (4)$$

$$\frac{(2)}{(1)} : q^2 = \frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}} \quad \wedge (*)$$

$$q^8 = \frac{(2-x)^4}{(25x+34)^2 (3x+2)^4} \quad \text{— с учетом (4):}$$

$$\frac{1}{(3x+2)^2} = \frac{(2-x)^4}{(25x+34)^2 (3x+2)^4} \cdot | \cdot (3x+2)^2 \neq 0$$

$$1 = \frac{(2-x)^4}{(25x+34)^2} \Rightarrow$$

$$(2-x)^4 = (25x+34)^2 \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (2-x)^2 = 25x+34 \\ (2-x)^2 = -25x-34 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-4x+4 = 25x+34 \\ x^2-4x+4 = -25x-34 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 29x - 30 = 0 \\ x^2 + 21x + 38 = 0 \end{cases}$$

По теореме Виета находим корни:

$$\begin{cases} x = 30 \\ x = -1 \\ x = -19 \\ x = -2 \end{cases}$$

$x = -1$ - не удовлетворяет условию (*)

$x = 30$: Т.к. $bq^3 > 0$, $q^2 > 0$ то $bq'' > 0$.

но при $x = 30$: $bq'' = 2 - 30 = -28 \Rightarrow$

$x = 30$ - не удовлетворяет.

при $x = -2$: $bq'' = 2 - x = 0$. При этом $\Rightarrow$

в таком случае и bq^3 , и bq^{12} должны равняться 0, но: $bq^3 = \sqrt{(-50+34)(-6+2)} =$

$$\text{при } x = -2: bq^3 = \sqrt{(-50+34)(-6+2)} = \sqrt{16 \cdot 4} = 8$$

$$bq'' = 4; bq^{12} = \sqrt{\frac{-16}{-64}} = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{bq''}{bq^3} = q^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow q = \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

$$\frac{bq^{12}}{bq^3} = q^6 = \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^6 \text{ - удовлетворяет.}$$

$$\text{при } x = -19: bq^3 = \sqrt{(-475+34)(-55)} = 21\sqrt{55}.$$

$$bq'' = 2+19 = 21; bq^{12} = \sqrt{\frac{-441}{(-55)^3}} = 21 \cdot \sqrt{\frac{1}{55^3}}$$

$$\frac{bq''}{bq^3} = q^2 = \frac{21}{21\sqrt{55}} = \frac{1}{\sqrt{55}}; \frac{bq^{12}}{bq^3} = q^6 = \left(\frac{1}{\sqrt{55}}\right)^3 = \left(q^2\right)^3 -$$

Ответ: $x = -2$; $x = -19$.

удовлетворяет



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + z = 2\sqrt{y-3x-x^2+z} \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} \end{cases}$$

Исследуем второе уравнение:

$$400 - z^2 \geq 0, \Rightarrow z \in [-20; 20].$$

Максимальное значение $\sqrt{400-z^2}$ достигается при минимальном z^2 , т.е. при $z=0$

$$\Rightarrow \sqrt{400-z^2} \leq 20$$

Пусть $k = |y+2| + 2|y-18|$

1) $y \leq -2$: $k = -y-2-2y+36$ при $y=-2$
 $k = -3y+34 \Rightarrow k \in [40; +\infty)$

2) $-2 \leq y \leq 18$: $k = y+2-2y+36$ при $y=18$
 $k = 34-y+36 \Rightarrow k \in [20; 40]$

3) $y \geq 18$: $k = y+2+2y-36$ при $y=-2$
 $k = 3y-34 \Rightarrow k \in [20; +\infty)$ при $y=18$

Таким образом, минимальное значение $k=20$.

$$\Rightarrow |y+2| + 2|y-18| \geq 20$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |y+2| + 2|y-18| \geq 20 \\ \sqrt{400-z^2} \leq 20 \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |y+2| + 2|y-18| = 20 \\ \sqrt{400-z^2} = 20 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 18 \\ z = 0 \end{cases} \text{ - с учетом этого первое уравнение системы имеет вид:}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2 \cdot 0} + 2 = 2\sqrt{18-3x-x^2+0}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2}$$

