



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12



1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 132° . Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?
2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.
3. [4 балла] Из множества M , состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M , если $p^2 - q^2 = 1080$.
4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M , а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2 , вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M , пересекает ω_1 в точках X и Y , а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1 , если $I_1 I_2 = 8$, а $MZ \cdot MY = 9$.
5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14}$ или $3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$?
6. [4 балла] Даны 12 точек: 8 из них лежат на одной окружности в плоскости α , а остальные 4 расположены вне плоскости α . Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α . Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?
7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 1 и боковым ребром $\sqrt{2}$. Точка X лежит на прямой SF , точка Y – на прямой AD , причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть это n -угольник. Тогда сумма его углов: $S = 180(n-2)$. С другой стороны, т.к. углы образуют ариф. прогрессию, то $S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n =$

$$= \frac{a_1 + (n-1)d + a_1}{2} \cdot n = \frac{2 \cdot 132 + (n-1) \cdot 2}{2} \cdot n = (131 + n)n$$

$$\text{I. } d=2 \Rightarrow 132^\circ - \min \angle.$$

$$d=-2 \Rightarrow 132^\circ - \max \angle.$$

$$S = 180n - 360 = 131n + n^2$$

$$n^2 - 49n + 360 = 0$$

$$D = 49^2 - 360 \cdot 4 = 31^2$$

$$n_{1/2} = \frac{49 \pm 31}{2} = \begin{bmatrix} 40 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\text{II. } \frac{2 \cdot 132 - 2(n-1)}{2} \cdot n =$$

$$= (132 + 1 - n)n = 180(n-2)$$

$$133n - n^2 = 180n - 360$$

$$n^2 + 47n - 360 = 0$$

$$D = 47^2 + 360 \cdot 4 = 3649$$

$$\sqrt{D} \notin \mathbb{N} \Rightarrow n \notin \mathbb{N}. \text{ Против.}$$

Тогда наиб. $n=40$.

Ответ: 40 вершин.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 &= \ln 45 & x, y, z \in \mathbb{Z} \\ \ln 25^x + \ln 75^y + \ln 125^z &= \ln 45 & a^b > 0, a > 0 \\ \ln(25^x \cdot 75^y \cdot 125^z) &= \ln 45 & \text{огр. на ОДЗ нет.} \\ 25^x \cdot 75^y \cdot 125^z &= 45, \text{ т.к. } \ln x & \text{монотонна.} \\ 5^{2x+2y+3z} &= 5 \cdot 3^2 & | : (5 \cdot 3^2) \\ 5^{2x+2y+3z-1} &= 3^{2-y} \end{aligned}$$

$5^a = 3^b$ пересекаются в $a=b=0$ (т.к. это очевидно при $a, b \in \mathbb{Z}$) *

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2x + 2y + 3z - 1 &= 0 \\ 2 - y &= 0 & (\Leftrightarrow) y = 2 & (\Leftrightarrow) \end{aligned}$$

$$2x + 4 + 3z = 1 \Leftrightarrow 2x + 3z = -3.$$

$$z = \frac{-3-2x}{3} = -1 - \frac{2x}{3}$$

$$x, z \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$x^2 + z^2 + y^2 =$$

$$= x^2 + z^2 + 2^2 \geq 4.$$

x и z одновременно не нули $\Rightarrow$ ~~есть~~ кто-то

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 5.$$

Пример на 5: $x = 0, z = -1, y = 2.$

$$\begin{aligned} \text{Проверка: } 2 \ln 75 + (-1) \ln 125 &= \ln \left(75^2 \cdot \frac{1}{125} \right) = \\ &= \ln \frac{25^2 \cdot 3^2}{5^3} = \ln \frac{5^4 \cdot 3^2}{5^3} = \ln 45 \end{aligned}$$

Ответ: ~~5~~ 5 при $x=0, z=-1, y=2$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

* Пусть $5^a = 3^b$ имеет другое решение,
 $a \neq 0$ и $b \neq 0$; $a, b \in \mathbb{Z}$:

если $a > 0 \Rightarrow 5^a > 1 \Rightarrow b > 0$, т.к. $3^b > 1$

$\Rightarrow 5^a : 5$, но $3^b : 5$. Проблема

если $a < 0 \Rightarrow 5^a < 1 \Rightarrow b < 0$, т.к. $3^b < 1$

$\Rightarrow 5^a = 3^b \Rightarrow 3^{-b} = 5^{-a}$, $5^{-a} : 5$, но $3^{-b} : 5$

при $b \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ проблема $\Rightarrow$ единственное
решение при $a = 0 = b$ в $\mathbb{Z}$ числах.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть нам даны числа $a, a+1, \dots, a+6$.

$p \neq q$
 p и q — простые $\Rightarrow p, q$ нечет., т.к. $(p^2 - q^2) : 2 \Rightarrow$
 $(p-q)(p+q) = 2^3 \cdot 5 \cdot 3^3$. $(p+q)$ и $(p-q) : 2$,

$p+q$ и $p-q$ не могут одновременно $: 3$,
т.к. иначе $p \equiv -q \equiv q \pmod{3} \Rightarrow q : 3 \Rightarrow$

$q = 3 \Rightarrow p^2 = 1089$, ~~но 1089 не квадрат~~ $\Rightarrow$

$p = \pm 33$, но 33 не простое. $\Rightarrow$ I $p-q : 3^3$ или

II $p+q : 3^3$, т.к. $\text{НОД}(p-q, p+q) : 3$.

