МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12

1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 132°. Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?

2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x\ln 25 + y\ln 75 + z\ln 125 = \ln 45$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2+y^2+z^2$.

3. [4 балла] Из множества M, состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M, если $p^2 - q^2 = 1080$.

4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M, а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2, вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M, пересекает ω_1 в точках X и Y, а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1, если $I_1I_2 = 8$, а $MZ \cdot MY = 9$.

5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4\sin\dfrac{9\pi}{14}$ или $3\sin\dfrac{3\pi}{14} - 4\cos\dfrac{3\pi}{7}$?

6. [4 балла] Даны 12 точек: 8 из них лежат на одной окружности в плоскости α, а остальные 4 расположены вне плоскости α. Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α. Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?

7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 1 и боковым ребром $\sqrt{2}$. Точка X лежит на прямой SF, точка Y – на прямой AD, причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
X						

СТРАНИЦА 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

~~[illegible]~~ Сумма углов n-угольника $= 180^\circ(n-2)$

$\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $n(131^\circ + n) = 180^\circ(n-2)$

$n^2 - 49n + 360 = 0$ D — не ~~[illegible]~~ квадрат целого числа

$\Rightarrow$ таких n не существует

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

2.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+2y+3z=1 \\ y=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cancel{2x+2y=-3} \qquad 2x+3z=-3$$

$2x+3z=-3$

$2x=-3z-3$, $\Rightarrow x \vdots 3$ $(x=3n)$

$6n+3z=-3$

$2n+z=-1$

$$\begin{cases} n=1+t \\ z=-1-2t \end{cases}, t\in Z$$

$x^2+y^2+z^2 = x^2+4+z^2$

$x^2+z^2 = 9n^2+z^2 = 9(t+1)^2+(1+2t)^2 =$

$= 9t^2+18t+9+4t^2+4t+1 = 13t^2+22t+10 = f(x)$

$X_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{11}{13}$ $(X_0; Y_0)$ - координата вершины $f(x)$

$y_0 = \frac{121}{13} + \frac{242}{13} + 10 = \frac{363}{13} + 10 = \frac{363+130}{13} =$

коэф. при $x^2 > 0 \Rightarrow f(x)$ - парабола ветви вверх $\Rightarrow$

$f(x) \geq y_0 = \frac{493}{13}$. $38 = \frac{494}{13} > \frac{493}{13} > \frac{481}{13} = 37$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

2. $x, y, z \in \mathbb{Z}$

$$x\ln 25 + y\ln 75 + z\ln 125 = \ln 45$$

$$\cancel{\ln(25^x) + \ln(75^y) + \ln(125)^z = \ln 45}$$

$$\ln(25^x) + \ln(75^y) + \ln(125)^z = \ln 45$$

$$\ln\left(5^{2x}\cdot 5^{2y}\cdot 3^y\cdot 5^{3z}\right) = \ln\left(5\cdot 3^2\right)$$

$$5^{2x+2y+3z}\cdot 3^y = 5^1\cdot 3^2$$

~~Т.к. x, y, z — целые числа~~

Т.к. x, y, z — целые числа, 3^y не представимо как 5^k $(k \neq 0)$ и $5^{2x+2y+3z}$ не представимо как 3^k.

Значит степень вхождения 5 в $(3^y\cdot 5^{2x+2y+3z})$ — это $5^{2x+2y+3z}$

Аналогично, степень вхождения 3 в $(5^{2x+2y+3z}\cdot 3^y)$ — это 3^y.

Значит $\begin{cases} 5^{2x+2y+3z} = 5^1 \\ 3^y = 3^2 \end{cases}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow$ 38 – наименьшее целое число, большее $\frac{493}{13}$

$\Rightarrow \min(x^2+z^2) = 38 \Rightarrow \min(x^2+y^2+z^2) = 38+4 = 42$

Ответ: 42

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$1+2+3+\ldots+5 \le k \le 1+2+\ldots+6$

$p = 6a + k$

$15 \le k \le 21$

$6a+k \not\vdots\, 3$ значит $k \not\vdots\, 3 \Rightarrow$

$16 \le k \le 20$

$p = 271 = 6a + k$

$\Rightarrow 255 \geqslant 271 - k \geqslant 251$

~~$a \geqslant 42$ т.к. $6a$~~

$\Rightarrow 255 \geqslant 6a \geqslant 251$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 42 \\ k = 19 \end{cases}$

