



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}, \text{ тринадцатый член равен } 5-x, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{(13x-35)(x+1)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 560$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть b - коэффициент нашей геометрической прогрессии,
 a_n - n -ый член этой прогрессии ($a_{n+1} = a_n b$). Тогда

$$a_{13} = a_7 \cdot b^6 \text{ и } a_{15} = a_{13} b^2, \text{ или:}$$

$$b^6 \cdot \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = 5-x$$

$$(5-x)b^2 = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

В случае если $x = \frac{35}{13}$, то

$$a_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = 0$$

в геог. прогрессии не может $\Rightarrow x \neq \frac{35}{13}$

Запишем ОДЗ:

$$\frac{13x-35}{(x+1)^3} \geq 0 \quad (x+1 \neq 0, x \neq -1) \quad \text{и} \quad (13x-35)(x+1) \geq 0$$



$$x \in (-\infty; -1) \cup [\frac{35}{13}; +\infty)$$

Из второго равенства заметим, что справа корень ≥ 0 , слева $b^2 > 0$, значит $5-x > 0$, т.е. $x < 5$ (в геог. прогрессии $b \neq 0; 1$). Итого:

ОДЗ:

$$x \in (-\infty; -1) \cup (\frac{35}{13}; 5)$$

Тогда из I равенства $5-x$ должно быть равно 0, но $5-x = 5 - \frac{35}{13} = \frac{30}{13} \neq 0$. Противоречие. Также очевидно что $b \neq 0$, т.к. $a_{13} = 0$ только при $x = 5$, а $a_7 = 0$ только при $x = \frac{35}{13}$, т.е. одновременно нулями они быть не могут, а при $b = 0$ все члены равны 0. Противоречие. Значит, все члены прогрессии $\neq 0$.

Тогда из II равенства т.к. $a_{15} \in a_7 \Rightarrow a_{15} = a_7 \cdot b^8$:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot b^3 = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$b^6 = \sqrt{(x+1)^4} = (x+1)^2 \quad (x \neq \frac{35}{13})$$

Тогда при $x \neq -1$;

$$b^2 = \sqrt{x+1}$$

Из I равенства:

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot \sqrt{(x+1)^3} = 15-x$$

$$13x-35 = x^2+25-10x$$

$$x^2-23x+60=0$$

$$(x-20)(x-3)=0$$

$$x-20=0 \text{ или } x-3=0$$

$$x=20 \rightarrow \text{не подходит по } OДЗ \quad x=3 \quad (3 = \frac{39}{13} > \frac{35}{13})$$

Во II равенстве во обоих случаях:

подставим $\sqrt{13x-35} \cdot b^6$, получим

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot (x+1)^2 = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$\sqrt{(13x-35)/(x+1)} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} - \text{очевидно правда при } x \in OДЗ.$$

Ответ: $x=3$; $x=-5$

$$x \neq -1$$

$$b^2 = \sqrt{-x-1}$$

Из I равенства

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot \sqrt{-(x+1)^3} = 5-x$$

$$35-13x = x^2+25-10x$$

$$x^2+3x-10=0$$

$$(x+5)(x-2)=0$$

$$x+5=0 \text{ или } x-2=0$$

$$x=-5$$

$x=2 \rightarrow$ не подходит по условию



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

По формуле косинуса суммы:

$$\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x =$$

$$= (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - 2 \sin^2 x \cos x = \cos x (\cos^2 x - 3 \sin^2 x)$$

Из основного тригонометрического тождества

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ получаем, что } -3 \sin^2 x = 3 \cos^2 x - 3. \text{ И.е.}$$

$$\cos x (\cos^2 x - 3 \sin^2 x) = \cos x (4 \cos^2 x - 3) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$$

Также по формуле косинуса ~~двойного~~ угла

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x. \text{ Тогда}$$

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x + 3 \cos^2 x - 3 \sin^2 x + 6 \cos x =$$

(Вместо $-3 \sin^2 x$ подставим $3 \cos^2 x - 3$. Тогда:)

$$= 4 \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos x - 3$$



1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что по центральной симметрии если мы закрасим 1 клетку в верхней половине, то однозначно закрашиваем соответствующую в нижней, и никакие 2 клетки в одной половине не поместятся.