Разложим $18-3x-x^2$ на множители:

$$18-3x-x^2=0 \Rightarrow x^2+3x-18=0$$

По теореме Виета: $\begin{cases} x=-6 \\ x=3 \end{cases} \Rightarrow$

$$18-3x-x^2 = -(x+6)(x-3) = (x+6)(3-x) \Rightarrow$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2 \cdot 0}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{(x+6)(3-x)}$$

$$\begin{cases} x+6 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow -6 \leq x \leq 3 \quad (*)$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} = 2\sqrt{(x+6)(3-x)} - 7 \quad |^{\wedge 2}$$

$$x+6 - 2\sqrt{(x+6)(3-x)} + 3-x = 4(x+6)(3-x) - 28\sqrt{(x+6)(3-x)} + 49$$

$$4(x+6)(3-x) - 26\sqrt{(x+6)(3-x)} + 40 = 0$$

Пусть $t = \sqrt{(x+6)(3-x)}$:

$$4t^2 - 26t + 40 = 0 \quad | : 2 \Rightarrow$$

$$2t^2 - 13t + 20 = 0$$

$$D = 169 - 4 \cdot 2 \cdot 20 = 9 \Rightarrow$$

$$t_1 = \frac{13-3}{4}$$

$$t_2 = \frac{13+3}{4}$$

$$t_1 = \frac{5}{2}$$

$$t_2 = 4$$

$$1) \sqrt{(x+6)(3-x)} = \frac{5}{2}$$

$$-x^2 - 3x + 18 = \frac{25}{4}$$

$$-x^2 - 3x + \frac{47}{4} = 0$$

$$x^2 + 3x - \frac{47}{4} = 0$$

$$D = 9 + 47 = 56$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{56}}{2}$$

$$2) \sqrt{(x+6)(3-x)} = 4$$

$$-x^2 - 3x + 18 = 16$$

$$-x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$D = 9 + 4 \cdot 2 = 17, \Rightarrow$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Оценим эти значения

$$1) \quad \frac{-3 - \sqrt{56}}{2} < \frac{-3 - 8}{2} < \frac{-3 - 7}{2} \Rightarrow \frac{-11}{2} < \frac{-3 - \sqrt{56}}{2} < -5 -$$

удовлетворяет

$$2) \quad \frac{-3 + 7}{2} < \frac{-3 + \sqrt{56}}{2} < \frac{-3 + 8}{2} \Rightarrow 2 < \frac{-3 + \sqrt{56}}{2} < \frac{5}{2} -$$

удовлетворяет (*).

$$3) \quad \frac{-3 - 5}{2} < \frac{-3 - \sqrt{12}}{2} < \frac{-3 - 4}{2} \Rightarrow -4 < \frac{-3 - \sqrt{12}}{2} < -\frac{7}{2} -$$

удовлетворяет (*).

$$4) \quad \frac{-3 + 4}{2} < \frac{-3 + \sqrt{12}}{2} < \frac{-3 + 5}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{-3 + \sqrt{12}}{2} < 1 -$$

удовлетворяет (*).

Ответ: $(x; y; z): \left(\frac{-3 - \sqrt{56}}{2}; 18; 0 \right),$

$\left(\frac{-3 + \sqrt{56}}{2}; 18; 0 \right), \left(\frac{-3 - \sqrt{12}}{2}; 18; 0 \right), \left(\frac{-3 + \sqrt{12}}{2}; 18; 0 \right)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a < b; \quad \begin{aligned} & \cancel{b-a: 3 \neq} \\ & a \not\equiv b \pmod{3} \\ & (a-c)(b-c) = p^2 \\ & a^2 + b = 1000 \end{aligned} \quad \begin{aligned} & (a-c)(b-c) = p^2 \\ \Rightarrow & \begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{r} 992 \sqrt{2} \\ 496 \sqrt{2} \\ 248 \sqrt{2} \\ 124 \sqrt{2} \\ 62 \sqrt{2} \\ 31 \sqrt{31} \end{array} \\ & \begin{cases} a-c = -p^2 \\ b-c = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} 992 & 2 \\ 496 & 2 \\ 248 & 2 \\ 124 & 2 \\ 62 & 2 \\ 31 & 31 \end{array} = 31 \cdot 32$$

$$\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases}$$

$$b > a \Rightarrow$$

$$b-c > a-c \Rightarrow \text{т.к. } p^2 > 1, \text{ то } \text{нельзя.}$$

$$\Rightarrow \text{ост. 2: } \begin{cases} a-c = -p^2 \\ b-c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} a+b &= -1-p^2 \\ a^2+b &= 1000 \end{aligned}$$

$$-(1-p^2)a = 1000 - a^2$$

$$\begin{aligned} b-a &= p^2 - 1 \\ b-a &= (p-1)(p+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p &\neq 2, \text{ т.к. } b-a: 3 \\ p &= 3: b-a = 8 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b-a &= p^2 - 1 \\ b-a &= (p-1)(p+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p &= 5 \text{ и } a >: \\ p &\text{ имеет ост. } 1 \text{ или } 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow p = 3 - \text{ср. реш.} \Rightarrow$$

$$b-a = 8 \Rightarrow b = 8+a$$

$$a^2 + a + 8 = 1000$$

$$a^2 + a - 992 = 0 \Rightarrow$$

$$a_1, a_2 = -992$$

$$a_1, a_2 = -1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = -32 \\ a = 31 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 6(2 \cos^2 x - 1) + 3p \cos x + 12 \cos x - 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0$$