I. $\left. \begin{matrix} p-q : 3^3 \\ p-q : 2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow p-q : 54 \Rightarrow \begin{matrix} p+q \geq 54 = 3^3 \cdot 2 & (\text{т.к. } p^2 - q^2 = \\ p+q \leq 2 \cdot 5 = 20 & = 2^3 \cdot 5 \cdot 3^3) \end{matrix}$

Противоречие, т.к. $q > 0$.

II. $\left. \begin{matrix} p+q : 3^3 \\ p+q : 2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow p+q : 54$. $(p+q)(p-q) = 5 \cdot 3^3 \cdot 2^3$

① $\begin{cases} p+q = 54 \\ p-q = 20 \end{cases}$	$\begin{cases} p = \frac{54+20}{2} = 37 \\ q = \frac{54-20}{2} = 17 \end{cases}$	① $3^3 \cdot 2$ $2^2 \cdot 5$	
② $\begin{cases} p+q = 108 \\ p-q = 10 \end{cases}$	$\begin{cases} p = \frac{108+10}{2} = 59 \\ q = \frac{108-10}{2} = 49 \end{cases}$	② $3^3 \cdot 2^2$ $2 \cdot 5$	
		$3^3 \cdot 2^3$ 5	невозможно, т.к. $p-q : 2$
		③ $3^3 \cdot 2 \cdot 5$ 2^2	
		④ $3^3 \cdot 2^2 \cdot 5$ 2	
		$3^3 \cdot 2^3 \cdot 5$ 1	невозможно, т.к. $p-q : 2$

③ $\begin{cases} p+q = 54 \cdot 5 = 270 \\ p-q = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} p = \frac{270+4}{2} = 137 \\ q = \frac{270-4}{2} = 133 \end{cases}$, $q : 7$, $q \neq 7$, q не простое



1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{4} \begin{cases} p+q=540 \\ p-q=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p = \frac{540+2}{2} = 271 \\ q = \frac{540-2}{2} = 269 \end{cases}$$

Они оба
как простые,
можно
проверить

а) Если $p=37, q=17 \Rightarrow p-q=a_i-a_j$

Т.к. p и q пересекаются по одному числу.

$q \geq 1+2+3+4+5+6 = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21$, но $q=17 \Rightarrow$
противоречие.

б) Если $p=271, q=269 \Rightarrow p-q=a_i-a_j$

$q \geq a+a+1+\dots+a+5 = 6a+15 \Rightarrow$ $q \leq a+7+a+6+\dots+a+2 =$

$6a \leq 269-15 = 254$
 $a \leq 42 + \frac{1}{3}$

$= 6a+28-1$

$269-28 \leq 6a$

$242 \leq 6a$

$40 + \frac{1}{3} \leq a$

$\Rightarrow a=41$ или $a=42$

$a=41: a+a+\dots+a+1 =$

$= 41 \cdot 6 + 21 = 246 + 21 = 267$

~~$p = (a+7) + (a+6) + (a+5) +$~~

~~$(a+4) + (a+2) + (a+1) + a$~~

~~$q = (a+7) + (a+6) + a$~~

~~$+ (a+4) + (a+3) + (a+2) + (a+1)$~~

Проблема т.к. сумма
шести чисел $< q < p$

$a=42: a+a+1+\dots+a+5 =$

$= 42 \cdot 6 + 1 + \dots + 5 = 252 + 15$

$= 267$

$p = a + (a+1) + (a+3) + (a+4)$

$+ (a+6) + \dots + (a+5)$

$q = a + (a+1) + (a+2) + (a+3)$

$+ (a+5) + (a+6)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

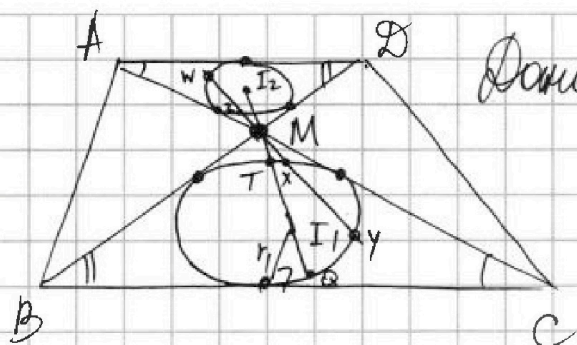
Ответ: числа $\{42, 43, 44, 45, 46, 47, 48\} = M$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $\frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$ $MZ \cdot MY = 9$
 $I_1 I_2 = 8$

Найти: r_1 - ?