Не центрально-симметричны (оба в верхней или оба в нижней). Аналогично для горизонтальной (горизонтальная сред. линия не поместится) симметрии. Для вертикальной возьмём левую и правую половины и получаем так же. Таким образом, для каждой из этих симметрий достаточно в одной из половин (вдв. центр. и гор. - верхняя, для верт. - левая) выбрать любые 4 точки, а другие 4 точки в другой половине определятся однозначно. Таким образом, суммарное кол-во способов выбрать закрасить 8 клеток в сумме для трёх симметрий равно $3 \cdot C_{25000}^4 = 3 \cdot C_{25000}^4$.

Но заметим, что мы только лишь посчитали те случаи, когда выполняются одновременно 2 или 3 симметрии. Также заметим, что



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 3

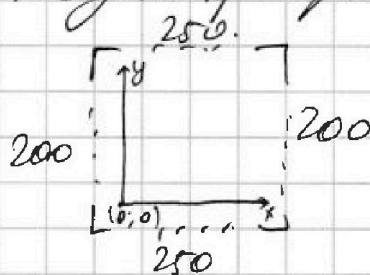
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

центр. + верт. = центр. + гор. = верт. + гор. (симметрия)

Для доказательства возьмем точку с координатами (x', y') , координат. плоскость направим ^{центр} ^{верт.} ^{гор.} ^{левый} ^{ниж.} ^{клетки} ^{для} ^{прямой} по его сторонам. Тогда прямая

повернется в такое положение

Тогда:



1) По верт. симметрии образует

закрашивается точка $(250-x', y')$ $(250-x'-1, y')$. По центр. сим. для каждой из этих двух точек: $(x', 200-y'-1)$ и $(250-x'-1, 200-y'-1)$ (для (x', y')).

2) По гор. получаем точку $(x', 200-y'-1)$. По центр. получаем $(250-x'-1, 200-y'-1)$ и $(250-x'-1, y')$ соответственно.

3) По верт. получаем $(250-x'-1, y')$, по гор.: $(x', 200-y'-1)$ и $(250-x'-1, 200-y'-1)$ соответственно.

Получаем, что если мы применили 2 симметрии, то третья тоже работает. Тогда в 1 сумме $(3 \cdot C_{25000}^4)$ мы трижды посчитали пересечение



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

симметрий, т.е. ею надо волевать флажки.

Заметим, что, применяя 2 симметрии, из одной точки мы однозначно получим 3 новых, причем каждая из них находится в разрыве четвертинок прямоугольника (если его поделить пополам средними линиями). Т.е. чтобы найти все варианты закрасок в клетках для 2 (автоматически для трех) симметрий, надо найти кол-во вариантов выбрать 2 клетки в одной из четвертинок, которые определят остальные 6 клеток. Это равно $C_{100-125}^2$. Т.е. мы волеваем флажки, тогда итоговый ответ:

$$3 \cdot C_{25000}^2 - 2 \cdot C_{12500}^2$$

$$\text{Ответ: } \frac{3 \cdot 25000!}{24996! \cdot 4!} - \frac{2 \cdot 12500!}{12498! \cdot 2!}$$

$$\text{Ответ: } \frac{3 \cdot 25000!}{24996! \cdot 4!} - 12500 \cdot 12499$$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим III условие с учетом, что $p \geq 2$:

$(a-c)(b-c) = p^2$, где p - некое простое число, т.к.