$\Rightarrow M = \{42; 43, 44, 45, 46, 47, 48\}$

Ответ: $M = \{42; 43; 44; 45; 46; 47; 48\}$

$\Rightarrow$ Либо 1) $a \,\vdots\, 2$ $\quad b \,\vdots\, 2^2$

Либо 2) $a \,\vdots\, 2^2$ $\quad b \,\vdots\, 2$

1) ~~a...~~ Возможно два варианта: $a \not\vdots\, 5$ или $a \,\vdots\, 5$

$a \,\vdots\, 5$: $\quad a = 2 \cdot 5$ $\quad b = 2^2 \cdot 3^3$ $\quad$ I

$a \not\vdots\, 5$: $\quad a = 2$ $\quad b = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$ $\quad$ II

2)

$a \,\vdots\, 5$: $\quad a = 2^2 \cdot 5$ $\quad b = 3^3 \cdot 2$ $\quad$ III

$a \not\vdots\, 5$: $\quad a = 2^2$ $\quad b = 3^3 \cdot 2 \cdot 5$ $\quad$ IV

I: $\quad p = \frac{a+b}{2} = 5 + 54 = 59$

$q = \frac{b-a}{2} = 49$ ← не простое. Пара не подходит

II: $\quad p = 271$

$q = 269$

III: $\quad p = 37$

$q = 17$, но $q \geq$ ~~$7 \cdot 1+2+3+\ldots+7 = 7 \cdot 4 =$~~

$1+2+3+4+5+6 = 21$. q не подходит

(минимальная сумма)

IV: $\quad p = 137$

$q = 133$, $133 \,\vdots\, 7$ Пара не подходит.

$\Rightarrow$ $p = 271$ $\quad q = 269$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

3. $M=\{a, a+1, a+2, a+3, a+4, a+5, a+6\}$

$p^2-q^2=(p-q)(p+q)=3^3\cdot 2^3\cdot 5$

т.к. $p, q\in\mathbb{N}$, $p+q>p-q$

~~Запишем всевозможные~~

Пусть $a=p-q$; $b=p+q \Rightarrow a<b$ $ab=3^3\cdot 2^3\cdot 5$

~~Запишем всевозможные варианты a, и b учитывая что ... a<b и a, b ∈ N~~

~~a | b~~
~~5~~
~~5·2~~
~~5·2²~~

Допустим $a\vdots 3^3$, тогда если a будет кратно другому простому числу, то $a\geq 3^3\cdot 2$, тогда $b\leq\frac{3^3\cdot 2^3\cdot 5}{3^3\cdot 2}=$ $=40$, но в таком случае $a>b$?!

Значит если $a\vdots 3^3$, то $a=3^3$.

Мы знаем, что $a+b=2p \Rightarrow 3^3+\frac{1080}{3^3}\vdots 2$

т.к. $3^3+2^3\cdot 5\vdots 2$, но это не так $\Rightarrow$ $a\not\vdots 3^3$. Если $a\vdots 3$ и $b\vdots 3$, то ~~2p~~ $2p\vdots 3$, ведь $a+b\vdots 3$. Значит: $p=3$.

Такого не ~~м~~ может быть т.к. p - сумма ~~семи~~ шести нат. чисел и $p\geq 6$. Значит, что b всегда $\vdots 3^3$.

$a+b=2p \Rightarrow$ Если одно из чисел будет $\vdots 2^3$, то другое будет $\not\vdots 2$, значит они будут разной четности и $a+b\not\vdots 2$