Решение: 1) Заметим, что при гомотетии в $(\cdot) M$ с коэф. (-2) $\triangle AMD \rightarrow \triangle CMB$ (т.к. $\triangle AMD \sim \triangle CMB$ по двум углам, которые следуют из параллельности, а также $\frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$)

То есть $I_1 M I_2$ - одна прямая (т.к. $M I_1$ и $M I_2$ - бис-сы $\Rightarrow \angle C M I_1 = \angle A M I_2$), причем $\frac{I_2 M}{M I_1} = \frac{1}{2}$ (соотв. элементы в подобных Δ) $\Rightarrow$

$$2 I_2 M = M I_1 \Rightarrow M I_1 = \frac{8 \cdot 2}{3} = \frac{16}{3} \quad (\text{т.к. } M I_1 + M I_2 = 8)$$

$$= r_1 + M T, \text{ где } M I_1 \cap W_1 = \{T, Q\}, T \text{ ближе к } M.$$

2) При гомотетии в M с коэф. (-2) $W \rightarrow Y$, $Z \rightarrow X$ (т.к. $W_2 \rightarrow W_1 \Rightarrow$ пересечения $MW \rightarrow$ пересечения MX , т.к. $WZ MXY$ - одна прямая) $\Rightarrow \frac{MZ}{MX} = \frac{MW}{MY} = \frac{1}{2} \Rightarrow MZ \cdot MY = MX \cdot MW = 9.$

$$\begin{cases} 2 MZ = MX \\ 2 MW = MY \end{cases}$$

$$\Rightarrow MZ \cdot MX = MX \cdot 2 MW = 9 \cdot 2 = 18 - \text{степень точки } M \text{ относительно } W_1 \Rightarrow$$

$$MY \cdot MX = M T \cdot M Q = 18 = M T (M T + 2 r_1).$$

$$M T = M I_1 - r_1 = \frac{16}{3} - r_1.$$

$$18 = \left(\frac{16}{3} - r_1\right) \left(\frac{16}{3} - r_1 + 2 r_1\right) = \frac{16^2}{9} - r_1^2 \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$r_1^2 = \frac{16^2 - 18 \cdot 9}{9} = \frac{256 - 162}{9} = \frac{94}{9} \Rightarrow r_1 = \frac{\sqrt{94}}{3}, \text{ т.к.}$$

$$r_1 > 0.$$

$$\text{Ответ: } r_1 = \frac{\sqrt{94}}{3}.$$

Также стоит заметить, что при гомотетии $\triangle AMD \rightarrow \triangle CMB$ $\omega_2 \rightarrow \omega_1$, т.к. это вписанные окр.-ти.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & 5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14} - 3 \sin \frac{3\pi}{14} + 4 \cos \frac{3\pi}{7} = \boxed{\alpha = \frac{3\pi}{14}} \\
 & = 5 - 4 \sin 3\alpha - 3 \sin \alpha + 4(1 - 2 \sin^2 \alpha) = \\
 & = 5 - 4(3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha) - 3 \sin \alpha + 4 - 8 \sin^2 \alpha = \\
 & = 16 \sin^3 \alpha - 8 \sin^2 \alpha - 15 \sin \alpha + 9 = \boxed{\sin \alpha = t} \\
 & = 16t^3 - 8t^2 - 15t + 9 = (t+1)(16t^2 - 24t + 9) =
 \end{aligned}$$

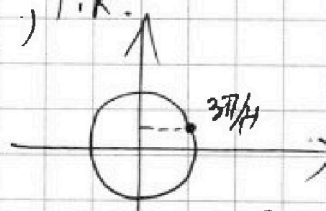
$$\begin{array}{c|c|c|c}
 16 & -8 & -15 & 9 \\
 \hline
 -1 & 16 & -24 & 9
 \end{array} \leftarrow \begin{array}{l} \text{Схема} \\ \text{Корнера} \end{array}$$

$$= (t+1)(4t-3)^2 > 0, \text{ т.к.}$$

$$t = \sin \frac{3\pi}{14} > 0$$

$$\Rightarrow t+1 > 0$$

$$(4t-3)^2 > 0, \text{ причем } \sin \frac{3\pi}{14} \neq \frac{3}{4}, \text{ т.к.}$$



$$\frac{3\pi}{14} < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \text{т.к. } \sin x \nearrow \text{ при } x \in [0; \frac{\pi}{2}]$$

$$\Rightarrow \sin \frac{3\pi}{14} < \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{3}{4} \Rightarrow (4t-3)^2 > 0$$

$$\Rightarrow 5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14} - 3 \sin \frac{3\pi}{14} + 4 \cos \frac{3\pi}{7} > 0 \Rightarrow$$

$$5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14} > 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$$

Ответ: левое больше, чем правое.



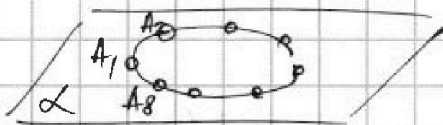
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Назовем точки в α $A_1, A_2, \dots, A_8$, а точки вне α B, C, D, E .

B, C, D, E не лежат в одной плоскости (иначе, по условию, эта плоскость α , но $B \notin \alpha$).

$\Rightarrow$ из этих точек можно сделать выпуклую пирамиду, т.к. для выпуклой пирамиды достаточно, чтобы основание было выпуклым мн-ком, а также вершина $\notin$ основанию.

Возьмем точку B и три точки на α . Если они все лежат в одной плоскости, то это α (т.к. по трем точкам A_i, A_j, A_k , $i \neq j, j \neq k, i \neq k$ задается однозначно α). $\Rightarrow$ B и любые $\geq$ три точки из α не лежат в одной плоскости. Аналогично для C, D, E . Заметим, что по $\geq$ трем точкам на окр-ти однозначно строится выпуклый мн-к $\cap$ окр-ти. $\Rightarrow$ для любого набора точек на окр-ти (≥ 3) должно быть ≥ 3 можно построить выпуклую пирамиду четвертого порядка, где основание пирамиды $= \alpha$.

