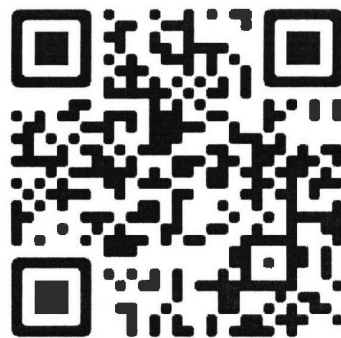




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11



1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 143° . Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?
2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.
3. [4 балла] Из множества M , состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M , если $p^2 - q^2 = 792$.
4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M , а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2 , вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M , пересекает ω_1 в точках X и Y , а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1 , если $I_1 I_2 = 13/2$, а $MZ \cdot MY = 5$.
5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14}$ или $4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$?
6. [4 балла] Даны 12 точек: 7 из них лежат на одной окружности в плоскости α , а остальные 5 расположены вне плоскости α . Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α . Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?
7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SAB CDEF$ (S – вершина) со стороной основания 2 и боковым ребром 4. Точка X лежит на прямой SF , точка Y – на прямой AD , причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY .

31 балл всего



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть кол-во вершин - n , тогда $\sum \angle = 180^\circ(n-2)$
↑
сумма всех углов

с другой стороны

$\sum \angle = S_n + \text{сумма углов протрассы}$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}, a_1 = 143^\circ; a_n = 143^\circ + 2^\circ(n-1)$$

$$180^\circ(n-2) = \frac{(143^\circ + 143^\circ + 2^\circ(n-1)) \cdot n}{2}$$

$$360n - 720 = 286n + 2n^2 - 2n$$

$$n^2 - 38n + 360 = 0$$

$$n = \frac{38 \pm \sqrt{38^2 - 4 \cdot 360}}{2} = 19 \pm \sqrt{19^2 - 360} = 19 \pm 1$$

выбираем $n = 20$

Ответ: 20



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$$

$$4x \ln 2 + 3y \ln 2 + 3z \ln 2 + z \ln 3 = \ln 3 + \ln 2$$

$$\ln(2) \cdot \underbrace{(4x + 3y + 3z - 1)}_{\in \mathbb{Z}} + \ln(3) \cdot \underbrace{(z - 1)}_{\in \mathbb{Z}} = 0$$

~~$$\ln(2) \text{ и } \ln(3)$$~~
$$a \cdot \ln(2) + b \cdot \ln(3) = 0$$

только если $a = 0$ и $b = 0$ (если a и $b \in \mathbb{Z}$)

(т.е., когда $-a \cdot \ln 2 - b \ln 3 \rightarrow \frac{-a}{-b} = \log_2 3$)
 $\in \mathbb{Q} \quad \notin \mathbb{Q}$

тогда:

$$4x + 3y + 3z - 1 = 0$$

$$z - 1 = 0 \Rightarrow z = 1$$

$$4x + 3y = -2$$

$$y = \frac{-2 - 4x}{3}$$

$$y^2 = \frac{16x^2 + 16x + 4}{9}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 + x^2 + \frac{16x^2 + 16x + 4}{9} = \frac{1}{9} (25x^2 + 16x + 13)$$

$$f(x) = 25x^2 + 16x + 13 = \left(5x + \frac{8}{5}\right)^2 + 13 - \frac{64}{25}$$

$$f(x)_{\min} = \frac{25 \cdot 13 - 64}{25} = \frac{261}{25}; (x^2 + y^2 + z^2)_{\min} = \frac{261}{25 \cdot 9} = \frac{29}{25}$$

Ответ: $\frac{29}{25}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$M = \{x, x+1, x+2, x+3, x+4, x+5, x+6\}$$

$$\Sigma M = 7x + 21$$

$$p = \Sigma M - (x + i_1), \quad i_1 \in [0; 6]$$

$$q = \Sigma M - (x + i_2), \quad i_2 \in [0; 6] \quad i_1 \neq i_2$$

$$p = 6x + 21 - i_1$$

$$q = 6x + 21 - i_2$$

$$p^2 - q^2 = 792 = (i_2 - i_1)(12x + 42 - (i_1 + i_2))$$

$$792 = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 11$$

$$i_2 - i_1 \in [0; [1; 6]$$

$$\text{тогда } i_2 - i_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

при этом p и q - простые $\Rightarrow p/3$ и $q/3$

(обезопасно $p \neq 3$ и $q \neq 3$ т.к. $x \geq 0$)