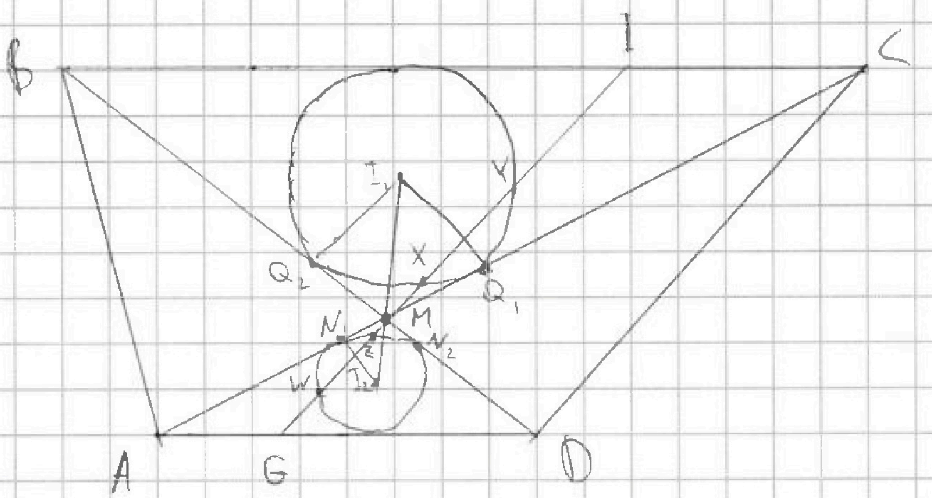
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№ 4.



1) I_1 лежит на бисс. $\angle BMC$, I_2 лежит на бисс. $\angle AMD$ (потому что инцентр) значит I_2, M, I_1 лежит на одной прямой.

Пусть MN_1, MN_2 - отрезки касательных из (.)M к W_2; пусть MQ_1, MQ_2 - отрезки касат. проведенные из (.)M к W_1. Значит:

$$MQ_2 = MQ_1 = \frac{BM + MC - BC}{2}$$

$$MN_1 = MN_2 = \frac{AM + MD - AD}{2}$$

$\triangle AMD \sim \triangle BMC$ т.к. $\angle AMD = \angle BMC$, $\angle CAD = \angle ACB$ ($AD \parallel BC$)

~~Пусть MA AAD. B (.)~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

5

$$5 - 4\sin\frac{9\pi}{14} \quad V \quad 3\sin\frac{3\pi}{14} - 4\cos\frac{3\pi}{7}$$

пусть $\alpha = \frac{3\pi}{14}$

$$5 - 4\sin 3\alpha \quad V \quad 3\sin\alpha - 4\cos 2\alpha$$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \Rightarrow$

$$5 - 4\sin 3\alpha \quad V \quad 3\sin\alpha - 4 + 8\sin^2\alpha$$

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \Rightarrow$

$$5 - 12\sin\alpha + 16\sin^3\alpha \; V \; 3\sin\alpha - 4 + 8\sin^2\alpha$$

$$16\sin^3\alpha - 8\sin^2\alpha - 15\sin\alpha + 9 \; V \; 0$$

Заменим пусть $t = \sin\alpha$:

$$16t^3 - 8t^2 - 15t + 9 = 0$$

$t = -1$ – подходит

$$\begin{array}{l|l} 16t^3 - 8t^2 - 15t + 9 & t+1 \\ \hline 16t^3 + 16t^2 & 16t^2 - 24t + 9 \\ -24t^2 - 15t & \\ -24t^2 - 24t & \\ 9t + 9 & \\ 9t + 9 & \\ 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow 16t^3 - 8t^2 - 15t + 9 = (t+1)(16t^2 - 24t + 9) = (t+1)(4t-3)^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

сравнивается

5. $5 - 4\sin\frac{9\pi}{14} \vee 3\sin\frac{3\pi}{14} - 4\cos\frac{3\pi}{7}$

Замена: пусть $\frac{3\pi}{14} = \alpha$

$5 - 4\sin 3\alpha \vee 3\sin\alpha - 4\cos 2\alpha$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$; $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

$\Rightarrow$ $5 - 12\sin\alpha + 16\sin^3\alpha \vee 3\sin\alpha - 4 + 8\sin^2\alpha$

Замена: пусть $t = \sin\alpha$

$5 - 12t + 16t^3 \vee 3t - 4 + 8t^2$

$16t^3 - 8t^2 - 15t + 9 \vee 0$

исследуем ~~f(x)~~ $f(t) = 16t^3 - 8t^2 - 15t + 9$

$t = -1$ — корень $f(t)$ ~~=>~~

$\Rightarrow f(t) = (t+1)(16t^2 - 24t + 9) = (t+1)(4t-3)^2$

$4t - 3 \neq 0$ т.к. $t \neq \frac{3}{4}$, ведь $\sin\frac{3\pi}{14} \neq \frac{3}{4}$

