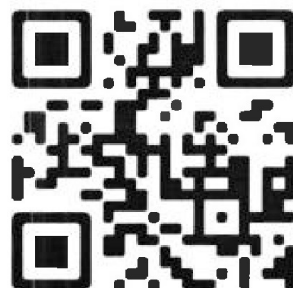




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 13



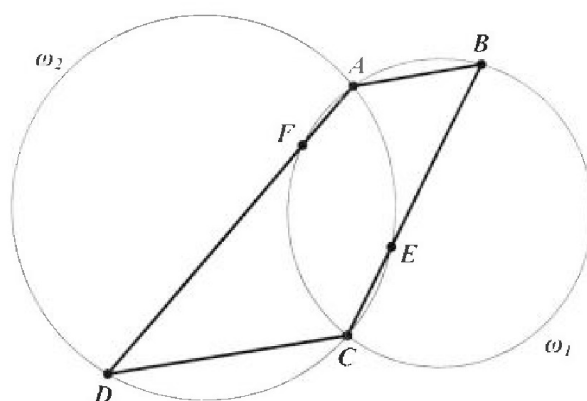
1. [3 балла] В прямоугольном треугольнике длины катетов равны $|2x - 2|$ и $|x^2 + 3x|$, а длина гипотенузы равна $|3x + 1|$. Найдите x .
2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x\sqrt{8} + y\sqrt{18} + z\sqrt{29} = \sqrt{32} + \sqrt{116}$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 - y^2 + z^2$.
3. [4 балла] Назовём числа *хорошими*, если они представимы в виде $a(a + 1)$, где $a \in \mathbb{N}$. Найдите количество пар хороших чисел, разность которых равна $81 \cdot 10^{2024}$.
4. [5 баллов] Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{4x - x^2} - 3 - 3} \leq \frac{1}{\sqrt{2x - x^2} - \sqrt{x^2 + x - 2}}.$$

5. [5 баллов] Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром O , а AA_1 и BB_1 – его высоты. Найдите расстояние от точки O до стороны AC , если $AB_1 = 6$ и площадь треугольника OBA_1 равна 6.
6. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^3 - 3y^2 - 1 = 0, \\ 2x - xy - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0. \end{cases}$$

7. [6 баллов] Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD ($AB < CD$). Окружность ω_1 , описанная около треугольника ABC , повторно пересекает сторону AD в точке F , а окружность ω_2 , описанная около треугольника ACD , повторно пересекает сторону BC в точке E (точки E и F расположены так, как показано на рисунке). Найдите отношение длин отрезков AF и CE , если отношение радиуса окружности ω_1 к радиусу окружности ω_2 равно $1 : 2$.





1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

3 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

У1

По теореме Пифагора из условия следует, что $|2x-2|^2 + |x^2+3x|^2 = |3x+1|^2$. А поскольку $|a|^2 = a^2$ для любого $a \in \mathbb{R}$, то мы можем переписать выражение, как $(2x-2)^2 + (x^2+3x)^2 = (3x+1)^2$;

$$4x^2 - 8x + 4 + x^4 + 6x^3 + 9x^2 = 9x^2 + 6x + 1;$$

$$x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 14x + 3 = 0.$$

По теореме о рациональных корнях многочлена если у многочлена есть целый корень, то он будет делить его свободный член (в нашем случае $a_0 = 3$). Тогда по теореме Безу имеем, что остатком при делении $P(x)$ на $(x-a)$ будет $P(a)$. Отсюда заметим, что $P(1) = P(-3) = 0$, значит, наши $P(x) : (x-1)$ и $P(x) : (x+3)$. Тогда $P(x) : (x-1)(x+3)$, а $(x-1)(x+3) = x^2 + 2x - 3$;

$$\begin{array}{r} x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 14x + 3 : x^2 + 2x - 3 \\ - x^4 + 2x^3 - 3x^2 \\ \hline 4x^3 + 7x^2 - 14x \\ - 4x^3 + 8x^2 - 12x \\ \hline -x^2 - 2x + 3 \\ -x^2 - 2x + 3 \\ \hline 0 \end{array}$$

Найдем корни многочлена $x^2 + 4x - 1 = 0$:

$$x^2 + 4x - 1 = 0;$$

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 20;$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}.$$

Отсюда корнями многочлена $x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 14x + 3$ являются числа $1, -3, -2 - \sqrt{5}$ и $-2 + \sqrt{5}$. Но, возвращаясь к условию, заметим, что если $|2x-2|, |x^2+3x|$ и $|3x+1| \neq 0$ - стороны треугольника, то они не равны 0. Отсюда $2x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$, $x^2+3x = x(x+3) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0, -3$ и $3x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -\frac{1}{3}$. Тогда из наших корней подойдут только $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{5}$.