$$\text{тогда } i_1 \neq 3 \text{ и } i_2 \neq 3$$

$$1) i_2 - i_1 = 4$$

$$\begin{array}{ccccccc} \cancel{x} & x+1 & x+2 & \cancel{x+3} & x+4 & x+5 & \cancel{x+6} \end{array}$$

$$\text{тогда } i_2 = 5, i_1 = 1$$

$$\text{тогда } (12x + 42 - (i_1 + i_2)) = 2 \cdot 9 \cdot 11$$

$$4x + 19 - 2 = 2 \cdot 3 \cdot 11 \Rightarrow 4x = 54 \Rightarrow x = 14$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) i_2 - i_1 = 2$$

тогда единственной вариант

$$i_2 = 4 \quad i_1 = 2$$

тогда

$$(12x + 44 - 6) = 4 \cdot 9 \cdot 11$$

$$4x + 14 - 2 = 4 \cdot 3 \cdot 11$$

$$4x = 120; \boxed{x = 30}$$

$$3) i_2 - i_1 = 2$$

два варианта: $\begin{cases} i_2 = 2 \\ i_1 = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} i_2 = 5 \\ i_1 = 4 \end{cases}$

$$3.1) i_2 = 2 \quad i_1 = 1$$

$$12x + 42 - 3 = 2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 11$$

$$4x + 14 - 1 = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 11$$

$$4x = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 11 - 13 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$$

$\uparrow$ 4 $\downarrow$ 4

$$3.2) i_2 = 5 \quad i_1 = 4$$

$$12x + 42 - 9 = 2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 11$$

$$4x + 14 - 3 = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 11$$

$$4x = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 11 - 11 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$$

$\uparrow$ 4 $\downarrow$ 4



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Окее~~ Окее: $M = \{14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$

$$M = \{14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

или $M = \{30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$

Окее: $M = \{14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$ или

$$M = \{30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$$



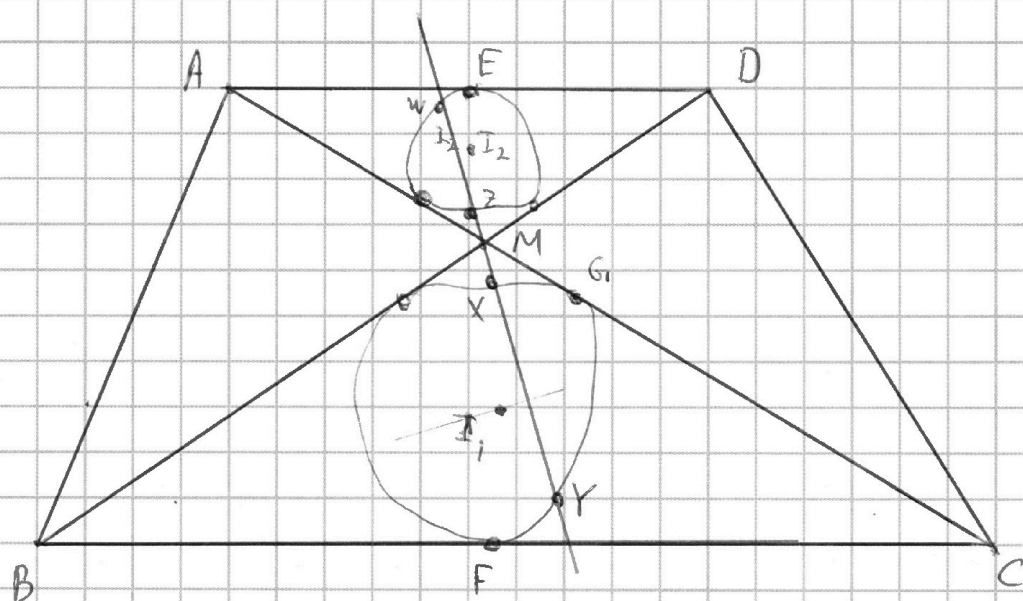
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

4 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$I, I_2 = \frac{13}{2}$$

$$\triangle ADM \sim \triangle CBM (\angle CBM = \angle MDA,$$

$$MZ - MY = 5$$

$$\angle AMC = \angle DMA) \Rightarrow \frac{AD}{BC} = \frac{BM}{DM} = 1$$

$\Rightarrow$ когда подходит $k \geq 2 \Rightarrow$ пусть $r_2 = n \Rightarrow r_1 = 2n$;