т.к. $\frac{3\pi}{14} < \underset{\frac{\pi}{4}}{\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}} < \arcsin\frac{3}{4}$

Значит $(4t-3)^2 > 0$. Тогда остается сравнить $t+1$ и 0. ~~$\sin\frac{3\pi}{14} \vee -1$~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА 2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$0 < \frac{3\pi}{14} < \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \quad 0 < \sin\frac{3\pi}{14} < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 1 < \sin\frac{3\pi}{14} + 1 < \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$$

$$\Rightarrow \quad t+1 > 0$$

$$\Rightarrow \quad (t+1)(4t-3)^2 > 0$$

$$\Rightarrow \quad 5 - 4\sin\frac{9\pi}{14} > 3\sin\frac{3\pi}{14} - 4\cos\frac{3\pi}{7}$$

Ответ: $5 - 4\sin\frac{9\pi}{14} > 3\sin\frac{3\pi}{14} - 4\cos\frac{3\pi}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

~~Тогда если основание $\notin \alpha$~~

~~N - число пирамид. $N = 4$.~~

Найдем кол-во треугольных пирамид N.

$$N = \frac{K \cdot Q}{4}$$

K - кол-во способов выбрать основание пирамиды

Q - кол-во способов выбрать вершину

Понятно, что основание и вершина задают треуг. пирамиду. Но одну и ту же пирамиду можно задать 4 способами (т.к. у треуг. пирамиды 4 боковые грани и 4 верш.)

Значит делим на 4. Также понятно, что любые три точки могут быть основанием пирамиды т.к. любые три точки лежат в одной плоскости.

Значит кол-во способов выбрать основание - кол-во способов выбрать 3 любые точки $\Rightarrow K = C_{12}^3$

тогда вершиной ~~может~~ может быть любая из 9 оставшихся точек $\Rightarrow Q = 9 \Rightarrow N = \frac{C_{12}^3 \cdot 9}{4}$.

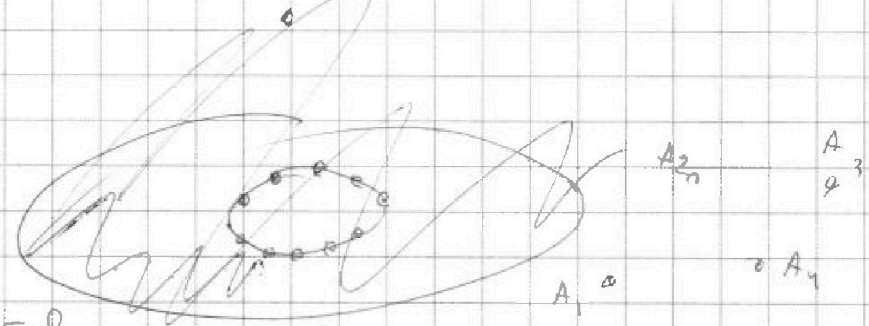
Остается ~~найти~~ найти кол-во пирамид с основанием содержащим больше 3х точек. A_1, A_2, A_3, A_4 - не лежат в одной пл. $\Rightarrow$ такое основание $\notin \alpha$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

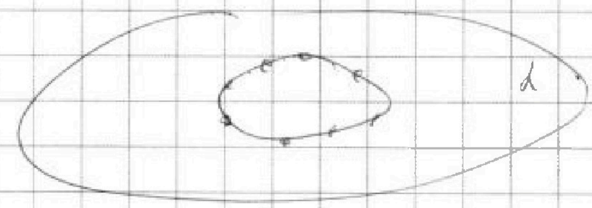
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

6.



$\in$ – лежит в.



