



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^3 + 3x^2 - 2 = 0$$

$$x_1 = -1 \text{ — корень}$$

$$(-1)^3 + 3(-1)^2 - 2 = -1 + 3 - 2 = 0$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 3x^2 - 2 & x+1 \\ \hline x^3 + x^2 & x^2 \\ \hline 2x^2 - 2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 3x^2 + 0x - 2 & x+1 \\ \hline x^3 + x^2 & x^2 + 2x - 2 \\ \hline 2x^2 + 0x & \\ -2x^2 + 2x & \\ \hline -2x - 2 & \\ -(-2x - 2) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot (-2) = 4 + 8 = 12$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$x_4 = \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{2} = -1 - \sqrt{3} \quad x_5 = -1 + \sqrt{3}$$

Заметим, что $d \neq 0$.

$$2d = x^2 - x - 1 \text{ т.е. } d = \frac{x^2 - x - 1}{2}$$

$$x^2 - x - 1 \neq 0$$

Или:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) = 1 + 4 = 5$$

$$\begin{cases} x \neq \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ x \neq \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Ответ: $-1; -1 - \sqrt{3}; -1 + \sqrt{3}$.



1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |12-3y| \leq 3 \\ |13x-y| \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} |12-3y|-3 \leq 0 \\ |13x-y|-1 \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} | \cdot (12-3y+3) > 0 \\ | \cdot (13x-y+1) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (12-3y-3)(12-3y+3) \leq 0 \\ (13x-y-1)(13x-y+1) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (12-3y)^2-9 \leq 0 \\ (13x-y)^2-1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (12-3y)^2-9 \leq 0 \\ (13x-y)^2-1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-3y-3)(x-3y+3) \leq 0 \quad (1) \\ (3x-y-1)(3x-y+1) \leq 0 \quad (2) \end{cases}$$

Ищем отнес. x :

1) Нум.: $x = 3y+3$, $x = 3y-3$

$$\begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 3y-3 \quad 3y+3 \end{array} \rightarrow x \quad \begin{cases} x \geq 3y-3 \\ x \leq 3y+3 \end{cases}$$

2) Нум.: $x = \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}$

$$\begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{1}{3}y - \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3}y + \frac{1}{3} \end{array} \rightarrow x \quad \begin{cases} x \geq \frac{1}{3}y - \frac{1}{3} \cdot 3 \\ x \leq \frac{1}{3}y + \frac{1}{3} \cdot 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x \geq y-1 \\ 3x \leq y+1 \end{cases}$$

Имеем:

$$\begin{cases} x \geq 3y-3 \\ x \geq \frac{1}{3}y - \frac{1}{3} \\ x \leq 3y+3 \\ x \leq \frac{1}{3}y + \frac{1}{3} \end{cases} \quad \begin{aligned} x &\geq \max(3y-3; \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}) \\ x &\leq \min(3y+3; \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}) \end{aligned}$$

Но, что такое x и y было равно. Итого, что такое x и y были как можно больше. Но, для того x и y можно подобрать, значит.

Ответ: нет никакого значения.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Имеем:

$$\begin{cases} A = 13p^2 \\ B = 45q^2 \\ A = 45q^2 \\ B = 13p^2 \end{cases} \quad \begin{aligned} A &= m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) = \\ &= (m+n)(m+n-9) \\ B &= m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 45 \overline{) 13} \\ 25 \overline{) 5} \\ 5 \overline{) 5} \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} (m+n)/(m+n-9) = 13p^2/q^2 \quad (1) \\ mn(m+n-3) = 3 \cdot 5^2 q^2 \quad (1) \end{cases} \quad \begin{cases} (m+n)/(m+n-9) = 3 \cdot 5^2 q^2/p^2 \quad (2) \\ mn(m+n-3) = 13p^2 \quad (2) \end{cases}$$

1) Запомним, что $13p^2 > 0$ и $m+n > 9$ тогда $m+n-9 > 0$ т.е. $m+n-9 > 0$ т.е. $m+n > 9$ (т.к. m, n — натур.)