тогда $2MI_2 = MI_1$ (все линейные размеры

в $\triangle AMC$ в $\triangle CBM$ больше чем в $\triangle AMD$) и тогда

$I, I_2 = I, m + MI_2$ (т.к. I , лежит на бис. $\angle AMC$

который совпадает с бисс. $\angle AMD$ на которой

лежит I_2). $I, I_2 = I, m + MI_2 = 3MI_2 = \frac{13}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow MI_2 = \frac{13}{6}; MI_1 = \frac{13}{3}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

По свойствам векторов (скаляр произв):

$$MX \cdot MY = (MG)^2; \quad MX = 2MZ$$

$$MX \cdot MY = 2 \cdot MZ \cdot MY = 10 - (MG)^2 = (MI_1)^2 - r_1^2$$

по 1. информации для $\Delta MG I_1$

$$r_1^2 + 10 = (MI_1)^2 = \frac{169}{9}$$

$$r_1^2 = \frac{169 - 90}{9} = \frac{79}{9}$$

$$r_1 = \frac{\sqrt{79}}{3}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{79}}{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $\sin \frac{\pi}{14} = a$; $\cos \frac{\pi}{7} = b$ тогда:

$$b = \sqrt{1 - a^2}$$

$$\cos \frac{\pi}{7} = b^2 - a^2 = \sqrt{1 - 4a^2b^2}$$

$$\sin \frac{\pi}{7} = 2ab$$

$$\sin \left(\frac{3\pi}{14} \right) = \sin \left(\frac{2\pi}{14} + \frac{\pi}{14} \right) = 2ab \cdot b + a \cdot (b^2 - a^2)$$

$$\frac{5}{4} = 4 \sin \frac{3\pi}{14} \quad \vee \quad 4 \cos \frac{\pi}{7} = 5 \sin \frac{\pi}{14}$$

$$\frac{5}{4} (1+a) \quad \vee \quad 4(b^2 - a^2 + 2ab^2 + ab^2 - a^3)$$

$$\frac{5}{4} \quad \vee \quad \frac{b^2 - a^2 + 3ab^2 - a^3}{1+a} = \frac{(b^2 - a^2)(1+a) + 2ab^2}{1+a}$$

$$\frac{5}{4} \quad \vee \quad b^2 - a^2 + \frac{2a(1-a^2)}{1+a}$$

$$\frac{5}{4} \quad \vee \quad b^2 - a^2 + 2a(1-a)$$

$$\frac{5}{4} \quad \vee \quad 1 - a^2 - a^2 + 2a - 2a^2$$

$$\frac{5}{4} \quad \vee \quad 1 - 4a^2 + 2a \neq$$

$$\frac{1}{4} \quad \vee \quad 2a(1-2a)$$

Рассмотрим $f(x) = \sqrt{1-x} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ максимум

но в значение $f(x) = \frac{1}{4}$ при условии $x = \frac{1}{2}$

замечаем, что $2a(1-2a) = f(2a)$, $2a \neq \frac{1}{2}$ т.к.

$a \neq \frac{1}{4}$ т.к. $\sin \left(\frac{\pi}{14} \right) < \frac{\pi}{14} < \frac{13/14}{14} < \frac{14}{14 \cdot 4} = \frac{1}{4}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Следовательно

$$\frac{1}{4} > 2a(1-2a)$$

...

$$5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14} > 4 \cos \frac{\pi}{2} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$$

Ответ: $5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пирамида - 123 точки лежат в одной плоскости и еще одна точка лежит в этой плоскости.

1) Если 123 основания - 4. Тогда способов выбрать точку основания:

$$C_7^3 + C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7 = 7 \cdot 5 + 7 \cdot 5 + 7 \cdot 3 + 7 + 1 = 7(14) + 1 = 99$$

способов выбора вершины - 5.

$$\text{Всего пирамид } S_1 = 99 \cdot 5 = 495$$

2) Если 123 основания не 4.