у p только 2 делителя 1 и p , то рассмотрим все варианты:

1) $a-c=1$ $b-c=p^2$

$a=c+1$ $b=c+p^2$

2) $a-c=p^2$ $b-c=1$

$a=c+p^2$ $b=c+1$

3) $a-c=-1$ $b-c=-p^2$

$a=c-1$ $b=c-p^2$

4) $a-c=-p^2$ $b-c=-1$

$a=c-p^2$ $b=c-1$

5) $a-c=b-c=p$

$a=b=c+p$

6) $a-c=b-c=-p$

$a=b=c-p$

I и IV случаи не подходят под условие $a > b$, так же и V и VI случаи (в них $a=b$)

Погда остаются 2 случая:

1) $a=c+p^2$ $b=c+1$

2) $a=c-1$ $b=c-p^2$

Из II условия: $a-b = p^2 - 1 \not\equiv 3$ $a-b = p^2 - 1 \not\equiv 3$
($p-1$ | $p+1$) $\not\equiv 3$

Заметим, что $(p-1)(p+1) \not\equiv 3$ всегда кроме случаев, когда $p \equiv 3$. А так как p простое, то $p=3$. Погда



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Посмотрим на IV условие:

$$1) c + p^2 + c^2 + 2c + 1 = 560$$

$$1) (c + 9) + (c^2 + 2c + 1) = 560$$

$$c^2 + 3c - 550 = 0$$

По теор. Виета

$$c_1 = -25 \quad c_2 = 22$$

Восстановим значения a и b :

$$a_1 = -25 + 9$$

$$b_1 = (-25 + 22 + 1) - 25 + 1$$

$$a_1 = -16$$

$$b_1 = -24$$

$$a_2 = 22 + 9$$

$$b_2 = 22 + 1$$

$$a_2 = 31$$

$$b_2 = 23$$

$$2) (c - 1) + (c^2 - 18c + 81) = 560$$

$$c^2 - 17c - 480 = 0$$

По теор. Виета

$$c_3 = 32 \quad c_4 = -15$$

$$a_3 = 32 - 1$$

$$b_3 = 32 - 9$$

$$a_3 = 31$$

$$b_3 = 23$$

$$a_4 = -15 - 1$$

$$b_4 = -16 - 9$$

$$a_4 = -16$$

$$b_4 = -24$$

Ответ: $(-16; -24; -25); (31; 23; 22); (31; 23; 32); (-16;$

$-24; -15)$



1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

б. Коэф. экв. пр. $Q_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$; $Q_3 = 5-x$; $Q_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$

Q_{13} $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = \frac{5-x}{b^6}$ $\wedge$

$(5-x)b^2 = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$

$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot b^8 = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$

$b^8 = \sqrt{(x+1)^4} = (x+1)^2$ (при $x \neq \frac{35}{13}$)

$b^2 = \sqrt{x+1}$; $b^6 = \sqrt{(x+1)^3}$

$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot \sqrt{(x+1)^3} = 5-x$

$\sqrt{13x-35} = 5-x$

$13x-35 = x^2+25-10x$

$x^2-23x+60=0$

20 и 3
 x $\checkmark$

$15-x \geq 0$; $x \leq 5$

$(5-x)\sqrt{(x+1)} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$

$5-x = \sqrt{13x-35}$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
 $-\sin^2 x = \cos^2 x - 1$

$\cos(x+\beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

$\cos 3x = \cos^2 2x \cdot \sin x + \cos 2x \cdot \cos x - \sin^2 2x \cdot \sin x =$

$= (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - 2 \sin^2 x \cos x$

$\cos x (\cos^2 x - 3 \sin^2 x) + 3 \cos^2 x - 3 \sin^2 x + 6 \cos x$

$4 \cos^3 x - 3 \cos x + 3 \cos^2 x + 3 \cos^2 x - 3 + 6 \cos x = 0$ p

$4 \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos x - 3 = 0$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