Ответ: $* x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{5}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 2

$$x\sqrt{8} + y\sqrt{18} + z\sqrt{29} = \sqrt{32} + \sqrt{146};$$

$$2\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y + z\sqrt{29} = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{29};$$

$$2\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y - 4\sqrt{2} = 2\sqrt{29} - z\sqrt{29};$$

$$\sqrt{2}(2x + 3y - 4) = \sqrt{29}(2 - z);$$

Если обе части возвести в квадрат, то увидим, что в получившемся выражении $2(2x + 3y - 4)^2 = 29(2 - z)^2$ ~~в~~ в левой части делитель 2, а 29 будет встречаться четное количество раз, т.к. 2×29 , а если $\nu_{29}(2x + 3y - 4) = t$, то $\nu_{29}((2x + 3y - 4)^2) = 2\nu_{29}(2x + 3y - 4) = 2t \geq 2$, а в правой части если $\nu_{29}(2 - z) = u$, то $\nu_{29}(29(2 - z)^2) = \nu_{29}(29) + 2\nu_{29}(2 - z) =$

$= 2u + 1 \geq 1$, т.е. 29 будет встречаться нечетное количество раз. Но поскольку эти части равны, то, чтобы не возникло противоречия, $(2 - z)^2$ ~~должны~~ ^{обе части} должны равняться нулю.

Тогда $(2 - z)^2 = 0$; $2 - z = 0$; $z = 2$, соответственно и $2(2x + 3y - 4)^2 = 0$; $2x + 3y - 4 = 0$; $2x + 3y = 4$. Раз мы знаем значение z и оно стало известно, теперь достаточно вычислить минимальное значение $x^2 - y^2$:

$$2x + 3y = 4; \quad 2x = 4 - 3y; \quad x = \frac{4 - 3y}{2} = 2 - y - \frac{y}{2}.$$

Поскольку $x \in \mathbb{Z}$, пусть $\frac{y}{2} = k$ ($k \in \mathbb{Z}$), тогда $y = 2k$,

$$x = 2 - y - \frac{y}{2} = 2 - 2k - k = 2 - 3k;$$

$$x^2 - y^2 = (2 - 3k)^2 - (2k)^2 = 4 - 12k + 9k^2 - 4k^2 = 5k^2 - 12k + 4.$$

Это график квадратичной функции, парабола, ветви которой направлены вверх (т.к. $a = 5 > 0$). Значит, минимальное её значение достигается в точке $k_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2 \cdot 5} = 1,2$.

Но поскольку $k \in \mathbb{Z}$, рассмотрим ближайшие к k_0 целые



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

значения: ± 1 и 2 . При $k=1$ $x^2 - y^2 = 5 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 4 = 5 - 12 + 4 = -3$,
при $k=2$ $x^2 - y^2 = 5 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 4 = 20 - 24 + 4 = 0$ - видим, что
при $k=1$ получилось меньшее значение, тогда при $k=1$
 $x = 2 - 3 \cdot 1 = -1$, $y = 2 \cdot 1 = 2$, $x^2 - y^2 + z^2 = (-1)^2 - 2^2 + 2^2 = 1 - 4 + 4 = 1$.
Ответ: 1.