Тогда способов выбора точек основания -

$$C_{12}^3 = 220$$

способов выбора вершины - 12 - 3 = 9

$$S_2 \text{ пирамид } S_2 = 220 \cdot 9 = 2200 - 220 = 1980$$

Всего пирамид: но тогда двугран. посылки

все 4-х треугольные пирамиды содержащие 3 точки и 4. таких чисел: $C_2^3 \cdot 5$ штук

$$S_3 = 7 \cdot 5 \cdot 5 = 225$$

$$\text{Всего } S_1 + S_2 - S_3 = 495 + 1980 - 225 = 2250$$

Ответ: 2280



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

То же всего перемешу

$$S_2 = C_{12}^4 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 11 \cdot 9 \cdot 5 = 495$$

Но перемешу три полюбые перемешу с ~~остав~~

возможным оставание 2 у меня было в
общем случаев а их

$$S_3 = C_2^3 \cdot 5 = 2 \cdot 5 \cdot 8 = 80$$

$$\text{Всего перемешу: } S_1 + S_2 - S_3 = 2 \cdot 495 - 80 = 910$$

Ответ: 910



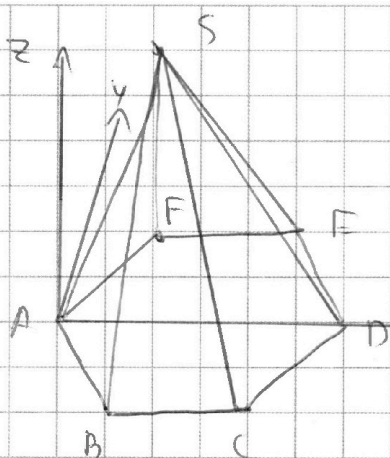
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА

4 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Введем декартову
систему координат.

$$A = (0, 0, 0)$$

OX совпадает с AD ,

OY лежит в ~~плоскости~~ плоскости

основания ($Y \perp OY$) $OZ \perp$ плоскости основания.

Пока ~~что~~ $Y = (B, 0, 0)$

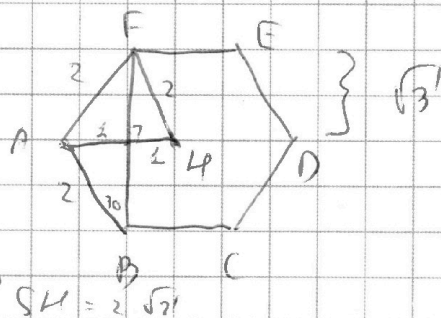
$$\vec{OY} = \vec{AF} + \lambda \cdot \vec{FS}$$

$$F = (1, \sqrt{3}, 0)$$

$$\vec{FS} = (1, -\sqrt{3}, -2\sqrt{2})$$

$$S = (2, 0, 2\sqrt{2})$$

$$\vec{FS} = (1, -\sqrt{3}, -2\sqrt{2})$$



$$\vec{OX} = \vec{OF} + \lambda \vec{FS} = (1 + \lambda \cdot 1; \sqrt{3} + \lambda \cdot (-\sqrt{3}); 0 + \lambda \cdot (-2\sqrt{2}))$$

$$\vec{X} = (\lambda + 1; \sqrt{3}(1 - \lambda); -2\sqrt{2}\lambda)$$

$$\vec{XY} = (\lambda + 1$$

$$\vec{Y} = (B - \lambda - 1; \sqrt{3}(\lambda - 1); 2\sqrt{2}\lambda)$$

$$|\vec{XY}|^2 = e^2 = (B - \lambda - 1)^2 + 3(\lambda - 1)^2 + 8\lambda^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Условие что $XY \parallel SAB$:

Найдем уравнение плоскости SAB :

Возьмем три точки: S, A, B тогда

$$\text{Плоск } SAH: ax + by + (z+d) = 0$$

$$A: a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 0 \rightarrow d = 0$$

$$B: B = (1, -\sqrt{3}, 0)$$

$$B: a - \sqrt{3}b = 0 \rightarrow a = \sqrt{3}b$$

$$S: 2a + 2\sqrt{3}c = 0$$

$$2\sqrt{3}b + 2\sqrt{3}c = 0 \rightarrow c = -\sqrt{1,5}b$$

$$SAB: \sqrt{3}b \cdot x + by - \sqrt{1,5}b \cdot z = 0$$

$$SAB: \sqrt{3}x + y - \sqrt{1,5}z = 0$$

$$\vec{n}_{SAB} \text{ — вектор нормали } \vec{n}_{SAB} = (\sqrt{3}; 1; -\sqrt{1,5})$$

$$\vec{n}_{SAB} \perp \overline{XY} \Rightarrow (\vec{n} \cdot \overline{XY}) = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{n} \cdot \overline{XY} = -0 \cdot 0 = \sqrt{3} \cdot (B-x-1) +$$