4. $(C_8^3 + C_8^4 + C_8^5 + C_8^6 + C_8^7 + C_8^8)$ (т.к. всего

$C_8^3 + C_8^4 + \dots + C_8^8$ способов выбрать выпуклый мн-к на плоскости α). Если основание пирамиды $\neq \alpha \Rightarrow$ оно (BCD) или (BCE) или (BED) или (CDE) (в таких плоскостях не может лежать точка A_i , доказано ранее, $\Rightarrow$ будут получаться треугольные пирамиды).

Их вершиной может быть одна из восьми



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

точек A_i (Т.К. случай пирамиды $ВСDE$ уже посчитан отдельно) $\Rightarrow$ всего таких пирамид 48 (4 возможные плоскости основания и 8 вариантов вершин.) Они все будут выпуклые, т.к. они треугольные.

$$\begin{aligned} \text{Всего кол-во пирамид: } & 1 + 32 + 4 \left(1 + 8 + \frac{8 \cdot 7}{2} + \right. \\ & \left. + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{24} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} \right) = \\ & = 33 + 4(9 + 28 + 56 + 56 + 20) = 33 + 4 \cdot 219 = 33 + 876 \\ & = 899 \end{aligned}$$

~~Остаточные пирамиды~~
Также вспомним про пирамиды, у которых две вершины $\in \{B, C, D, E\}$, а две вершины $\in \alpha$.

Таких будет $C_4^2 \cdot C_8^2 = \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{8 \cdot 7}{2} = 6 \cdot 28 = 168$
(двумя способами выбираем вершину из α , двумя из $\{B, C, D, E\}$). Помытно, что таким образом основание не может быть ≥ 4 -х угольником, т.к. любые 4 точки, лежащие в 1-ой пл-ти, лежат в α , но пирамиды, у которых основание $= \alpha$ мы рассмотрим отдельно. Всего все случаи классифицируются на 4 группы:

1. Возьмем 4 точки из $\{B, C, D, E\}$: 1 способ
2. Возьмем 3 точки из $\{B, C, D, E\}$: 32 способа
3. Возьмем 2 точки из $\{B, C, D, E\}$: 168 способов



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4. Возьмем 1 точку из $\{B, C, D, E\}$: 876 способов.

0 точек мы взять не можем, т.к. иначе пирамида не будет выпуклой.

Ответ: 1077 пирамид.

Понятно, что при таком делении пирамиды не будут пересекаться.

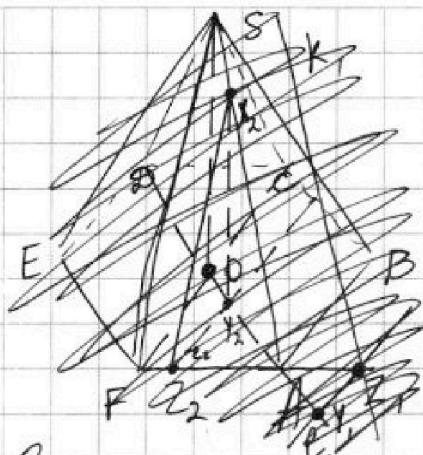


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $AB = 1, SA = \sqrt{2}$
 $X \in SF, Y \in AD,$
 $XY \parallel (SAB)$

Найти: $\min(XY) - ?$

Заметим, что при выборе Y на AD мы однозначно задаем XY (т.к. ~~через~~ все прямые $\parallel (SAB)$ принадлежат β , $Y \in \beta$, $\beta \parallel (SAB)$, $SF \cap \beta = X$, $SF \not\subset \beta$, т.к. $SF \cap (SAB) = S \Rightarrow SF \cap \beta \leq 1$ точке). Пусть $AD \cap CF = O$, $SO \perp (ABCF)$, т.к. $SABCF$ — правильная пирамида, O — центр $ABCF$. Если Y лежит на луче OA , $Y \neq O$, то будем строить через Y ~~прямую~~ AB' ~~и~~ $l \parallel AB$, $Y \in l$. $l \in \beta$, т.к. $l \parallel AB \Rightarrow l \parallel (SAB)$. $l \cap AF = Z$, $Z \in \beta$. Через Z будем строить k , $k \parallel SA$, $Z \in k$. $k \parallel SA \Rightarrow k \parallel (SAB) \Rightarrow k \subset \beta$, т.к. β — ПМТ всех прямых $\parallel (SAB)$, проходящих через Y , т.к. $\beta \parallel (SAB)$, то $k \subset \beta$, т.к. $k \parallel SA$. $k \cap SF = X$, ~~прямая~~ $XY = \sqrt{OX^2 + OY^2}$, т.к. OY — радиус.