(Замечание: В данной задаче $v_p(a)$ - степень вхождения
простого делителя p в число a . Например, $v_3(24) = 1$,
т.к. по каноническому разложению $24 = 2^3 \cdot 3$. Из свойств
вытекают свойства, что $v_p(a^k) = k \cdot v_p(a)$ и
 $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$.)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
4 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3. a, b , где $a > b$,
Рассмотрим числа $a, b \in \mathbb{N}$, а точнее их "хорошие" версии $a(a+1)$ и $b(b+1)$: ~~а~~ по условию $a(a+1) - b(b+1) = 81 \cdot 10^{2024}$;
 $a^2 + a - b^2 - b = 81 \cdot 10^{2024}$; $(a^2 - b^2) + (a - b) = 81 \cdot 10^{2024}$;
 $(a-b)(a+b) + (a-b) = 81 \cdot 10^{2024}$; $(a-b)(a+b+1) = 81 \cdot 10^{2024}$.
Заметим, что если a и b одной чётности, то $a-b \div 2$, $a+b \div 2$, но $a+b+1 \nmid 2$, если a и b разной чётности, то $a-b \nmid 2$, $a+b \nmid 2$, но $a+b+1 \div 2$, т.е. в любой из случаев имеем, что один множитель чётный, другой - нечётный, т.е. один из множителей забирает все 2 из числа $81 \cdot 10^{2024}$ себе. А поскольку по каноническому разложению $2^{20} \cdot 81 \cdot 10^{2024} = 2^{2024} \cdot 3^4 \cdot 5^{2024}$, то для начала ~~скажем~~, что рассмотрим случай, что $a-b$ забрал 2^{2024} себе, тогда способ ~~разместить~~ добавить туда же степени $3 = 5$ (от 0-й до 4-й включительно, остальные 3 уйдут в $a+b+1$), аналогично способ разместить туда степени $5 = 2025$. Значит, & всего у нас $5 \cdot 2025 = 10125$ способов сделать множитель $a-b$ в этом случае. Аналогично получаем 10125 способов, если всю степень двойки забрало число $a+b+1$. Заметим, что раз $a > b \geq 1$, то $a+b+1 > 2b+1 \geq 3$, поэтому случай, когда $a+b+1 = 1$, мы исключаем. Остаётся $10125 + 10125 - 1 = 20249$ способов. Теперь докажем, что пары чисел не совпадают друг с другом. Предположим, нашли такие пары (a_1, b_1) и (a_2, b_2) , что $a_1 - b_1 = a_2 + b_2 + 1$ и $a_2 - b_2 = a_1 + b_1 + 1$. Очевидно, это невозможно, т.к. из 1 уравнения $a_1 - a_2 = b_1 + b_2 + 1$, из 2-го $a_2 - a_1 = b_1 + b_2 + 1$, а это возможно только, когда $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.
Ответ: 20249 пар.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
6 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 6.

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^3 - 3y^2 - 1 = 0, \\ 2x - xy - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0. \end{cases}$$

Сложив оба уравнения системы, получим:

$$x^2 + 2x - 3xy + 2y^2 - 3y + 1 = 0.$$

Решим здесь квадратное уравнение относительно x :

$$x^2 + x(2-3y) + 2y^2 - 3y + 1 = 0.$$

$$D = (2-3y)^2 - 4 \cdot (2y^2 - 3y + 1) = 4 - 12y + 9y^2 - 8y^2 + 12y - 4 = y^2.$$

$$x_{1,2} = \frac{-(2-3y) \pm \sqrt{y^2}}{2 \cdot 1} = \frac{3y-2 \pm y}{2} \quad (\text{так можно раскрыть квадратный корень, потому что в обоих случаях корни войдут одинаковыми})$$

$$x_1 = \frac{3y-2-y}{2} = \frac{2y-2}{2} = y-1,$$

$$x_2 = \frac{3y-2+y}{2} = \frac{4y-2}{2} = 2y-1.$$

1) Для более лёгкого поиска решений выразим x через y во втором ~~выражении~~ ^{уравнении}, получим $x(2-y) - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0$,

$$x(2-y) = y^3 - 5y^2 + 3y - 2, \quad x = \frac{y^3 - 5y^2 + 3y - 2}{2-y}.$$

1) $x = y-1$: из второго уравнения $(y-1)(2-y) - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0$ получим $(y-1)(2-y) - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0$; $2y - y^2 - 2 + y - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0$; $-y^3 + 4y^2 = 0$; $y^3 - 4y^2 = 0$; $y^2(y-4) = 0$. Если отсюда $y = 0$, то $x = 0-1 = -1$ - подставляя в первое уравнение, выясняем, что такая пара подходит. Если $y = 4$, то $x = 4-1 = 3$, и такая пара тоже, аналогично первой, подходит.

2) $x = 2y-1$: из второго уравнения аналогично случаю 1 получим $(2y-1)(2-y) - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0$;

$$4y - 2y^2 - 2 + y - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0; \quad -y^3 + 3y^2 + 2y = 0; \quad 1: (-1)$$

$$y(y^2 - 3y - 2) = 0. \quad \text{Если } y = 0, \text{ то } x = 2 \cdot 0 - 1 = -1, \text{ а такая пара уже была, значит, осталось проверить корни дроби}$$

$$y^2 - 3y - 2 = 0; \quad y^2 - 3y - 2 = y^2 - 2y - y - 2 = y(y-2) - (y+2) = (y-1)(y-2) = 0$$

$$\text{Если } y = 1, \text{ то } x = 2 \cdot 1 - 1 = 1. \quad y^2 - 3y - 2 = 0:$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

7 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$D = (-3)^2 + 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 17$$

$$y_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

Если $y = \frac{3 - \sqrt{17}}{2}$, то $x = 2 - \frac{3 - \sqrt{17}}{2} - 1 = 2 - \sqrt{17}$.

Если $y = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$, то $x = 2 - \frac{3 + \sqrt{17}}{2} - 1 = 2 + \sqrt{17}$. Подставляя обе эти пары в первое уравнение, получаем, что они тоже подходят.