Точки $A_1, A_2, A_3, A_4 \notin \alpha$,

Точки A_1, A_2, A_3, A_4 не лежат в одной плоскости, поскольку если бы лежали, то лежали бы в плоскости α. ~~Значит~~ Также никакие три точки из $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ не лежат ~~на од~~ в одной плоскости с точкой, которая $\in \alpha$ т.к. в противном случае 4 эти точки лежали бы в α, но A_1, A_2, A_3, A_4 не лежат в α. ~~Значит основанием пирамиды не может быть набор точек, в котором какие-то $\in \alpha$, а какие-то $\notin \alpha$. И основанием пирамиды не может быть $A_1 A_2$, $A_1 A_2 A_3 A_4$ т.к. они не лежат в одной плоск.~~

~~Значит: Либо основанием будет либо основание $\in \alpha$ либо основанием является $A_1 A_2 A_3$ или $A_1 A_2 A_4$ или $A_2 A_3 A_4$ или $A_1 A_3 A_4$ (если основание не лежит в α)~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Понятно, что любой набор точек $\in \alpha$ (точек хотя бы 4) может являться основанием ~~пирамид~~ пирамиды, т.к. если многоугольник описан окружностью, то он всегда выпуклый. ~~т.к.~~ ~~Значит~~

$M = B \cdot C$ $\quad$ B – кол-во способов выбрать основание

C – кол-во способов выбрать вершину.

Т.к. основание $\in \alpha$, вершина $\notin \alpha$, значит вершиной может быть A_1, A_2, A_3, A_4 (4 варианта) $\Rightarrow C = 4$

Кол-во способов выбрать основание с 4 точками = выбрать 4 точки в плоскости α т.е. C_8^4

Кол-во способов выбрать основание с n (где $4 \le n \le 8$) точками – C_8^n. Значит $B = C_8^4 + C_8^5 + C_8^6 + C_8^7 + C_8^8$

$$M = 4(C_8^4 + C_8^5 + C_8^6 + C_8^7 + C_8^8)$$

Тогда всего способов $M + N = 4(C_8^4 + C_8^5 + C_8^6 + C_8^7 + C_8^8) + \frac{C_{12}^3 \cdot 9}{4}$

Ответ: $4(C_8^4 + C_8^5 + C_8^6 + C_8^7 + C_8^8) + \frac{C_{12}^3 \cdot 5}{4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

3 7

$M = \{a, a, a\}$

$\{a, a+1, a+2, a+3, a+4, a+5, a+6\}$

$a = 40$ 41

270 42

246 $p^2 - q^2 = 1080$

252

$(p-q)(p+q) = 3^3 \cdot 2^3 \cdot 5$

$27 \cdot 4 \cdot 10$

$3^3 \cdot 2^3 \cdot 5$

$5 \cdot \; 3^3 \cdot 2^3$ 1)

$5 \cdot 2 \; 3^3 \cdot 2^2$ 4)

$5 \cdot 2^2 \; 3^3 \cdot 2$ 3)

$2^3 \; 5 \cdot 3^3$ 5)

$2^2 \; 5 \cdot 3^3 \cdot 2$ 6)

$2 \; 5 \cdot 3^3 \cdot 2^2$ 7)

$5 \cdot 3^3 \cdot 2^3$ 8)