2) Запомним, что $m+n$ и $m+n-9$ взаимно просты, тогда $(m+n)/(m+n-9)$ — чётное. Т.к. p — простое, то число $13p^2$ может быть чётным только, если $p=2$. Имеем:

$$\begin{cases} (m+n)(m+n-9) = 13 \cdot 2^2, m+n > 9 \\ m+n = 13 \\ m+n-9 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow m+n = 13$$

$$\begin{cases} m+n = 26 \\ m+n-9 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} m+n = 52 \\ m+n-9 = 1 \end{cases}$$

б) Запомним, что если $q \neq 2$, то $3 \cdot 5^2 q^2$ — нечётное, то есть $mn(m+n-3)$ — должно быть нечётным. т.е. m — нечётное, n — нечётное, $(m+n-3)$ — нечётное. $(m+n-3)$ — нечётное — всегда верно при нечётных m, n . $m+n-3 > 0$, т.е. $m+n > 3$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Вариант 9 не:~~ $mn/(m+n-3) = 3 \cdot 5^2 \cdot 9^2$, $m+n=13$

$10 mn = 3 \cdot 5^2 \cdot 9^2$ т.е. $2 \cdot 5 mn = 3 \cdot 5^2 \cdot 9^2$ т.е.

$2 mn = 3 \cdot 5 \cdot 9^2$

Вариант 9 не 2, то $3 \cdot 5 \cdot 9^2$ — нечетно, а $2mn$ — четно, угад.

$9=2$

$2 mn = 3 \cdot 5 \cdot 2^2$

Вариант $mn = 3 \cdot 5 \cdot 2$

$m+n=13$
 $\begin{cases} m=3 \\ n=10 \end{cases}$ или $\begin{cases} m=2 \\ n=11 \end{cases}$

$\begin{cases} m=2 \\ n=11 \end{cases}$

$\begin{cases} m=5 \\ n=8 \end{cases}$ или $\begin{cases} m=10 \\ n=3 \end{cases}$

$\begin{cases} m=10 \\ n=3 \end{cases}$

$\begin{cases} m=15 \\ n=2 \end{cases}$ или $\begin{cases} m=2 \\ n=11 \end{cases}$

$\begin{cases} m=3 \\ n=10 \end{cases}$

$\begin{cases} m=10 \\ n=3 \end{cases}$

$\begin{cases} m=15 \\ n=2 \end{cases}$

$\begin{cases} m=2 \\ n=11 \end{cases}$

или $\begin{cases} m=6 \\ n=7 \end{cases}$

$\begin{cases} m=6 \\ n=7 \end{cases}$

$m+n=13 \neq 13$

$m+n=11 \neq 13$

т.е. $\begin{cases} m=10 \\ n=3 \end{cases}$ или $\begin{cases} m=3 \\ n=10 \end{cases}$

$\begin{cases} m=3 \\ n=10 \end{cases}$

$\begin{cases} m=10 \\ n=3 \end{cases}$

$\begin{cases} m=15 \\ n=2 \end{cases}$

$\begin{cases} m=2 \\ n=11 \end{cases}$

$\begin{cases} m=3 \\ n=10 \end{cases}$

$\begin{cases} m=10 \\ n=3 \end{cases}$

2) $mn/(m+n-3) = 6/(m+n)(m+n-9) = 3 \cdot 5^2 \cdot 9^2$

$(m+n)(m+n-9)$ — четно, угад. $9=2$

$(m+n)(m+n-9) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$

Зачем: $m+n=x$

$x(x-9) = 300$

$x^2 - 9x - 300 = 0$

$D = (-9)^2 - 4 \cdot (-300) = 81 + 1200 = 1281$

$x = \frac{9 \pm \sqrt{1281}}{2}$, $\sqrt{1281}$ — ~~нечетное~~ число т.е.

x — ~~нечетное~~ число т.е. $m+n$ — ~~нечетное~~ —

не можем иметь т.е. mn — ~~нечетное~~, угад.

$m \in \emptyset$ и $n \in \emptyset$, угад $(2) = (1) \cap (2) \neq \emptyset$; $1 \in \emptyset$.