Ответ: $(x; y) = (-1; 0), (3; 4), (2 - \sqrt{17}; \frac{3 - \sqrt{17}}{2}),$

$(2 + \sqrt{17}; \frac{3 + \sqrt{17}}{2})$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
5 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 7.

Обозначим углы $\angle ABC = \alpha$ и $\angle ADC = \beta$. Тогда, так как $AB \parallel CD$,
 $\angle BAD = 180^\circ - \angle ADC = 180^\circ - \beta$, $\angle BCD = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \alpha$.

Рассмотрим $\triangle BCF$: заметим, что он вписан в окружность ω_1 , значит, суммы его противоположных углов равны 180° . Отсюда $\angle AFC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \alpha$. Аналогично $\triangle ADE$ вписан в ω_2 , отсюда $\angle AEC = 180^\circ - \angle ADC = 180^\circ - \beta$.

$\angle DFC = 180^\circ - \angle AFC = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha$, аналогично $\angle AEB = 180^\circ - \angle AEC = 180^\circ - (180^\circ - \beta) = \beta$.

Рассмотрим $\triangle DFC$: $\angle FDC = \beta$, $\angle DFC = \alpha \Rightarrow \angle DCF = 180^\circ - \alpha - \beta$.

Аналогично в $\triangle ABE$ $\angle ABE = \alpha$, $\angle AEB = \beta$, $\angle BAE = 180^\circ - \alpha - \beta$.

$\angle FCE = \angle BCD - \angle FCD = \angle BCD - \angle DCF = (180^\circ - \alpha) - (180^\circ - \alpha - \beta) = \beta$; $\angle EAF = \angle BAF - \angle BAE = \angle BAD - \angle BAE = (180^\circ - \beta) - (180^\circ - \alpha - \beta) = \alpha$. Отсюда, так как $\angle ECF = \angle AEB = \beta$, $AE \parallel CF$, тогда $AECF$ - трапеция.

Пусть радиус окружности ω_1 - R_1 , окружности ω_2 - R_2 .

Тогда по теореме синусов для $\triangle ABC$ $\frac{AC}{\sin \alpha} = 2R_1$,

для $\triangle ACD$ $\frac{AC}{\sin \beta} = 2R_2$. Поделив первое выражение на второе, получим $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{2R_2}{2R_1} = \frac{R_2}{R_1} = 2$; $\sin \alpha = 2 \sin \beta$.

Поскольку $AECF$ - трапеция, $\angle AEF = \angle CFE$, т.к. FE - секущая для AE и CF . Тогда по теореме синусов для $\triangle AFE$

$\frac{FE}{\sin \alpha} = \frac{AF}{\sin \angle AEF}$, для $\triangle FCE$ $\frac{FE}{\sin \beta} = \frac{CE}{\sin \angle CFE}$. Поделив

первое выражение на второе, получим $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{CE \cdot \sin \angle AEF}{AF \cdot \sin \angle CFE}$

а поскольку $\angle AEF = \angle CFE$, то $\frac{CE}{AF} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 2$; $\frac{AF}{CE} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{AF}{CE} = \frac{1}{2}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\triangle AFE: \frac{FE}{\sin \alpha} = \frac{AF}{\sin \angle AEF}$$

$$\triangle FCE: \frac{FE}{\sin \beta} = \frac{CE}{\sin \angle CFE}$$

$$\angle AEF = \angle CFE$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{CE}{AF} = 2$$

$$CE = 2AF$$

$$\frac{AF}{CE} = \frac{1}{2}$$

$$x^2 + 2x - 3xy + 2y^2 - 3y + 1 = 0$$

$$x^2 + x(2-3y) + (2y^2 - 3y + 1) = 0$$

$$D = (2-3y)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2y^2 - 3y + 1) = 4 - 12y + 9y^2 - 8y^2 + 12y - 4 = y^2$$

$$x_{1,2} = \frac{3y-2 \pm y}{2} \quad x$$

$$x = \frac{y^3 - 5y^2 + 3y - 2}{2 - y}$$

$$1) x = y - 1: (y-1)^2 - 2y(y-1) + y^3 - 3y^2 - 1 = 0$$

$$y^2 - 2y + 1 - 2y^2 + 2y + y^3 - 3y^2 - 1 = 0$$

$$y^3 - 5y^2 = 0; y^2(y-5) = 0; y = 0; 5$$

$$y = 0: x^2 - 2x + 2 = 0, x = -1 - \text{для } 1-20 \text{ подходит}$$

$$y = 5: x^2 - 2x - 5x - 5^3 + 5 \cdot 5^2 - 3 \cdot 5 + 2 = 0;$$

$$-3x - 17 = 0; x = -\frac{17}{3}$$

$$\left(-\frac{17}{3}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{17}{3}\right) \cdot 5 + 5^3 - 3 \cdot 5^2 - 1 = \frac{289}{9} + \frac{170}{3} + 125 - 75 - 1 = \frac{289 + 169 + 390}{9} + 49 \neq 0 > 0$$