~~$\frac{OY}{YA} = \frac{FZ}{ZA} = \frac{SX}{XA} \Rightarrow XY \parallel SO$~~

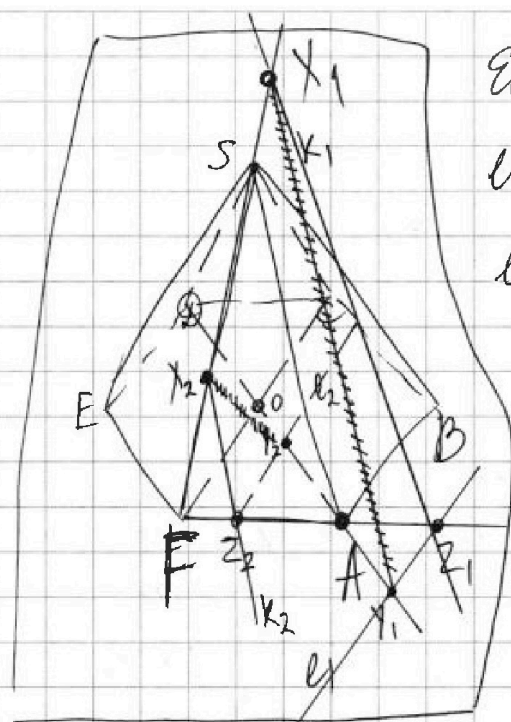


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

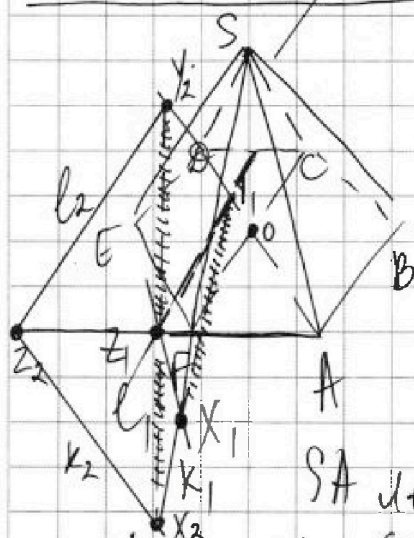
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Если $Y=A \Rightarrow XY=\sqrt{2}$,
если $YO>OA$, то $XY>\sqrt{2}$
если $YO<OA$, то $XY<\sqrt{2}$
если $O=Y$, то $XY=FO=1$.
Если Y лежит на луче
 OA , то пересечем
 l с FA , где $l \parallel AB$,
 $Y \in l$. $l \cap FA = Z$



По аналогичным рассужде-
ниям $l \subset \beta$. Проведем через
 Z $k \parallel SA$, $Z \in k$. $k \in \beta$.

Но заметим, что $k \parallel SA \Rightarrow$
 ~~$k \cap SF = X$~~ $k \cap SF = X$ ($k, SF \subset$

SA лежат в 1 плоскости, т.к. $Z \in k$, $Z \in (SFA)$

$k \parallel SA$, $SA \subset (SFA)$). Опять-таки ~~если~~ $XY < \sqrt{2}$, $XY > \sqrt{2}$, если $XY > \sqrt{2}$, то

то, что $XY > 1$, если $Y \neq O$

~~XZ~~ Пусть $\frac{FZ}{ZA} = \frac{a}{b}$. Тогда $\frac{XZ}{SA} = \frac{a}{a+b}$

Аналогично можно написать уравнение для других



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
3 из 4

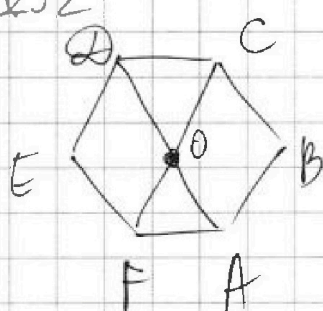
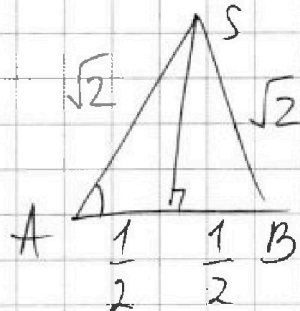
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow XZ = \frac{a\sqrt{2}}{a+b} \quad \text{случаев расположения } Y.$$

$$\frac{QY}{YA} = \frac{ZY}{OF} = \frac{b}{a+b} \Rightarrow ZY = \frac{b}{a+b}.$$

Угол между прямыми XZ и $ZY = \angle SAB$, т.к. $SA \parallel XZ$, $AB \parallel YZ \Rightarrow$

$$\angle SAB = \arccos \frac{1}{2\sqrt{2}}$$



$FO = OC = AB$,
т.к. $ABCDEF$ —
правильный
6-ти угольник

$$\Rightarrow XY^2 = XZ^2 + ZY^2 - 2 \cos \angle XZY \cdot XZ \cdot ZY$$

$$= \frac{2a^2}{(a+b)^2} + \frac{b^2}{(a+b)^2} - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b} =$$

$$= \frac{2a^2 + b^2 - ab}{(a+b)^2} = \frac{\frac{2a}{b} + \frac{b}{a} - 1}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2} = \left| t = \frac{a}{b} \right|$$

$$= \frac{2t + \frac{1}{t} - 1}{t + 2 + \frac{1}{t}} = \frac{2t^2 - t + 1}{t^2 + 2t + 1} = \frac{2t^2 + 4t + 2 - 5t - 1}{t^2 + 2t + 1} =$$

$$= 2 - \frac{5t+1}{t^2+2t+1} = f(t)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☐☒