$$+ 1 \cdot (\sqrt{3}(x-1)) - \sqrt{1,5} \cdot (2\sqrt{3}x) = 0$$

$$= B - x - 1 + x - 1 - 2x \rightarrow 2x + 2 = B$$

$$B = 2x + 2$$

$$\rho^2 = B^2 + x^2 + 1 - 2Bx \rightarrow B + 2x + 3x^2 - 6x + 3 + 8y^2 =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$= 12x^2 + 12 - 24x - 24 - 4x + 4 =$$

$$= 12x^2 + 4x^2 + 8x + 4 - 4x^2 - 4x - 4x - 4 - 4x + 4 =$$

$$= 12x^2 - 4x + 4$$

Надо найти наименьшее значение функции

$$C(x) = x^2 = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

$$C^2 = 12 \cdot \frac{1}{36} - \frac{4}{6} + 4 = \frac{2}{6} - \frac{4}{6} + \frac{24}{6} = \frac{22}{6} = \frac{11}{3}$$

$$C = \sqrt{\frac{11}{3}}$$

$$\text{Ответ: } \sqrt{\frac{11}{3}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Найти наименьшее x^2 / формулы наименьшего

$$e^2 \rightarrow (e^2)_{\min}$$

$$(e^2)' = 0$$

$$e^2 = B^2 + x^2 + 1 - 2Bx - 2B + 2x + 3x^2 - 6x + 3 + 8x^2 =$$

$$= 12x^2 + B^2 - 2Bx - 2B - 4x + 4$$

Очевидно наименьшему e^2 достижается там, где

$$\frac{\partial(e^2)}{\partial x} = 0 \text{ и } \frac{\partial(e^2)}{\partial B} = 0 \text{ т.е. на границах}$$

$$e^2 \rightarrow +\infty$$

$$\frac{\partial(e^2)}{\partial x} = 0$$

$$= 24x - 2B - 4 \Rightarrow 12x - B = 2 \Rightarrow B = 12x - 2$$

$$\frac{\partial(e^2)}{\partial B} = 0$$

$$= -2x - 2 + 2B = 0$$

$$-2 - 2x + 24x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{11}; B = 10$$

$$\text{Тогда } e^2 = 12 \cdot \frac{9}{121} + 100 - \frac{60}{11} - 20 - \frac{12}{11} + \frac{44}{11} =$$

$$121 e^2 = 12 \cdot 9 + 12100 - 660 - 20 \cdot 121 -$$

$$-11 \cdot 12 + 44 \cdot 11 = 118380 = 3 \cdot 10 \cdot 3946 =$$

$$= 3 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 1973 = 4 \cdot 15 \cdot 1973$$

$$e = \frac{2 \cdot \sqrt{15} \cdot \sqrt{1973}}{11}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Условие 3 пирамиды:

если $n \geq 3$ точка в одной плоскости

и еще одна точка не лежащая в плоскости остальных.

Рассмотрим несколько случаев:

1) плоскость основания пирамиды - α , $\rho \perp \alpha$

способов выбрать вершины основания:

$$\frac{7!}{3!4!} = \frac{7!}{2!} = \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} + \binom{7}{2} =$$

$$7 \cdot 5 + 7 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 7 + 1 =$$

=

$$= 2 \cdot 14 + 1 = 99$$

способов выбрать вершину - 5

$$\text{Всего вершин} S_1 = 99 \cdot 5 = 495$$

2



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☐☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin \frac{\pi}{4} = a \quad \cos \frac{\pi}{4} = b$$

$$\frac{5}{4} \sqrt{1-4a^2b^2} + \frac{2ab^2}{1+a}$$

$$\frac{5}{4} \sqrt{1-4a^2b^2} + 2a$$

$$\frac{5}{4} \sqrt{1-4a^2b^2} + \frac{2a(1-a^2)}{1+a} =$$

$$= \sqrt{1-4a^2b^2} + 2a(1-a) =$$

$$= \sqrt{1-4a^2b^2} + 2a(1-a) =$$

$$= 2a^2 - 1 + 2a - 2a^2 = 2a - 1$$

$$\begin{array}{r} 1980 \\ \times 475 \\ \hline 2555 \\ \times 225 \\ \hline 2280 \end{array}$$