$$2) x = 2y - 1: (2y-1)^2 - 2y(2y-1) + y^3 - 3y^2 - 1 = 0;$$

$$4y^2 - 4y + 1 - 4y^2 + 2y + y^3 - 3y^2 - 1 = 0$$

$$y^3 - 3y^2 - 2y = 0; y(y^2 - 3y - 2) = 0$$

$$y = 0: x = -1 - \text{тоже}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y^2 - 3y - 2 = 0. \quad D = 9 + 8 = 17$$

$$y = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x = 2y - 1: \quad 2 + (2 - y)(2y - 1) - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0.$$

$$4y - x - 2y^2 + y - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0.$$

$$4y^3 - 2y^2 + 2y = 0.$$

$$y(2y^2 - y + 1) = 0.$$

$$y_1: D = 1 - 1^2 - 4 \cdot 2 - 1 = -7 < 0.$$

$$1 \text{ сл. } (2 - y)(y - 1) - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0.$$

$$2y - 2 - y^2 + y - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0.$$

$$-y^3 + 4y^2 = 0; \quad y^3 y^2(y - 4) = 0$$

$$y = 4: \quad x = \frac{4^3 - 5 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 - 2}{2 - 4} = \frac{64 - 80 + 12 - 2}{-2}$$

$$= \frac{-6}{-2} = 3.$$

$$3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 + 4^3 - 3 \cdot 4^2 - 1 = 9 - 24 + 64 - 48 - 1 = 0.$$

$$(0; (-1, 0), (3; 4).$$

$$(2 - \sqrt{17})^2 - 2 - (2 - \sqrt{17}) \left(\frac{3 - \sqrt{17}}{2} \right) + 3 \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{17}}{2} \right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{17}}{2} \right)^2$$