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Найдем $\min f(t)$

$$f'(t) = 2t - \frac{5(t^2 + 2t + 1) - (2t + 2)(5t + 1)}{(t + 1)^4} =$$

$$= 2t - \frac{5t^2 + 10t + 5 - 10t^2 - 12t - 2}{(t + 1)^4} =$$

$$= 2t + \frac{5t^2 + 2t - 3}{(t + 1)^4} = 0$$

$$\frac{2t(t + 1)^4 + 5t^2 + 2t - 3}{(t + 1)^4} = 0$$

$$2t^5 + 8t^4 + 12t^3 + 8t^2 + 2t + 2t + 5t^2 - 3 = 0$$

$$2t^5 + 8t^4 + 12t^3 + 13t^2 + 4t - 3 = 0.$$

	2	8	12	13	4	-3
-1	2	6	6	7	-3	0

Схема
Горнера

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



540
- 2
538

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

из

отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$15 - 4 \sin \frac{\pi}{14} < 25 - 20\sqrt{3} < \frac{9}{4} \cdot 2 = 4,5 <$$

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{20 + (n-1)d}{2}$$

$$\ln 5(2x + 2y + 3z - 1) = \ln 3(2 - y)$$

$$= 2 \cdot 32 + (n-2)2 \cdot n = (132 + n-1)n = \frac{269}{11} \cdot 2$$

$$271 \overline{) 11} \cdot 2 \quad 4.5 \quad 5 \quad 269 \overline{) 13} \quad 180 \quad 266 \overline{) 2}$$

$$- 22 \overline{) 2} \quad 170 \quad 8 \quad 49 \quad 274 \overline{) 132} \quad 360 \quad 1440 \quad 31 \quad 31 \quad 93 \quad 61$$

$$= (17 + 131)n = 180(n-2) \quad 49 \quad 274 \overline{) 132} \quad 360 \quad 1440 \quad 31 \quad 31 \quad 93 \quad 61$$

$$n^2 + 131n = 180n - 360 \quad 49 \quad 274 \overline{) 132} \quad 360 \quad 1440 \quad 31 \quad 31 \quad 93 \quad 61$$

$$2x + 32 = -9 \quad 2 = \frac{-1-2x}{3} \quad 204 \quad 441 \quad 274 \overline{) 132} \quad 360 \quad 1440 \quad 31 \quad 31 \quad 93 \quad 61$$

$$x \cdot 47 \quad 204 \quad 441 \quad 274 \overline{) 132} \quad 360 \quad 1440 \quad 31 \quad 31 \quad 93 \quad 61$$

$$1 \cdot 329 \quad 204 \quad 441 \quad 274 \overline{) 132} \quad 360 \quad 1440 \quad 31 \quad 31 \quad 93 \quad 61$$

$$y=2 \quad 204 \quad 441 \quad 274 \overline{) 132} \quad 360 \quad 1440 \quad 31 \quad 31 \quad 93 \quad 61$$

$$2x + 32 + y = 188 \quad 204 \quad 441 \quad 274 \overline{) 132} \quad 360 \quad 1440 \quad 31 \quad 31 \quad 93 \quad 61$$

$$+ 2209 \quad 204 \quad 441 \quad 274 \overline{) 132} \quad 360 \quad 1440 \quad 31 \quad 31 \quad 93 \quad 61$$

$$+ 1440 \quad 204 \quad 441 \quad 274 \overline{) 132} \quad 360 \quad 1440 \quad 31 \quad 31 \quad 93 \quad 61$$

$$3699 \quad 204 \quad 441 \quad 274 \overline{) 132} \quad 360 \quad 1440 \quad 31 \quad 31 \quad 93 \quad 61$$

$$61 \quad 32,5 < 20\sqrt{3} \quad 2209 \quad 274 \overline{) 132} \quad 360 \quad 1440 \quad 31 \quad 31 \quad 93 \quad 61$$

$$x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45$$

$$2x \ln 25 + 2y \ln 45 + y \ln 3 + 2z \ln 45 + z \ln 5 =$$

$$= \ln 5 + 2 \ln 3$$

$$\ln(25^x + 75^y + 125^z) = \ln 45$$

$$25^x \cdot 75^y \cdot 125^z = 45$$

$$(b+d)(b-d) \cdot 25^x \cdot 75^y \cdot 125^z = 45$$



2

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

8.7.8.5
4.8

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима.

$$8 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 4 \cdot \frac{1.5\sqrt{2}}{2} = 8 \sin^2 \frac{3\pi}{14} + 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cdot \frac{1}{2} < 8 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 4 = \frac{3}{2} - 2 \sin \frac{5\pi}{14} > \frac{\pi}{4} \sin \frac{5\pi}{14}$$

$$5 - 4 \sin \frac{5\pi}{14}$$

$$3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{6\pi}{14}$$

$$8.7.6.5.4$$

$$5 \sin \frac{\pi}{2} - 4 \sin \frac{9\pi}{14}$$

$$3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4(1 - 2 \sin^2 \frac{3\pi}{14})$$

$$24.5\pi - \frac{9\pi}{14} =$$

$$= \frac{9\pi}{14} - \frac{9\pi}{14} =$$

$$1 + 4 \sin \frac{\pi}{2} - \sin^2 \frac{9\pi}{14} = 16.8 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{8\pi}{7}$$

$$2x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 4x - 3 = 0$$

$$3 \left(2 \cdot \frac{1}{16} - 6 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{4} - 7 \cdot \frac{1}{2} + 3 \right) =$$

$$2 \cdot 81 - 6 \cdot 27 + 6 \cdot 9 - 21 - 3$$

$$= 8 \sin \frac{\pi}{14} \cos \frac{2\pi}{7} - \cos \frac{3\pi}{7}$$

$$162 - 8 - \frac{3}{4} + 2.5 - 3 - 3.5 = \frac{256}{162}$$

$$162 \cdot \frac{3\pi}{14} < \frac{\pi}{4} \cdot \frac{16\pi}{14} = \frac{8\pi}{7}$$