$2p = 5 + 3^3 \cdot 2^3$

$(p-q) + (p+q) = 2p \; \vdots \; 2$

$p = 3$

$(p-q) - (p+q) = -2q \; \vdots \; 3$

$q = 3$

$a \geq 1$

$p = 6a +$

$\frac{p+q}{p-q} = \frac{p-q+2q}{p-q}$

$2q \; \vdots \; p-q$

$2q = kp - kq$

$k \; \vdots \; q$

$2 = n(p-q)$

$n = 1$

$p - q = 2$

$27 \cdot 2 + 5$

$54 + 5$

59

1) x

2) $p = 59$ $q = 45$

3) $p = 10 + 27 = 37$

$q = 17$

$\{541 \; 271$

$q = 269\}$

6) $p = 2 + 5 \cdot 27 = 137$

$q = 133$ x

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$MX \cdot MY = 4$

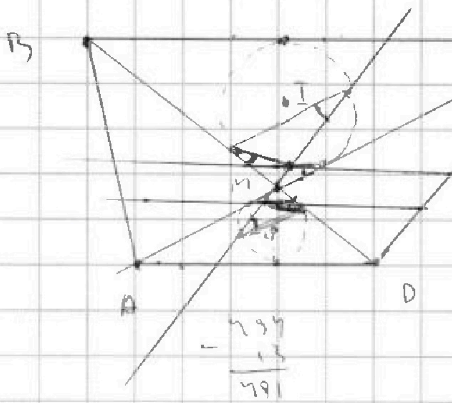
$a - MY$

$493 : 13 = 38$

$\frac{MX}{2} \cdot MY = 9$

$MX \cdot MY = 18$

$MQ^2 = 3\sqrt{2}$



26
39
78
$130 - 26 = 104$

$38 \cdot 13 = 494$

$494 - 13 = 491$

$I_1 I_2 = 8$

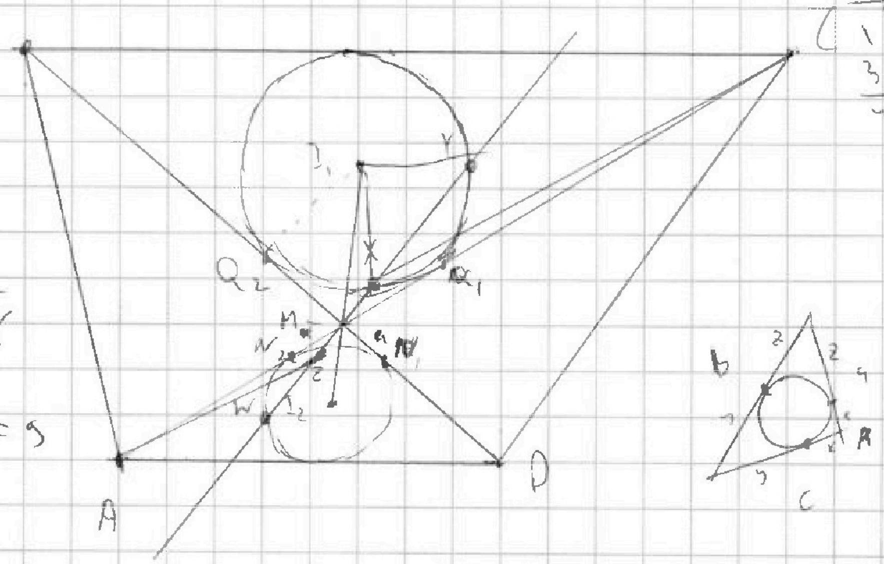
$4MZ \cdot MW = MX \cdot MY$

$MZ \cdot MY = 9$

$R_{\triangle} \quad r_1 - ?$

$4\frac{MZ}{MX} = \frac{MY}{MW}$

$38 \cdot 13 = 114 + 38\ldots = 494$



$\frac{MZ}{MW} = \frac{MX}{MY}$

$MX \cdot MW = 9$

$x = \frac{a + c - b}{2}$

$MX \cdot MY = MQ^2 = 4 \cdot MZ \cdot MW$

$MZ \cdot MW = MN^2$

$MN = \frac{AM + MD - AD}{2}$

$MQ = \frac{AB + AC - BC}{2} = AM + MD - AD$

$MQ = 2MN$

$MQ^2 = 4MN^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$k+6$

k

$k+2$ $k+7$

$6\cdot 120 = 4\cdot 160$

$$n\cdot k + 2(1+2+\dots+n-1)$$

$$= n\cdot k + (n-1)\cdot n$$

$$= n(k+n-1) = 180(n-2)$$

$$(131+n)n = 180n - 2$$

$4\cdot 5$ $3\cdot 5\cdot 5$ $5\cdot 5\cdot 5$ $5\cdot 3\cdot 3$

2.

$$x\ln 25 + y\ln 75 + z\ln 125 = \ln 45$$

$\min x^2+y^2+z^2$

$$x\ln 5 + x\ln 5 + y\ln 5 + y\ln 5 + y\ln 3 + 3\cdot z\cdot \ln 5 = 2\ln 3 + \ln 5$$

$$(2x+2y+3z)\ln 5 + y\ln 3 = \cancel{\ln 5 + 2\ln 3}$$

$$\ln 5\cdot 3$$

$$\ln\left(5^{2x+2y+3z}\right)\cdot 3^{y} = \ln 5\cdot 3^{2}$$

$x^2+y^2 - \min$

$$5^{2x+2y+3z}\cdot 3^{y} = 5\cdot 3^{2}$$

$2x+3z = -3$

$x =$

$$2x+2y+3z = 1$$

$$y = 2$$

$$2x+3z+4 = 1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$S = 180^\circ(n-2)$