49

28

31

11

$$\boxed{19 \pm 3}$$

$$09453$$

$$\begin{array}{r} 09453 \\ \times 060 \\ \hline 57018 \\ 57018 \\ \hline 57018 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times 15 \\ \hline 15 \\ 11 \\ \hline 165 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 083211 \\ \times 184 \\ \hline 83211 \\ 166422 \\ 136533 \\ \hline 155555 \end{array}$$

$$484$$

$$= 4 \cdot 121 = 484$$

$$241 = 11 \cdot 21$$

$$801 = 9 \cdot 89$$

$$\begin{array}{r} 2420 \\ \times 20 \\ \hline 4840 \end{array}$$

13



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{5}{4} \sqrt{1-4a^2b^2} + \frac{2ab^2}{1+a} \quad b = \sqrt{1-a^2}$$

$$= \cos \frac{\pi}{2} + \frac{2a \sqrt{1-a^2}}{1+a}$$

$$\frac{1}{4} > \frac{2a \sqrt{1-a^2}}{1+a}, \quad a < \frac{\pi}{14}$$

$$1-a > 8a \sqrt{1-a^2}$$

$$1 > \sqrt{a(8\sqrt{1-a^2}-1)} > \sqrt{1-a^2}$$

$$a^2 < \left(\frac{\pi}{14}\right)^2$$

$$1 > a \cdot \left(\frac{\pi}{14}\right)$$

$$1 > 1-a^2 > \left(\frac{\pi}{14}\right)^2$$

$$\frac{\pi}{14} > 2a > a(8\sqrt{1-a^2}-1)$$

$$\frac{\pi}{2} >$$

$$284$$

$$\begin{array}{r} 142 \\ -180 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 180 \\ -142 \\ \hline 38 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 325 \\ -64 \\ \hline 261 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 130014 \\ -12 \quad 1325 \\ \hline 10 \quad 70 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26119 \\ -12 \quad 129 \\ \hline 21 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Вершин - n

Рёбра $\Sigma \text{углов} = 180(n-2)$

$$19^2 = (20-1)^2 =$$

$$= 400 - 1 - 40 =$$

$1440 =$

$$= 369 \cdot 361$$

$$\begin{array}{r} 180 \\ \times 181 \\ \hline \end{array}$$

$$S_n = a + (a+b) + \dots + (a+(n-1) \cdot b)$$

$$S_n + n \cdot b = (a+b) + (a+2b) + \dots + (a+nb) =$$

$$= S_n$$

$$S_n = a + (n-1)b + a + \dots + a + b + \dots$$

$$2S_n = 2a + (n-1)b + 2a + (n-1)b + \dots$$

$$\begin{array}{r} 10 \cdot 10 \\ 360 \\ \times 284 \\ \hline 76 \end{array}$$

$$\frac{2S_n}{n} = 2a + (n-1)b$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{a + (a + (n-1)b)}{2} \cdot n$$

$$76 =$$

$$2 \cdot 38 =$$

$$180(n-2) = \frac{(143 + 143 + (n-1) \cdot 2) \cdot n}{2}$$

$$4 \cdot 19$$

$$360n - 720 = 286n + 2n^2 - 2n$$

$$2n^2 - 76n + 360 = 0$$

$$n = \frac{76 \pm \sqrt{26^2 - 4 \cdot 2 \cdot 360}}{4}$$

$$19 \pm \sqrt{19^2 - 180}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin 50^\circ + \cos 30^\circ = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \sin 60^\circ - \cos 30^\circ$$

$$\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$$

SA.

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin \alpha + \cos \alpha =$$

$$5 \left(1 + \sin \frac{\pi}{14} \right) \sqrt{4 \left(\cos \frac{\pi}{7} + \sin \frac{3\pi}{14} \right)}$$

$$\frac{5}{4} \sqrt{\frac{\cos \frac{\pi}{7} + \sin \frac{3\pi}{14}}{1 + \sin \frac{\pi}{14}}}$$

$$\sin \frac{\pi}{14} = a$$

$$\cos \frac{\pi}{14} = b$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{7} \right) = 2ab$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{7} \right) = \sqrt{1 - 4a^2b^2}$$