$$p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$$

$$\text{Пусть } t = \cos x \Rightarrow t \in [-1; 1].$$

$$pt^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0$$

$$p = -\frac{1}{t^3} - \frac{3t + 1}{t^2}$$

$$p = -\frac{1}{t^3} - \frac{3}{t^2} - \frac{3}{t}$$

$$\text{Пусть } a = \frac{1}{t} \Rightarrow$$

$$p = -a^3 - 3a^2 - 3a$$

$$p' = -3a^2 - 6a - 3 = -3(a+1)^2$$

$$\Rightarrow p' \leq 0 \text{ при всех } a.$$

$$a \in (-\infty; -1) \cup [1; +\infty) \Rightarrow$$

$$p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty).$$

$$\text{Ответ: } p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty).$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 ИЗ 3

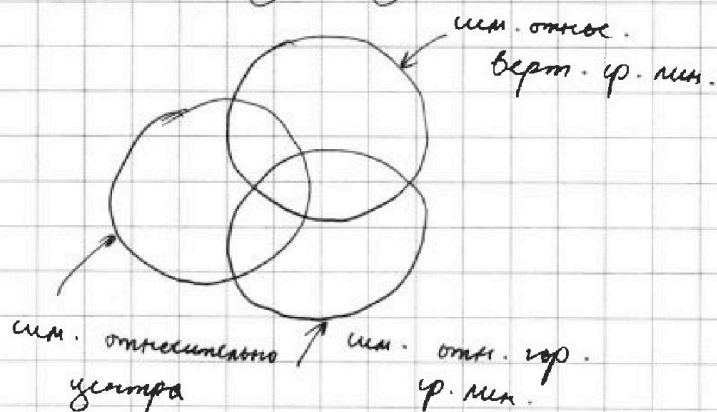
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

15.

У нас есть три множества случаев:

- 1) Симметрия относительно горизонтальной средней линии.
- 2) Симметрия относительно вертикальной средней линии.
- 3) Симметрия относительно центра.

Если изобразить их с помощью кругов Эйлера:



Несомненно пересечения этих множеств:

- 1) Допустим, какая-то точка симметрична одному допустим, для нас во всех точках обладают допустим, выбранные точки симметричны и относительно верт., и относительно гор. ср. линии. Введем систему координат с центром в центре нашего прямоугольника и несомненно одну из таких точек:
 $A(x, y)$.

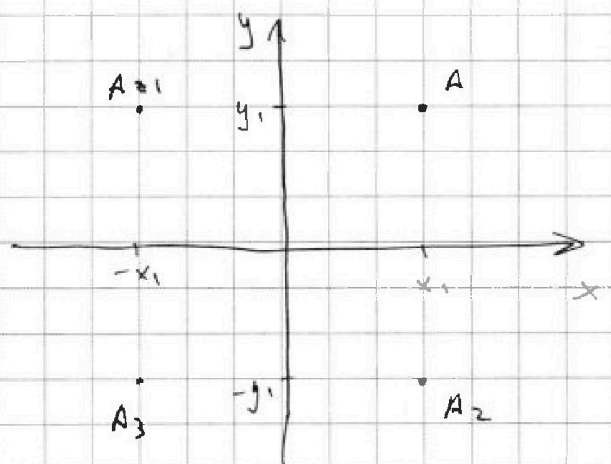


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



сим. отн. верт. ф. линии

$\Rightarrow$ есть т. $A_1(-x_1, y_1)$.

сим. отн. ~~ф~~ гор. ф. линии

$\Rightarrow$ есть т. $A_2(x_1, -y_1)$.

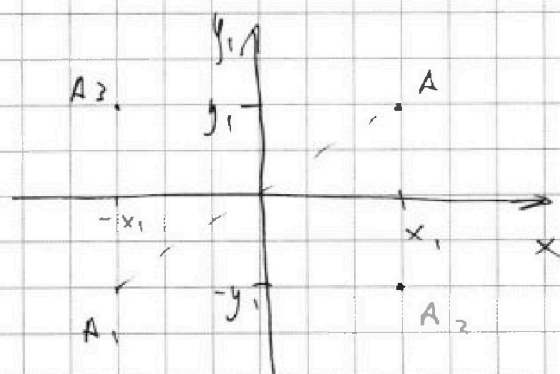
симметрия т. A_1 отн.

гор. и т. A_2 отн.

вертикали дают точку $A_3(-x_1, -y_1)$. - как мы

видим, выполняются все три вида симметрии.