(1) $\cup$ (2): $m=3, n=10$; $m=2, n=11$; $m=5, n=8$; $m=10, n=3$;

$m=15, n=2$; $m=6, n=7$ ~~$m=3, n=10$; $m=10, n=3$~~

Ответ: ~~$m=3, n=10$; $m=2, n=11$; $m=5, n=8$;~~

~~$m=10, n=3$; $m=15, n=2$~~

Ответ: $m=3, n=10$; $m=10, n=3$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4) По т. косинусов в $\triangle AZY$:

$$\cos \angle ZAY = \frac{AZ^2 + AY^2 - YZ^2}{2 \cdot AZ \cdot AY} = \frac{6^2 + 6^2 - 8^2}{2 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{8}{72} = \frac{1}{9}$$

ср $\angle BAC = 180^\circ - \angle ZAY$ (смежные)

$$\cos \angle BAC = \cos(180^\circ - \angle ZAY) = -\cos \angle ZAY = -\frac{1}{9}$$

5) По т. косинусов в $\triangle ABC$:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos \angle BAC$$

$$(8x)^2 = 18^2 + 30^2 + 2 \cdot 18 \cdot 30 \cdot \frac{1}{9}$$

$$64x^2 = 324 + 900 + 1080 \cdot \frac{1}{9}$$

$$64x^2 = 1224 + 120$$

$$64x^2 = 1344$$

$$x^2 = 21 \quad x = \sqrt{21}$$

$$BC = 8x = 8\sqrt{21}$$

Ответ: $8\sqrt{21}$.



1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Зачем мы, что всего 8 узлов и 9 точек узлов, т.е. $9 \cdot 9 = 81$ — всего узлов.
 Зафиксируем, что если мы выбрали 2 белых клетки, симметричные относительно центра сетки, то при поворотах они образуют 2 новых раскраски, если же мы выбрали белые клетки не симметричные относительно центра, то они образуют 4 новых раскраски при поворотах.
 $81 - 81 = 80$ — узлов и точек все симметрично.

$$\frac{80}{2} = 40 \text{ — пар симметричных узлов}$$

$$\frac{40}{2} = 20 \text{ — раскраски будут образовывать симметрию}$$

Значит, если не раскраски 2 т.к. по раскраске будут повторяться при поворотах, т.е. способов выбрать пару точек будет без повторений.

$$C_{20}^2 = \frac{20!}{1!1!} = 190 \text{ — кол-во способов выбрать пару точек}$$

Значит, способов раскраски не повторяться

$$\frac{80 \cdot 48}{2} = 40 \cdot 48 \text{ — кол-во способов выбрать}$$

с несимметрич. узлами без учета центр. узла

$$\frac{40 \cdot 48}{4} = 20 \cdot 48 = 960 \text{ — способов выбрать 2 узла}$$

чтобы картинка при повороте не повторялась без учета центр. узла.

$$80 \cdot 1 = 80 \text{ — способов выбрать пару с центр. узлом}$$

$$\frac{80}{4} = 20 \text{ — способов выбрать пару с центр. узлом}$$

узлов, чтобы раскраски при повороте не повторялись

$$20 + 960 + 20 = 1000 \text{ — способов выбрать узлы, чтобы картинка при повороте}$$

Ответ: 1000.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Нум: $x = 3y + 3$, $x = 5y - 3$

$$\begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ 3y-3 \quad \quad \quad 5y+3 \end{array} \rightarrow x$$

 $x \in [3y-3; 5y+3]$

2) Нум: $(x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3})(x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3})$

$x = \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}$

$x \in [\frac{1}{3}y - \frac{1}{3}; \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}]$

$2x \leq \frac{10}{3}y + \frac{10}{3} \quad | \cdot 3$

$8x \leq \frac{40}{3}y + \frac{40}{3}$

$4y + 8x \leq \frac{40}{3}y + \frac{40}{3}$

$\begin{cases} x \geq 3y-3 \\ 3x \geq y \end{cases}$

$\begin{cases} x \leq 3y+3 \\ -3x \leq -y+1 \end{cases}$

$-2x \leq 2y+4 \quad 2x \geq -2y-4$

$\begin{cases} 3y+3 \geq x \\ 3x \geq y-1 \end{cases}$

$3y+3+3x \geq x+y-1$

$x+y \geq -2$

$x \geq 3y-3$

$-x \geq -3y-3$

$8x \leq 24y-24$

$x-y \geq -1$

$x-y \leq 1$

$$\begin{array}{r} 31 \\ x_1 \\ + 93 \\ \hline 961 \end{array}$$

2 max: $x = 3y+3$

$x = \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}$

$4x \geq 4y+4$

$4x \geq 4y+4$

$4x \leq 4y+4$

$x \geq y-1$

$x \leq y+1$

$4y+8y+4 = 12y+4$

$12y+4$