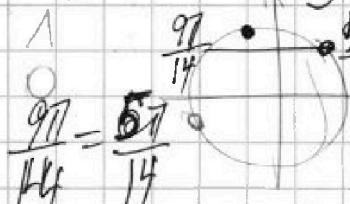
$$\frac{7\pi}{14} - \frac{6\pi}{14}$$

$$p^2 - q^2 = 1080 = 2^3 \cdot 5 \cdot 3^3$$

$$(p-q)(p+q) = 2^3 \cdot 5 \cdot 3^3$$

$$\times \frac{219}{4}$$

$$876$$



$$\frac{9\pi}{14} - \frac{5\pi}{14}$$

$$MX = 2a \quad MY = \frac{9}{a}$$

$$MZ = a \quad MW = \frac{9}{2a}$$

$$ZW = MW - MZ = \frac{9}{2a} - a = \frac{9 - 2a^2}{2a}$$

$$5 - 4 \sin \frac{5\pi}{14} \leftarrow \frac{XY}{ZW} = 2 \quad \sin \frac{5\pi}{14} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$5 - 2\sqrt{3} \neq B$$

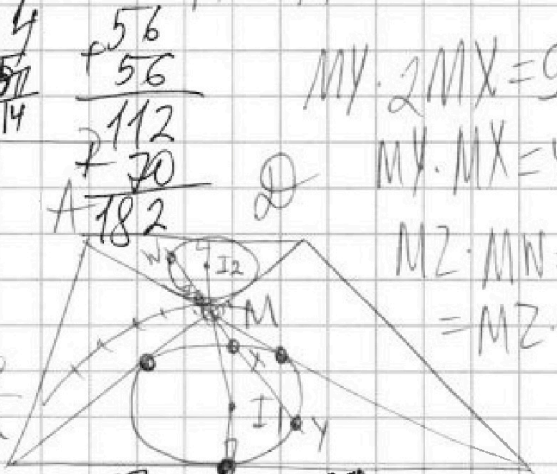
$$XY = MY - MX = \frac{9}{a} - 2a = \frac{MX}{MW} = 2 = \frac{MY}{MW}$$

$$MZ \cdot MW =$$

$$= MZ \cdot \frac{MY}{2} = \frac{9 - 2a^2}{a}$$

$$\sin < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$MY \cdot MZ = MX \cdot MW = 9 \sin \frac{3\pi}{4} < \frac{1}{2}$$



$$MY \cdot 2MX = 9$$

$$MY \cdot MX = 4.5$$

$$MZ \cdot MN = MZ \cdot 2$$

$$MZ \cdot MY = 9$$

$$\frac{8\pi}{14} > \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{8\pi}{14} > \frac{\pi}{6}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$xy^2 = \frac{(b-a)^2}{a^2} \cdot \frac{2a^3}{b^2}$$

$$\frac{2t^2 - \frac{t}{\sqrt{2}} + 1}{t^2 + 2t + 1}$$

$$xy^2 = \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 \cdot 2 + \left(\frac{b}{a+b}\right)^2 \cdot 1 - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{ab}{(a+b)^2}$$

$$2a^2 + b^2 - ab \geq a^2 + 2ab + b^2$$

$$= \frac{2a^2 + b^2}{(a+b)^2} \quad a^2 \geq 3ab$$

$$\frac{(t^2 + 2t + 1)^2 (t^2 + 2t + 1)}{a^2 b^2 (t^2 + 2t + 1)^2}$$

$$a \geq 3b$$

$$-2 + 8 - 12 + 13 - 4 - 3$$

$$\frac{2\sqrt{2} \frac{a}{b} + \sqrt{2} \frac{b}{a} - 1}{\left(\frac{a}{b} + 1 + \frac{b}{a}\right)\sqrt{2}}$$

$$t = \frac{a}{b}$$

$$2\sqrt{2}a^2 + \sqrt{2}b^2 - ab \geq a^2\sqrt{2} + b^2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}ab$$

$$t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1$$

$$\sqrt{2}a \geq ab(2\sqrt{2} + 1)$$

$$\frac{2\sqrt{2}t + \frac{\sqrt{2}}{t} - 1}{t}$$

$$\sqrt{2}a \geq b(2\sqrt{2} + 1)$$

$$\left(t + 2 + \frac{1}{t}\right)\sqrt{2}$$

$$\frac{a}{b} \geq \frac{2\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{2\sqrt{2}t^2 + \sqrt{2}(1-t/\sqrt{2})}{(t^2 + 2t + 1)\sqrt{2}}$$

$$= 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = 5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14} = 5 - 4 \sin \frac{5\pi}{14} \quad \sin x, x \in [0; \frac{\pi}{2}]$$