2) Допустим, выбранное т. сим. отн. центра и гор. ф. линии $\Rightarrow$ Рассмотрим $A(x_1, y_1)$



A отн. гор $\rightarrow A_2(x_1, -y_1)$.

A отн. центра $\Rightarrow A_1(-x_1, -y_1)$.

A_1 отн. гор и A_2 отн.

центра $\rightarrow A_3(-x_1, y_1)$

Снова все виды симметрии

3) Для симметрии относительно верт. ф. линии и центра доказываемся аналогично $\Rightarrow$

закрашенное мн. точек удовл. либо одной из симметрий, либо всем 3 сразу.

4) Для симметрии относительно гор. или верт. выбираем 4 точки в половине поля, остальные однозначно определяются: $S_1 = \frac{30000!}{4! 29996!}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА

3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5) Для симметрии относительно центра:

$$S_2 = \frac{60000 \cdot 59998 \cdot 59996 \cdot 59994}{4!}$$

6) Для всех симметрий одновременно:

выбираем 2 точки в центре поля, остальные две можно определить $\Rightarrow$

$$S_3 = \frac{15000 \cdot 14999}{2!}$$

7) При $2S_1 + S_2$ - количество S_3 будет посчитано 3 раза $\Rightarrow$ исходное S :

$$S = 2S_1 + S_2 - 2S_3 \Rightarrow$$

$$S = 2 \cdot \frac{30000!}{4! \cdot 29996!} + \frac{60000 \cdot 59998 \cdot 59996 \cdot 59994}{4!} - 2 \cdot 15000 \cdot 14999$$

$$\text{Ответ: } S = 2 \cdot \frac{30000!}{4! \cdot 29996!} + \frac{60000 \cdot 59998 \cdot 59996 \cdot 59994}{4!} - 15000 \cdot 14999$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

нб.

1) $(a-c)(b-c)$ - простое в квадрате $\Rightarrow$

$(a-c)(b-c) = p^2$. Т.к. $(a-c)$ и $(b-c)$ - целые, возможные варианты:

$$\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases} \Rightarrow b < a - \text{не уд. I условие}$$

$$\begin{cases} a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{cases} \Rightarrow b < a - \text{не уд. I условие}$$

$$\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = p^2 \\ a-c = -p^2 \\ b-c = -p^2 \end{cases} \Rightarrow a = b - \text{не уд. I условие}$$

Остается 2 варианта:

$$\begin{cases} a-c = -p^2 \\ b-c = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \end{cases}$$

при возмещении из второго уравн. первое в обоих случаях получим:

$$b-a = p^2 - 1 \Rightarrow$$

$$b-a = (p-1)(p+1)$$

1) Если $p=2$, то $b-a=3$ - цел. II не выполн.

2) Если $p=3$, то $b-a=8$ - цел. II выполнено

3) Если $p>3$, то $p \equiv 1 \pmod{3}$ или $p \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow$

либо $(p-1)$, либо $(p+1)$ делится на 3 $\Rightarrow$

$b-a$ делится на 3 $\Rightarrow$ условие II не выполняется

$\Rightarrow p=3$ - единственное значение $p \Rightarrow$

$b-a=8 \Rightarrow b=a+8$ - подставим в IV условие.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a^2 + a + 8 = 1000$$

$$a^2 + a - 992 = 0 \Rightarrow \text{по теореме Виета:}$$

$$\begin{cases} a = -32 \\ a = 31 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (-32; -24) \\ (31; 39) \end{matrix}$$

(учитывая то, что $p = 3$, подставим в наши уравнения:

$$\begin{cases} a - c = -p^2 \\ b - c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - c = -9 \\ b - c = -1 \end{cases}$$

$$\Downarrow \begin{cases} -32 - c = -9 \\ -24 - c = -1 \end{cases} \Rightarrow c = -23$$

$(-32; -24; -23)$

или

$$\begin{cases} 31 - c = -9 \\ 39 - c = -1 \end{cases} \Rightarrow c = 40$$

$(31; 39; 40)$

$$\begin{cases} a - c = 1 \\ b - c = p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - c = 1 \\ b - c = 9 \end{cases}$$
$$\Downarrow \begin{cases} -32 - c = 1 \\ -24 - c = 9 \end{cases} \Rightarrow c = -33$$