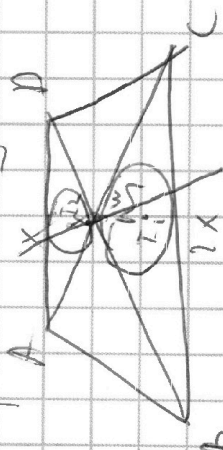
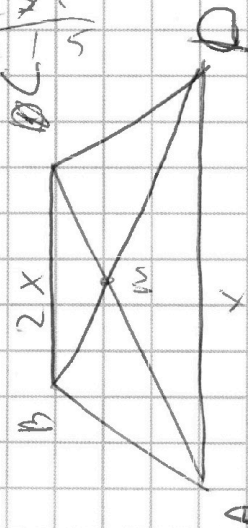
$$\sin \left(\frac{3\pi}{14} \right) = 2ab \cdot b + a \cdot \sqrt{1 - 4a^2b^2}$$

$$\frac{5}{4} \sqrt{\frac{\sqrt{1 - 4a^2b^2} + 2ab^2 + a \sqrt{1 - 4a^2b^2}}{1 + a}}$$

$$\frac{5}{4} \sqrt{\frac{\sqrt{1 - 4a^2b^2} (1 + a) + 2ab^2}{1 + a}}$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 55 \\ \hline 225 \\ 495 \\ \hline 2475 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 550 \\ \times 275 \\ \hline 3850 \\ 11000 \\ 11000 \\ \hline 151375 \end{array}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$20^2 = 764$$

$$\sin x = \frac{1}{4}$$

$$n^2 - 38n + 360 = 0$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$n = \frac{38 \pm \sqrt{38^2 - 4 \cdot 360}}{2}$$

$$= 19 \pm \sqrt{19^2 - 360} = 19 \pm 1$$

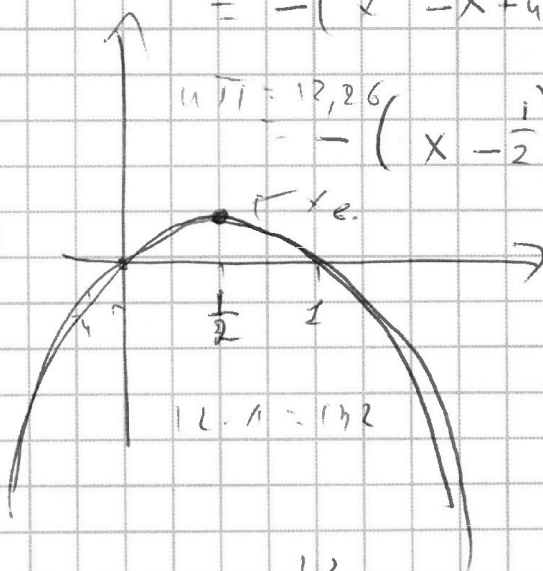
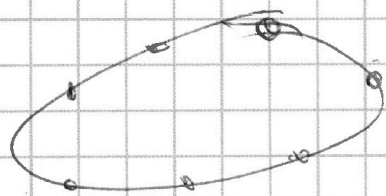
$$x(1-x) = \pi = \pi/4, 3\pi/4$$

$$\sin x < x$$

$$x - \sqrt{x} = -\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{\pi}{14} < \frac{\pi}{14} = \frac{3\pi}{14} < \frac{3\pi}{14}$$

$$= -\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} =$$



$$132 - 14 + 2 =$$

$$= 132 - 12 =$$

$$= 120$$

$$11\pi = 12,26$$

$$= -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

$$12 \cdot 11 = 132$$

$$29 - x \approx \frac{\pi}{2} \approx \frac{1}{2}$$

$$\frac{13}{4} = 3,25$$

$$\pi < \frac{13}{4}$$

$$66 + 2 - 14 =$$

$$= 66 - 12 =$$



$$54/6 = 9$$

$$6(11 - 2) = 0,9$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

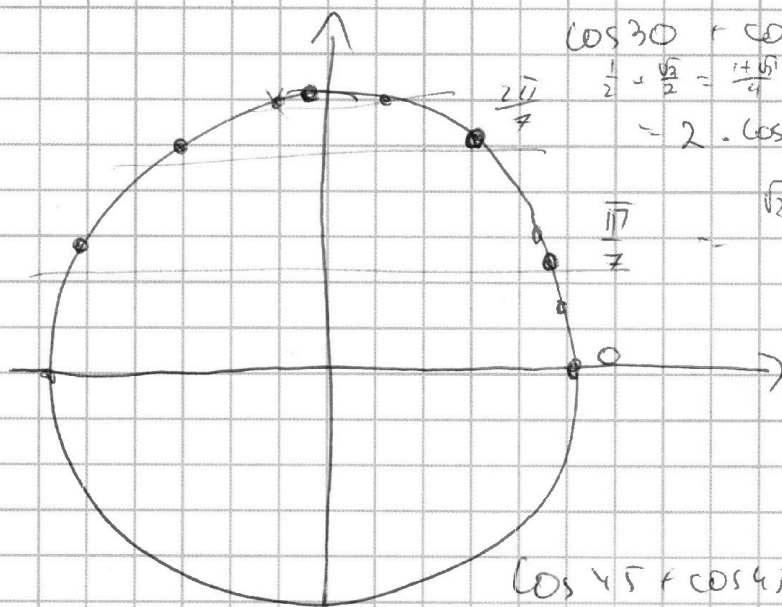
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