$$- 1 = 4 - 4\sqrt{17} + 17 - 6 + 2\sqrt{17} + 6\sqrt{17} - 34 +$$

$$+ 27$$

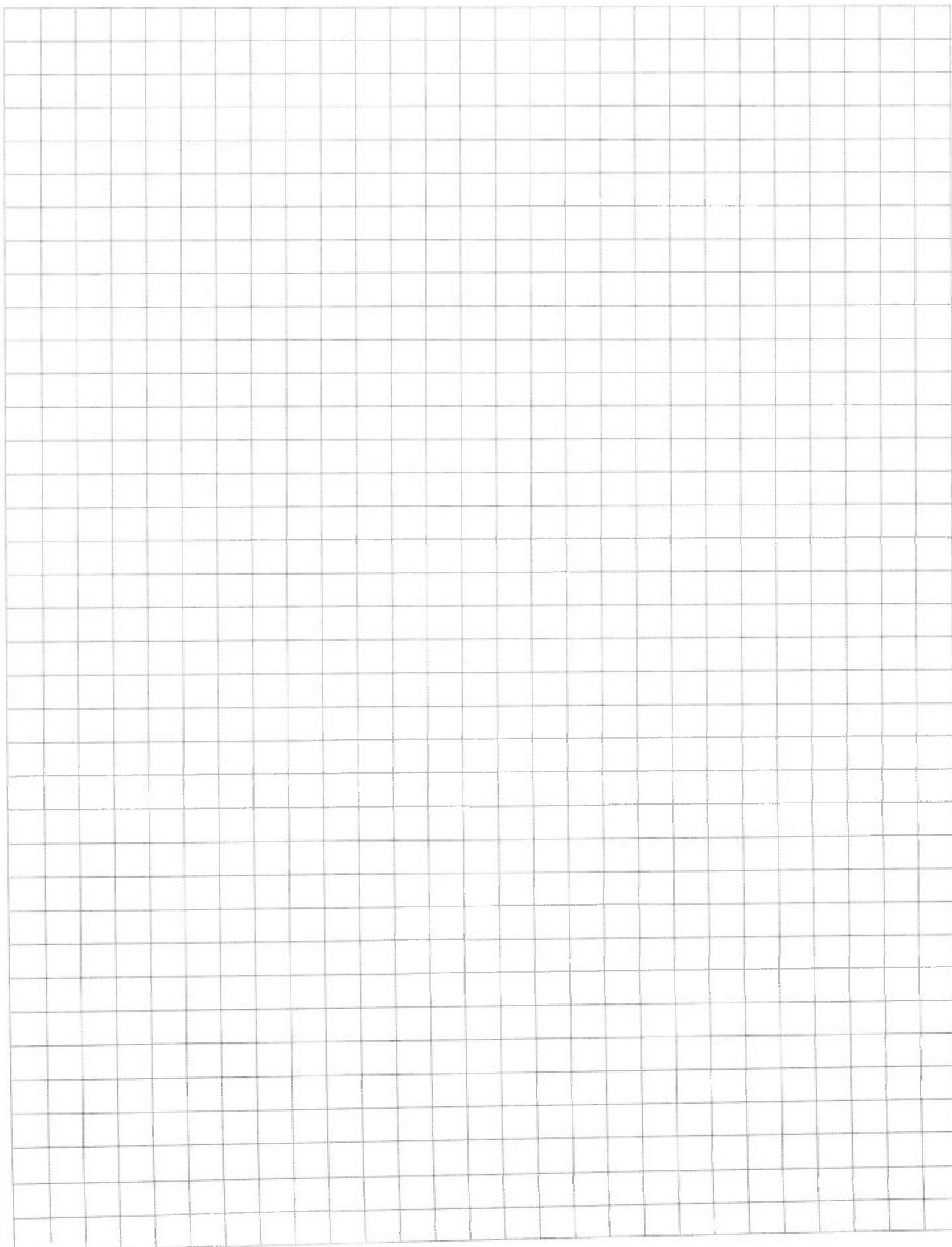


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

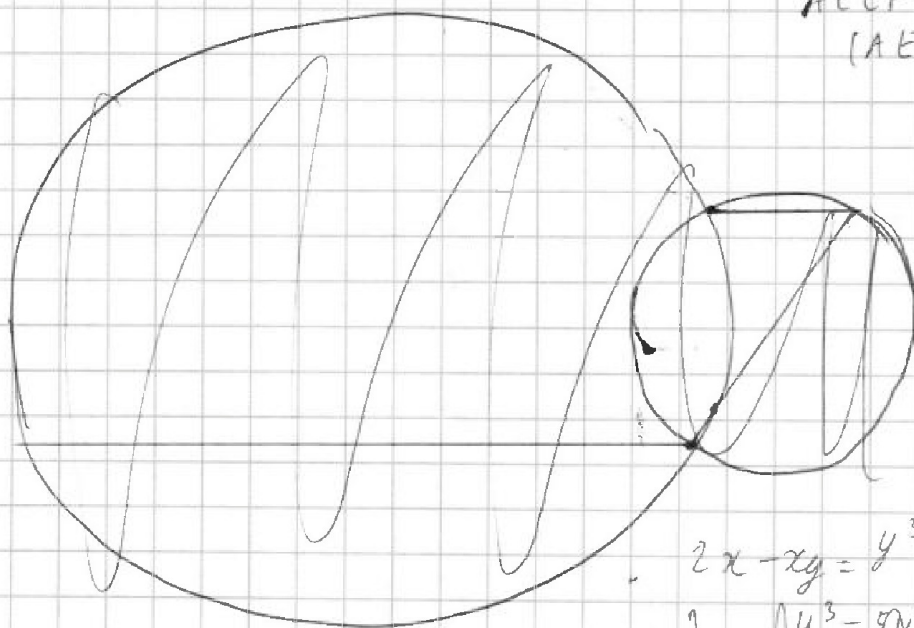
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$CE \parallel AF$, т.к. $\angle AEB = \angle ECB$. Тогда $AD \parallel BC \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow AE \parallel CF$, т.к. $\angle AEB = \angle FCE$. $AF \parallel CE \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow AFCE$ - паралл. и тогда $\frac{AF}{CE} = 1$.~~

$AE \parallel CF$ - т.к.
($\angle AEB = \angle FCE$).



Реш.

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^3 - 3y^2 - 1 = 0 \\ 2x - xy + y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$2x - xy + y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad 4x - 2xy - 2y^3 + 10y^2 - 6y + 4 = 0$$

$$x^2 + 2x - 3xy + 2y^2 - 3y + 1 = 0$$

$$\frac{1}{4}x^2 + 2x + 1 + y^2 - 3xy + \frac{9}{4}x^2 + y^2 - 3y + \frac{9}{4} = \frac{9}{4}x^2 + \frac{9}{4}$$

$$(x+1)^2 + (y - \frac{3}{2}x)^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}(x^2+1)$$