$(-32; -24; -33)$

или

$$\begin{cases} 31 - c = 1 \\ 39 - c = 9 \end{cases} \Rightarrow c = 30$$

$(31; 39; 30)$

Ответ: $(-32; -24; -23); (31; 39; 40); (-32; -24; -33); (31; 39; 30)$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

$$(a-c)(b-c) = p^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$\frac{1}{(3x+2)^2} = \frac{(2-x)^4}{(25x+34)^2 (3x+2)^2}$$

$$1 = \frac{(2-x)^4}{(25x+34)^2} \Rightarrow (2-x)^4 = (25x+34)^2$$

$$\begin{cases} (2-x)^2 = 25x+34 \\ (2-x)^2 = -25x-34 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 4 = 25x + 34 \\ x^2 - 4x + 4 = -25x - 34 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 30 \\ x = -19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 30 \\ x = -19 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 30 \\ x = -19 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} 23 \\ \times 23 \\ \hline 46 \\ \times 169 \\ \hline 329 \end{matrix} \\ & \begin{matrix} 21 \\ \times 21 \\ \hline 42 \\ \times 441 \\ \hline 882 \end{matrix} \\ & \begin{matrix} 21 \\ \times 21 \\ \hline 42 \\ \times 441 \\ \hline 882 \end{matrix} \end{aligned}$$

$$x = -19: \begin{aligned} & b_{q^0} = \sqrt{25 \cdot 55} \\ & b_{q''} = 21 \\ & b_{q^{12}} = \sqrt{475} \end{aligned}$$

$$x = -2: \begin{aligned} & b_{q^{12}} = 0 \\ & b_{q^0} = \sqrt{(34-50)(2-6)} = 0 \end{aligned}$$

$$b_{q^0} = \sqrt{784(92)} = 28\sqrt{92}$$

$$b_{q''} = -28$$

$$b_{q^{12}} = \sqrt{\frac{784}{(92)^2}} = \frac{28}{92}$$

$$p^8 = \frac{1}{(3x+2)^2} \Rightarrow p^8 = \frac{1}{55^2}$$

$$p^4 = \frac{1}{55}$$

$$p = \sqrt[4]{\frac{1}{55}}$$

Ответ: -19.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$b_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \Rightarrow$$

$$b_{q^9} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$$

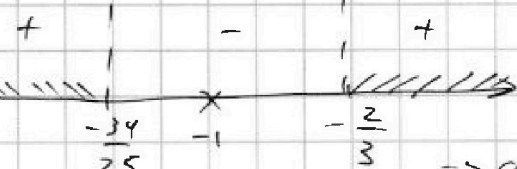
$$b_{q^{11}} = 2-x$$

$$b_{q^{18}} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$$

знак

$$\Rightarrow q > 0$$

$$x \neq -\frac{34}{25}$$



$$\Rightarrow q^9 = \frac{1}{(3x+2)^2} \Rightarrow q = (3x+2)^{-\frac{2}{9}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(3x+2)^2} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$$

$$\frac{1}{(3x+2)^4} = b_{q^{18}} = (25x+34)(3x+2)$$

$$b_{q^{18}} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$$

$$b = (25x+34)(3x+2) \cdot \frac{(3x+2)^3}{25x+34}$$

$$b = \sqrt{(25x+34)(3x+2)^5}$$

$$q^2 = \frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}$$

$$q^8 = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3 \cdot (25x+34)(3x+2)}}$$

$$b_{q^9} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$$

$$b_{q^{11}} = 2-x$$

$$b_{q^{17}} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$$

$$q^4 = \frac{4-4x+x^2}{(25x+34)(3x+2)}$$

$$q^8 = \sqrt{\frac{1}{(3x+2)^4}}$$

$$q^8 = \frac{1}{(3x+2)^2}$$

$$q^2 = \frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}$$

$$q^8 = \frac{(2-x)^4}{(25x+34)^2(3x+2)^2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

черновик
№3

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x =$$

$$= (2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2 \sin^2 x \cos x =$$

$$= 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x (1 - \cos^2 x) =$$

$$= 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 6(2 \cos^2 x - 1) + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 12 \cos^2 x - 6 + 3p \cos x + 12 \cos x + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 24 \cos x + 4 = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0 \quad | \quad p t^3 = -3t^2 - 3t - 1$$

$$p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0 \quad | \quad p = -3 \frac{t^2}{t^3} - 3 \frac{t}{t^3} - \frac{1}{t^3}$$

$$p t^3 + 3 t^2 + 3 t + 1 = 0$$

$$t^2(p t + 3) + 3 t + 1 = 0$$

$$3 t^2 \left(\frac{p t}{3} + 1 \right) + 3 t + 1 = 0$$

$$9 t^3 + 3 t^2 + 3 t + 1$$

$$3 t^2 (3 t + 1) + 3 t + 1 = 0$$

$$3 t (3 t + 1) (3 t^2 + 1) = 0$$

$$t = -\frac{1}{3}$$

$$-1 < t < 0$$

$$a^2 - 6a - 3$$

$$p' = 3(a^2 - 6a - 3) \quad \Delta = 36 + 4 \cdot 3 = 48 \quad a \in \mathbb{R} \quad a = \frac{1}{t}$$

$$p = -3a - 3a^2 + a^3$$

$$p' = 3a^2 - 6a - 3 \quad p = -3a - 3a^2 + a^3$$

$$p = -a^3 - 3a^2 - 3a \quad ; \quad p' = -3a^2 - 6a - 3 = -3(a^2 + 2a + 1) =$$

$$p' = 0 \quad \text{при } a = -1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черк.