$n(132 + \ldots (n-1))$

$132 \cdot 4 + 2(1+2+3)$

$132 + 134 + 136 + 138$

$(n-1) \cdot n$

$(132)n + 2(1+2+3+\ldots+n-1)$

$n(131+n) = 180^\circ(n-1)$

$S = 132n +$

$n(131+n)$

$130 \cdot n + 2\frac{n(n-1)}{2} = n(n+131) = 180^\circ(n-2)$

$n^2 + 131n = 180n - 360$

$n^2 - 49n + 360 = 0$

$D = 49^2 - 360 \cdot 4$

$= 134n - 2(1+2+3+\ldots+n)$

$= 134 - n(n+1)$

$132 \quad 130 \quad 128 \quad 126 \quad = (n-2)180^\circ$

$132 \cdot n - (2+4+6+\ldots+$

$-2(1+2+3+\ldots(n-1))$

$134n - n^2 - n = 180n - 360$

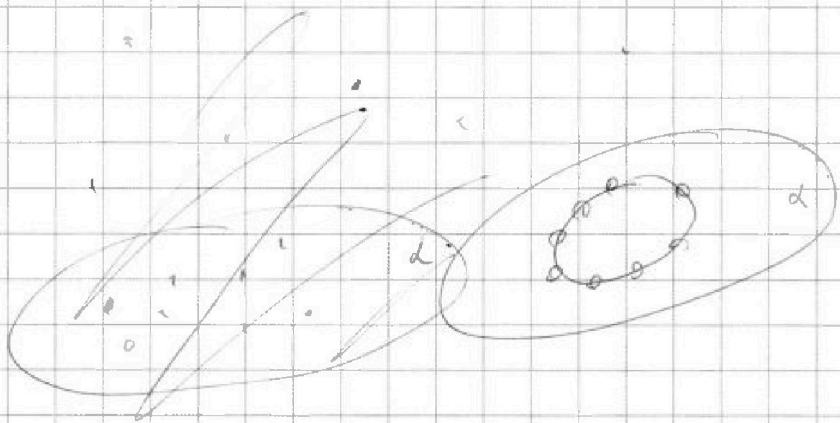
$n^2 + 47n - 360 = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

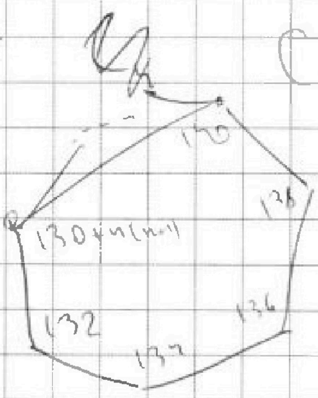
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



1. Если основание $\in \alpha$:

$$(C_8^3 + C_8^4 + C_8^5 + C_8^6 + C_8^7 + \cancel{C}\ 1) \cdot 4$$

$$+ \quad C_4^3 \cdot 19$$

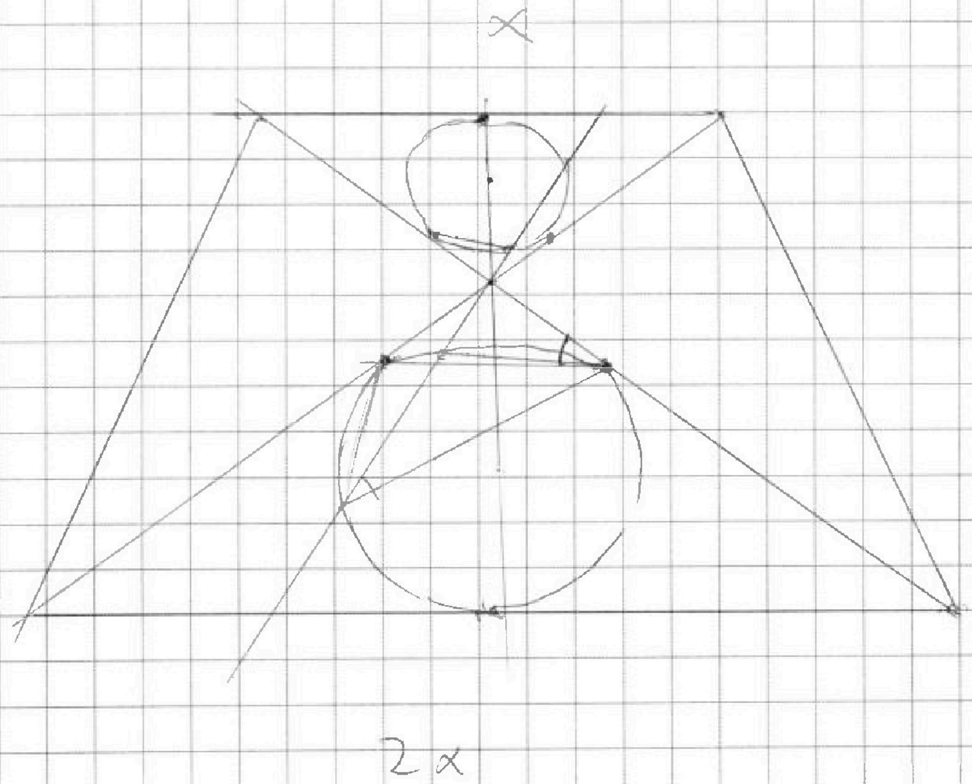


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

3. $M = \{a, a+1, a+2, a+3, a+4, a+5, a+6\}$

$p^2 - q^2 = (p-q)(p+q) = 1080 = 3^3 \cdot 2^3 \cdot 5$

Пусть $p-q = a$, $p+q = b$

Тогда: $\begin{cases} ab = 3^3 \cdot 2^3 \cdot 5 \\ \frac{a+b}{2} = p \\ \frac{b-a}{2} = q \end{cases}$

т.к. $p, q \in \mathbb{Z}$, $a+b \vdots 2 \Rightarrow a, b$ – одной четности

Но либо a, либо b точно будет $\vdots 2$ т.к. $ab \vdots 2$

$\Rightarrow a \vdots 2$, $b \vdots 2$ (одной четности)

$\Rightarrow a = 2a_1$, $b = 2b_1$

$ab = 4a_1b_1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА 2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

~~Ф.~~ 4 Пусть $ZM \cap AD = G$

$ZM \cap BC = I$

$\angle AMG = \angle IMC$

~~=> Если~~

Т.к. $\triangle AMD \sim \triangle BMC$, $\frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$, то

$\frac{DM}{MB} = \frac{AM}{MC} = \frac{1}{2}$, ~~також~~ B, M, D ~~и A, M, C~~ лежат на одной пр.

и A, M, C – лежат на одной прямой => при гомотетии ~~отн~~ относительно (.) M с коэф. -2 $\triangle AMD \to \triangle CMB$

=> ~~ω_1~~ $\omega_2 \to \omega_1$ и т.к. $\angle AMG = \angle IMC$, $MN \to MQ$, $I_2M \to I_1M$

$I_2N_1 \to I_1Q_1$, $MZ \to MX$ => $\frac{MX}{MZ} = 2$, $\frac{MN_1}{MQ_1} = \frac{1}{2}$, $\frac{I_1Q_2}{I_2N_1} = 2$

Запишем степень точки M отн. ω_1 и ω_2!

$MQ_1^2 = MX \cdot MY = 4MN_1^2$ ~~$= 2MZ$~~

$\frac{I_2M}{I_1M} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow MI_1 = \frac{2}{3} 8$

$MZ \cdot MY = \frac{1}{2} MX \cdot MY = \frac{1}{2} MQ_1^2 = 9$

=> $MQ_1 = 3\sqrt{2}$, $MN_1 = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

$IQ_2 \perp MQ_2$ => $IQ_2^2 + MQ_2^2 = MI_2^2$

Аналогично ~~IQ_2~~ ~~$I_2N_1^2 + N_1M^2 = I_2M^2$~~

$IQ_2^2 = \frac{256}{9} - 18$

Ответ: $r = \sqrt{\frac{256}{9} - 18}$