$$x^2 - 4x + 3y^3 - 13y^2 + 6y - 5 = 0$$

$$x^2 - 2xy + y^2 + y^3 - 3y^2 + 3y - 1 = y^2 - 3y$$

$$-\sqrt{8} + 2\sqrt{18} + 2\sqrt{29} = \sqrt{32} + \sqrt{116}$$

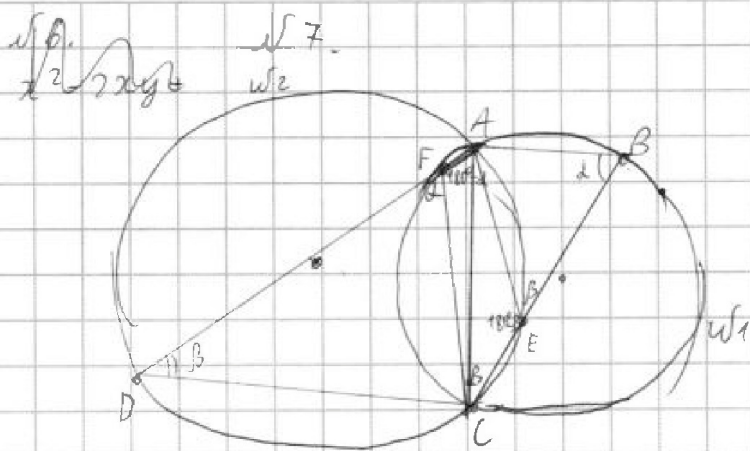


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AF}{CE} = ?$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{AC}{\sin \alpha} = 2R_1$$

$$\frac{AC}{\sin \beta} = 2R_2$$

$$(180^\circ - \alpha) - (180^\circ - \beta) = \beta$$

$$(180^\circ - \beta) - (180^\circ - \alpha) = \alpha$$

$$AC = 2R_1 \sin \alpha = 2R_2 \sin \beta$$

$$R_1 \sin \alpha = R_2 \sin \beta; \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{1}{2};$$

$$\sin \alpha = 2 \sin \beta$$

$$\triangle BEA \sim \triangle FDC \quad (k=2)$$

$AB \parallel CD$

$\triangle ACF$:

$$\frac{AC}{\sin (180^\circ - \alpha)} = 2R_1$$

$$\frac{AF}{\sin \angle ACE} = 2R_1$$

w_2 :

$$\triangle AEC: \quad \frac{CE}{\sin \angle CAE} = 2R_2$$

$$\frac{AF \cdot \sin \angle CAE}{CE \cdot \sin \angle ACE} = \frac{1}{2}$$

$$\triangle ACF: \quad \frac{AC}{\sin \angle AFC} = \frac{AF}{\sin \angle ACF}$$

$$\sin \angle ACF = \frac{AC \cdot \sin \angle AFC}{AF}$$

$$\angle FAC = \angle CAE$$

$$AF \parallel CE$$

$$\triangle ACF: \quad \frac{CF}{\sin \angle FAC} = 2R_1$$

$$\frac{CF}{AF} = \frac{1}{2}$$

$$\triangle CAE: \quad \frac{AE}{\sin \angle ACE} = 2R_2$$

$$AE = 2CF$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} x^3 + 7x^2 + 11x - 3 \\ - (x^3 - 3x^2) \\ \hline 10x^2 + 11x \\ - (10x^2 - 30x) \\ \hline 41x - 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 7x^2 + 11x - 3 \\ - (x^3 + 3x^2) \\ \hline 4x^2 + 11x - 3 \\ - (4x^2 + 12x) \\ \hline -x - 3 \\ - (-x - 3) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$x^2 + 4x - 1 = 0.$$

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 20.$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}.$$

№6.

$$x^2 - 2xy + y^3 - 3y^2 - 1 = 0.$$

$$D = (-2y)^2 - 4(y^3 - 3y^2 - 1) = -4y^3 + 16y^2 - 4.$$

№4.

$$\frac{1}{\sqrt{4x - x^2 - 3} - 3} \leq \frac{1}{\sqrt{2x - x^2} - \sqrt{x^2 + x - 2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2x - x^2} - \sqrt{x^2 + x - 2}} - \frac{1}{\sqrt{4x - x^2 - 3} - 3} \geq 0.$$

$$\frac{\sqrt{4x^2 - x^2 - 3} - 3 - \sqrt{2x - x^2} + \sqrt{x^2 + x - 2}}{(\sqrt{2x - x^2} - \sqrt{x^2 + x - 2})(\sqrt{4x - x^2 - 3} - 3)} \geq 0.$$

$$(\sqrt{2x - x^2} - \sqrt{x^2 + x - 2}) \mid 4$$

$$\begin{aligned} a_1 - b_1 &= a_2 + b_2 + 1 \\ a_2 - b_2 &= a_1 + b_1 + 1 \end{aligned}$$

$$a_1 - a_2 = b_1 + b_2 + 1$$

$$a_2 - a_1 = b_1 + b_2 + 1$$

$$\downarrow$$

$$a_1 = a_2, b_1 = b_2.$$

почему не
противоречит?

$$a - b$$

$$a + b + 1$$

$$2^{2024} \cdot 3$$

$$3^3 \cdot 5^{2024}$$

$$2^{2024} \cdot 3 \cdot 5$$

$$3^3 \cdot 5^{2023}$$

$$2^{2024} \cdot 3 \cdot 5^{2024}$$

$$3^3$$

2025 вар.