$$pt^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0$$

$$pt^3 = -3t^2 - 3t - 1$$

$$p = -3\frac{t^2}{t^3} - 3\frac{t}{t^3} - \frac{1}{t^3}$$

$$p = -3\frac{1}{t} - 3\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3}$$

$$p(1) = -3 - 3 - 1 = -7$$

$$p(-1) = 3 - 3 + 1 = 1$$

$$\Rightarrow p \in (-\infty; -7) \cup (1; +\infty)$$

$$a = \frac{1}{t} \Rightarrow a \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$$

$$p = -3a - 3a^2 - a^3$$

$$p = -a^3 - 3a^2 - 3a$$

$$p' = -3a^2 - 6a - 3 = -3(a^2 + 2a + 1) = -3(a+1)^2 \Rightarrow$$

$$p' \leq 0, \Rightarrow a = -1$$



$$pt^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0$$

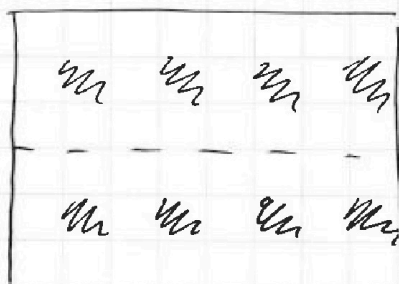
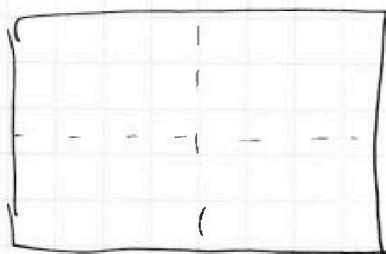
$$t = 1$$

$$pt^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0$$

$$-8t^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0$$

$$p = 0 : 3t^2 + 3t + 1 = 0$$

$$\Delta = 9 - 4 \cdot 3 = -12$$

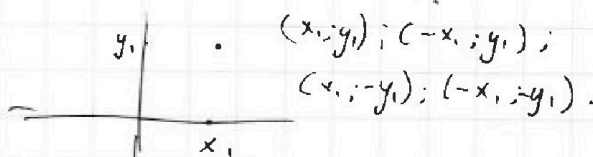
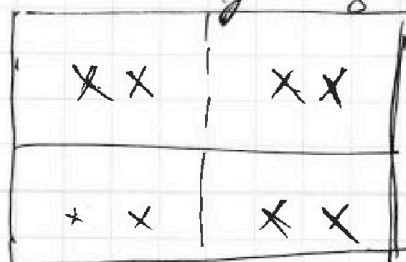


полюска см $500 \cdot 120 = 500 \cdot 60 \Rightarrow 3000$

$$\frac{3000 \cdot 2999 \cdot 2998 \cdot 2997}{4!} = 2 +$$

+(две четвр. шл.):

$$\frac{6000 \cdot 5998 \cdot 5996 \cdot 5994}{4!}$$



$$CD^2 = CB \cdot CE$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Черновик.

$$\begin{cases} a = -32 \Rightarrow b = -24 \\ a = 31 \Rightarrow b = 39 \end{cases}$$

$$(a, b) \rightarrow (-32, -24), (31, 39) \quad p = 3$$

$$\begin{aligned} a - c = -9 &\Rightarrow -32 - c = -9 \Rightarrow c = -23 \\ b - c = -1 &\Rightarrow -24 - c = -1 \end{aligned}$$

$$(-32, -24, -23)$$

$$\begin{aligned} a - c = 1 &\Rightarrow -32 - c = 1 \\ b - c = 9 &\Rightarrow -24 - c = 9 \end{aligned}$$