§ -

$\cos 2x$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$



$$\cos 30 + \cos 60 =$$

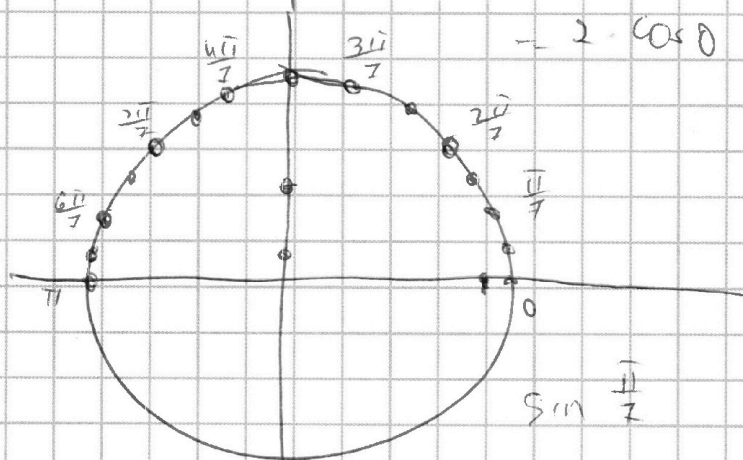
$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2 \cdot \cos 45 \cdot \cos 15 =$$

$$\sqrt{2} \cdot \cos 15$$

$$\cos 45 + \cos 45 = \sqrt{2} =$$

$$= 2 \cdot \cos 0 \cdot \cos 45 \checkmark$$



$$\sin \frac{\pi}{4}$$

$$\sin x + \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin 45 + \cos 45 = \sqrt{2} = 2 \cdot \sin 45 \cdot \cos 0 =$$

$$= 2 \cdot \sin 45 \cdot \cos 0 = \sqrt{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

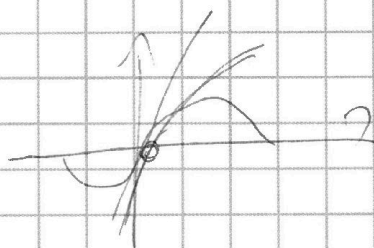
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin x \geq x$$

$$\sin x \leq x - \frac{x^3}{6}$$

$$\cos x$$

$$\cos x$$



$$24 - 12 \cdot 2 = 3.8$$

$$4x \ln 2 + 3y \ln 2 + z \ln(2^3 - 3) = \ln 6$$

$$\ln(2) \cdot (4x + 3y + 3z) + z \ln(8) = \ln 2 + \ln 3$$

$$z = 1$$

$$z = 1$$

$$\begin{array}{r} 792 \overline{) 12} \\ 6 \overline{) 1396} \\ 18 \overline{) 12} \end{array}$$

$$396 - 400 - 4 = 4.99$$

$$4x + 3y + 3z = 1$$

$$4x + 3y = -2$$

$$\begin{array}{r} 792 \overline{) 12} \\ 6 \overline{) 1396} \\ 18 \overline{) 12} \end{array}$$

$$792 - 12 \cdot 4 = 5.11$$

$$M = \{x, x+1, x+2, x+3, x+4, x+5, x+6\}$$

$$\sum M = 7x + 21 = 7(x+3)$$

$$p = 7x + 21 = (x+i_1), p \text{ - простое}$$

$$q = 7x + 21 = (x+i_2), q \text{ - простое}$$

$$p = 6x + 21 - i_1$$

$\leftarrow$ простое

$$q = 6x + 21 - i_2$$

$$(i_2 - i_1) \in [1, 6]$$

$$(p-q)(p+q) = 792$$

$$(i_2 - i_1) \mid (12x + 42 - i_1 - i_2) = 792$$

$$1 \text{ или } 4$$

$$792 \text{ или } 396 \text{ или } 198$$