$$\frac{5\pi}{14} > \frac{\pi}{3} \Rightarrow \sin \frac{5\pi}{14} > \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$5 - 4 \sin \frac{5\pi}{14} < 5 - 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5 - 2\sqrt{3}.$$

$$B = 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{6\pi}{14} = 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4(1 - 2 \sin^2 \frac{3\pi}{14}) =$$

$$= 8 \sin^2 \frac{3\pi}{14} + 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4$$

$$\frac{3\pi}{14} > \frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin \frac{3\pi}{14} > \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$B > 8 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} - 4 = \sqrt{2}$$

$$S \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

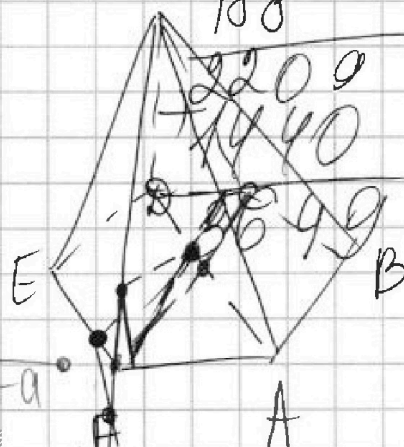
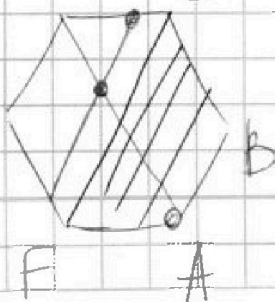
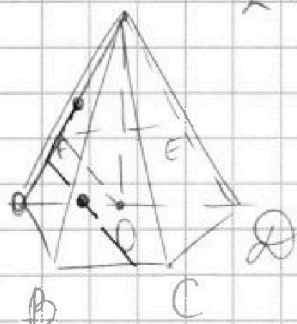
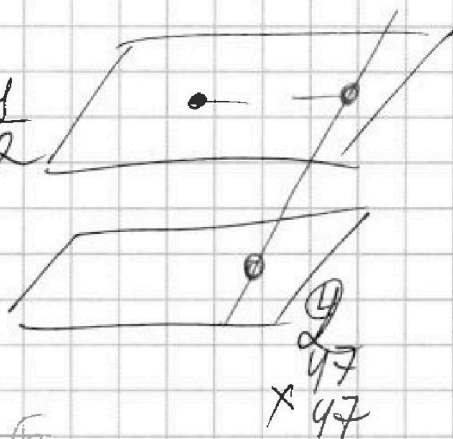
$$AB = 1.$$

$$\frac{FZ}{FA} = \frac{a}{b}$$

$$XZ = \frac{a \cdot b}{b} = a$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$Z = \frac{b-a}{a} \cdot 1$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1, 2, 4, 6

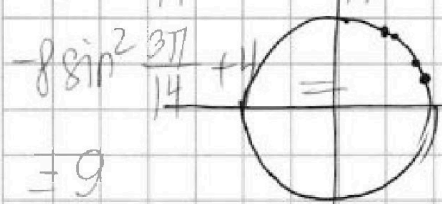
$$\frac{5\pi}{14} \geq \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{14} > \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{14} < \frac{\pi}{2}$$

$$5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14} - 3 \sin \frac{3\pi}{14}$$

$$5 - 4 \sin > 5 - 4 = 1$$



$$5 - 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$32^2 = 1024$$

$$\sin 3\alpha = 2\sqrt{2} < 3$$

$$33^2$$

$$(360+1)^2 =$$

$$6a + (1 + 2 + \dots + 6) = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \sin 2\alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{33}{99}$$

$$3600 + 1 + 120$$

$$= 6a + 21 =$$

$$41 + \dots + 46 =$$

$$= 3(2a + 7) = 269$$

$$= 41 \cdot 6 + 1 + 2 + \dots + 5$$

$$2a + 7 \geq 82$$

$$\frac{1089}{99}$$

$$= 246 + 15 = 261$$

$$2a \geq 82 \Rightarrow a \geq 41$$

$$\times 92$$

$$42 + \dots + 47 =$$

$$\begin{array}{r} 256 \\ 6 \\ \hline 24 \\ 14 \end{array}$$

$$43 + 44 + \dots + 48$$

$$= 41 \cdot 6 + 21 =$$

$$42 \cdot 6 + 21 =$$

$$= 246 + 21 = 267$$

$$= 246 + 6 + 21 = 252 + 21 = 273$$

$$269$$

$$41 + 42 + \dots + 46 = 41 \cdot 6 + 1 + \dots + 5 =$$

$$= 246 + 15 = 261$$

$$a + 3$$

$$\begin{array}{r} 241 \\ 6 \\ \hline 24 \\ 40 \end{array}$$

$$42 + \dots + 47 = 41 + \dots + 46 + 6$$

$$41, 42, \dots, 47$$

$$\begin{array}{r} 252 \\ 15 \\ \hline 267 \end{array}$$

$$48 + 47 + 46 + 45 + 43 + 42 + 41$$

$$42 + \dots + 47 = 42 \cdot 6 + 15$$

$$6 \cdot 44(1 + 2 + 4 + 5 + 6 + 7) = 246 + 28 - 3 = 246 + 25 = 271$$