аналогично
если 2^{2024} содержит
 $a + b + 1$
10125 вар.

$$10125 \cdot 2 = 20250 \text{ вар.}$$

аналогично если $a - b$ содер.

жит 0, 2, 3, 4 тройки

$$\Rightarrow 2025 \cdot 5 = 10125 \text{ вар.}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1/3.

$a(a+1)$, $a \in \mathbb{N}$ - хорошее число

$$a(a+1) - b(b+1) = 81 \cdot 10^{2024}$$

какая-то таких пар?

$$a^2 + a - b^2 - b = (a^2 - b^2) + (a - b) = (a - b)(a + b + 1) = 81 \cdot 10^{2024}$$

$$81 \cdot 10^{2024} = 2^{2024} \cdot 3^4 \cdot 5^{2024}$$

$a - b = 4 \Rightarrow a$ и b одной четн.

аналогично

2^{2024}
в одной
паре

$a + b = 4$, $a + b + 1 = 5$.

$a - b = 4 \Rightarrow a + b = 7$.

$$\begin{cases} a - b = k, & k \text{ делит } 81 \cdot 10^{2024} \\ a + b + 1 = \frac{81 \cdot 10^{2024}}{k} \end{cases}$$

$$2a + 1 = \frac{k^2 + 81 \cdot 10^{2024}}{k}$$

$$2a = \frac{k^2 - k + 81 \cdot 10^{2024}}{k}$$

$$a = \frac{k^2 - k + 81 \cdot 10^{2024}}{2k}$$

$$b = a - k = \frac{2k - (k^2 - k + 81 \cdot 10^{2024})}{2k} = \frac{-k^2 + 3k + 81 \cdot 10^{2024}}{2k}$$

$$\frac{k^2 - k + 81 \cdot 10^{2024} - 2k^2}{2k} = \frac{-k^2 - k + 81 \cdot 10^{2024}}{2k}$$

1/2.

$$x\sqrt{8} + y\sqrt{18} + z\sqrt{29} = \sqrt{32} + \sqrt{116}, \quad x, y, z \in \mathbb{Z}$$

$$\min(x^2 + y^2 + z^2) = ?$$

$$\sqrt{32} + \sqrt{116} = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{29}$$

$$x\sqrt{8} + y\sqrt{18} + z\sqrt{29} = 2\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y + z\sqrt{29}$$

$$2\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y + z\sqrt{29} = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{29}$$

$$2\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y - 4\sqrt{2} = 2\sqrt{29} - z\sqrt{29}$$

$$\sqrt{2}(2x + 3y - 4) = \sqrt{29}(2 - z)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2(2x+3y-4)^2 = 29(2-z)^2$$

$2x+3y-4$ не может содержать $\sqrt{29}$.

$\sqrt{2}$ тоже, тогда $2x+3y-4=0$; $z=2$.

дальше найти $\min x^2-y^2$.

$$2x+3y-4=0; 2x+3y=4.$$

$$2x = 4-3y \rightarrow 4-3y:2; y:2.$$

$$x = \frac{4-3y}{2} = 2-y-\frac{y}{2}.$$

$$\frac{y}{2} = k; x = 2-2k-k = 2-3k.$$

$$y = 2k.$$

$$x^2-y^2 = (2-3k)^2 - (2k)^2 = 4-12k+9k^2-4k^2 =$$

$$= 5k^2-12k+4.$$

$$k_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{12}{2 \cdot 5} = 1,2.$$

$$5 \cdot 1,2^2 - 12 \cdot 1,2 + 4 = -3,2.$$



$$k=1: x^2-y^2 = 5-12+4 = -3 \text{ (при } x=-1, y=2)$$

$$k=2: 20-24+4=0. \text{ (при } x=-4, y=4)$$

$$x^2-y^2+z^2 = 1-4-4+2^2 = -1.$$

У6.

$$\begin{cases} x^2-2xy+y^3-3y^2-1=0, \\ 2x-xy-y^3+5y^2-3y+2=0 \end{cases}; \begin{cases} y^3=3y^2-x^2+2xy+1 \\ y^3=\frac{-5y^2+xy-2x+3y-2}{5y^2-xy+2x-3y+2} \end{cases}$$