$$31 - c = -9$$

$$\Rightarrow c = 40$$

$$39 - c = -1$$

$$(31, 39, 40)$$

$$a - c = 1 \Rightarrow -32 - c = 1$$

$$b - c = 9 \Rightarrow -24 - c = 9 \Rightarrow c = -33$$

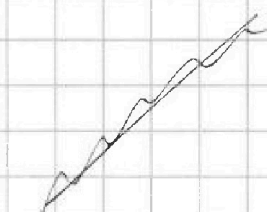
$$(-32, -24, -33)$$

$$31 - c = 1$$

$$39 - c = 9$$

$$\Rightarrow c = 30$$

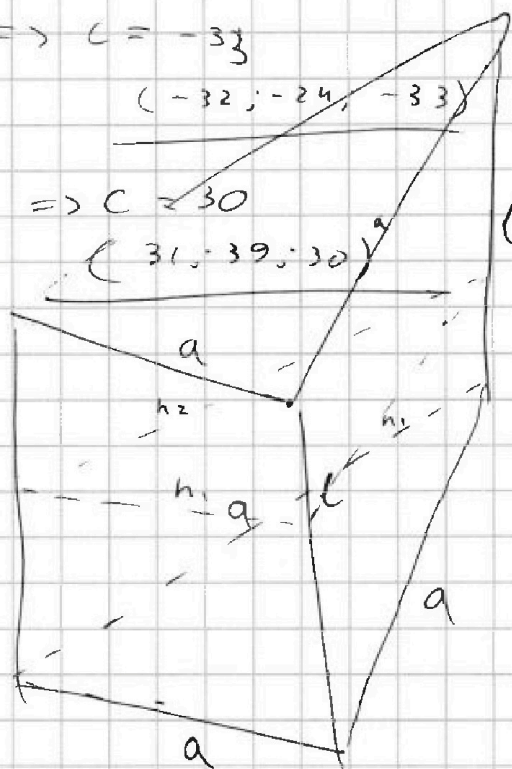
$$(31, 39, 30)$$



$$\begin{aligned} h_1 &= 6 \\ h_1 &= 6 \end{aligned}$$

$$h_2 = 5$$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{6}{5}$$



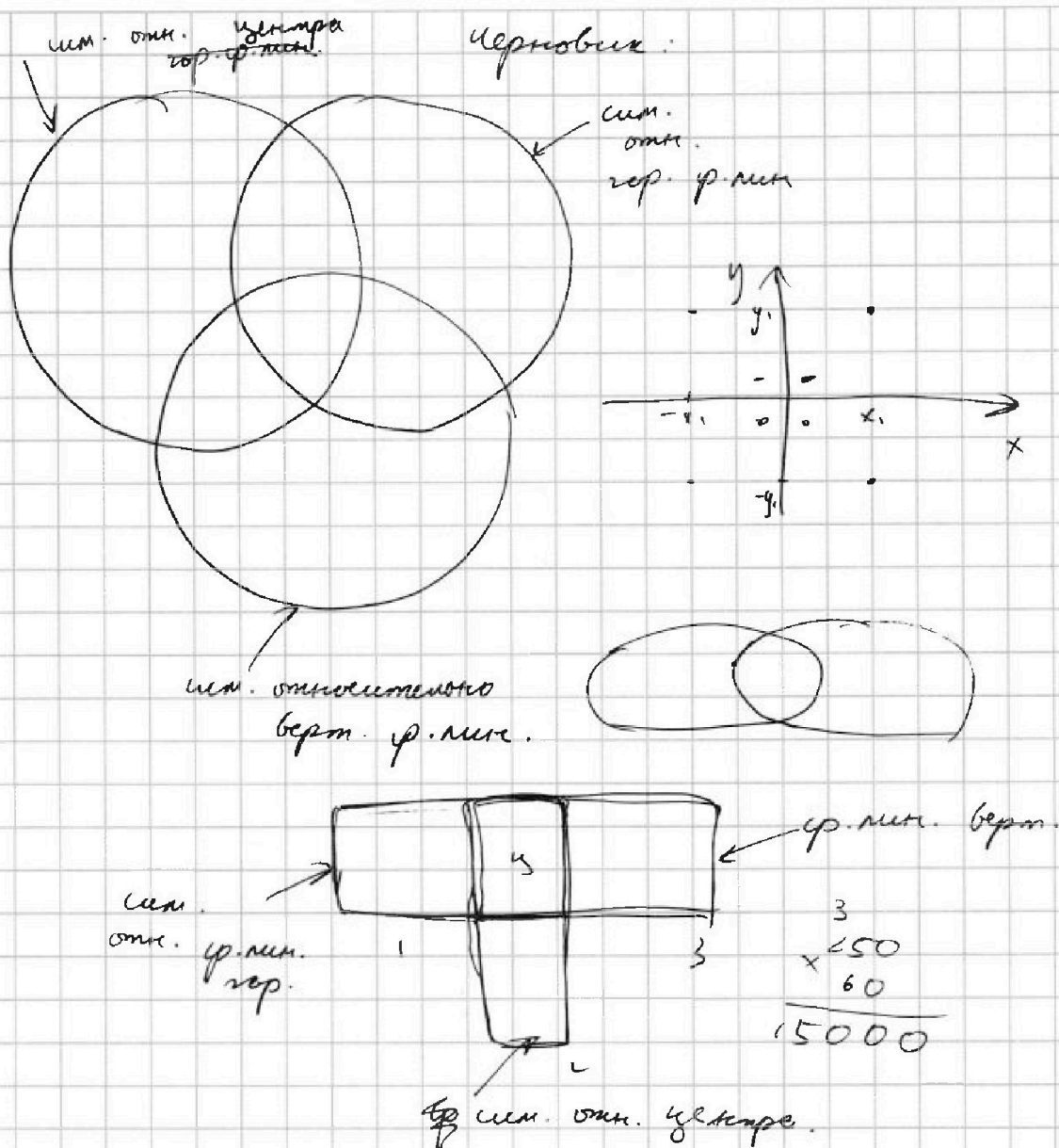


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$y = \frac{15000 \cdot 14999}{2} = \frac{15000!}{2! 14998!}$$

$$S = 1 + 4 + 3 - 29 = 2$$

$$S = \frac{3000 \cdot 2999 \cdot 2998 \cdot 2997}{4!} \approx \frac{3000!}{4! 2996!}$$

$$S = 2 \cdot \frac{3000!}{4! 2996!} + \frac{6000 \cdot 5998 \cdot 5996 \cdot 5994}{4!} - \frac{15000!}{14998!}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y = 18; \quad z = 0;$$

черновик.

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{-x^2-3x+18}$$

$$-x^2-3x+18 \geq 0$$

$$x^2+3x-18 \leq 0$$

$$D = 9 + 4 \cdot 18 = 81$$

$$x_1 = \frac{-3-9}{2}$$

$$x_1 = -6$$

$$x_2 = \frac{-3+9}{2}$$

$$x_2 = 3$$

$$\begin{array}{r} 5 \ 18 \\ \times 4 \\ \hline 72 \end{array} \quad \begin{array}{r} 72-25 = \\ \hline 47 \\ \times 4 \\ \hline 188 \\ \times 4 \\ \hline 752 \end{array}$$

$$\Rightarrow -x^2-3x+18 = -(x+6)(x-3)$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{-(x+6)(x-3)} \quad | \cdot 2$$

428

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{(x+6)(3-x)} \quad x = \frac{-3 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$-6 \leq x \leq 3$$

$$-6 \leq x \leq 3$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} = 2\sqrt{(x+6)(3-x)} - 7$$

$$\sqrt{x+6} - 2\sqrt{(x+6)(3-x)} + 3 - x = 4(x+6)(3-x) - 28\sqrt{(x+6)(3-x)} + 49$$

$$9 - 2\sqrt{(x+6)(3-x)} = 4(x+6)(3-x) - 28\sqrt{(x+6)(3-x)} + 49$$

$$9 - 2t = 4t^2 - 28t + 49$$

$$4t^2 - 26t + 40 = 0$$

$$2t^2 - 13t + 20 = 0$$

$$D = 169 - 4 \cdot 2 \cdot 20 = 9$$

$$t_1 = \frac{13-3}{4}$$

$$t_2 = \frac{13+3}{4}$$

$$-x^2-3x-\frac{4^2}{4} = 0$$

$$x^2+3x+\frac{12}{4} = 0$$

$$D = 9 - 4 \cdot 4 \cdot 3 < 0$$

$$\sqrt{(x+6)(3-x)} = t_1 = \frac{5}{2}$$

$$(x+6)(3-x) = 16$$

$$-x^2-3x+18 = 16$$

$$x^2+3x-2 = 0$$

428



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z^2}$$

$$|y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}$$

$$\sqrt{400-z^2} = \sqrt{(20-z)(20+z)} \quad z \geq -20$$

$$\Rightarrow z \in [-20; 20]$$

$$\begin{aligned} -z &\leq 20 \\ -2z &\leq 40 \\ -z &\geq -20 \end{aligned}$$

$$x \geq -6 \Rightarrow$$

$$3-x-2z$$

$$y-3x-x^2$$

$$-x \leq 6$$

$$3-x \leq 3$$

$$3-x-2z \leq$$

$$|y+2| \geq 0$$

$$(y+2)^2 + 4(y+2)(y-18) + 4(y-18)^2$$



$$\begin{aligned} y \leq -2: \quad K &= -y-2-2y+36 \\ K &= -3y+34 \Rightarrow K_{\min} = 40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2 \leq y \leq 18: \quad K &= y+2-2y+36 \\ K &= -y+38 \Rightarrow K_{\min} = 20 \\ y &= 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y \geq 18: \quad K &= y+2+2y-36 \\ K &= 3y-34 \Rightarrow K_{\min} = 20 \\ K &= 3 \cdot 18 - 34 = 20 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow K_{\min} = 20 \Rightarrow K \geq 20 \quad \sqrt{400-z^2} \leq 20$$

$$\Rightarrow |y+2| + 2|y-18| = 20$$