978

$$\text{X) } a-c=1 \quad b-c=p^2$$

$$\text{② } a-c=p^2 \quad b-c=1$$

$$\begin{array}{r} \times 17 \\ 32 \\ \hline 51 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 34 \\ 51 \\ \hline 544 \end{array}$$

$$a=c+1 \quad b=c+p^2$$

$$a=c+p^2 \quad b=c+1$$

$$\begin{array}{r} \times 32 \\ 32 \\ \hline 64 \end{array}$$

$$\text{③ } a-c=-1 \quad b-c=-p^2$$

$$\text{X) } a-c=-p^2 \quad b-c=-1$$

$$\begin{array}{r} \times 32 \\ 32 \\ \hline 64 \end{array}$$

$$a=c-1 \quad b=c-p^2$$

$$a=c-p^2 \quad b=c-1$$

$$\begin{array}{r} \times 96 \\ 2024 \\ \hline 544 \end{array}$$

$$\text{X) } a-c=b-c=\pm p$$

$$a-b=p^2-1 \neq 3$$

$$\begin{array}{r} \times 544 \\ 480 \end{array}$$

$$a=b$$

$$1) a=c+p^2 \quad b=c+1$$

$$2) a=c-1 \quad b=c-p^2 \quad c=9$$

$$a-b=p^2-1 \neq 3 \quad 550=11 \cdot 50$$

$$a-b=p^2-1 \neq 3$$

$$p=3$$

$$22 \cdot 25$$

$$p=3$$

$$c+9+c^2+2c+1=560$$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 22 \\ \hline 50 \end{array}$$

$$c-1+c^2+p^4-2cp^2=560$$

$$c^2+3c-550=0$$

$$\begin{array}{r} \times 50 \\ 50 \\ \hline 550 \end{array}$$

$$c-1+c^2+81-18c=560$$

$$-25 \quad 22$$

$$\begin{array}{r} \times 550 \\ 550 \end{array}$$

$$c^2-17c-480=0$$

$$\begin{array}{r} \times 480 \\ 480 \end{array}$$

$$c = \frac{17 \pm \sqrt{289 + 1920}}{2} = \frac{17 \pm 47}{2}$$

$$\begin{array}{r} \times 47 \\ 47 \\ \hline 329 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 329 \\ 108 \\ \hline 2209 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 47 \\ 47 \\ \hline 64 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 1920 \\ 289 \\ \hline 2209 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 32 \\ 25 \\ \hline 160 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 32 \\ 160 \\ \hline 480 \end{array}$$

$$= 32, -15 \quad -16 \pm 576 = 560$$

$$31+529=560$$

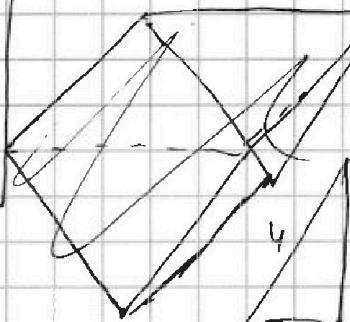
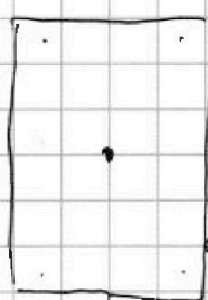
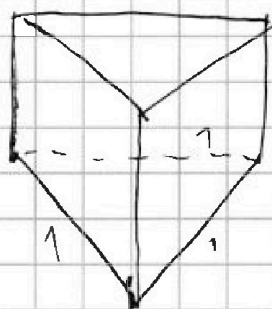


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

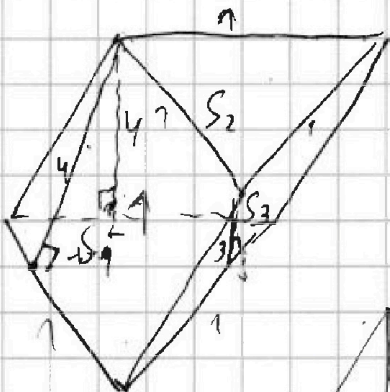
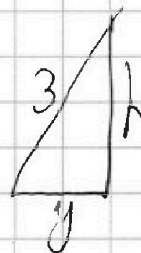
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



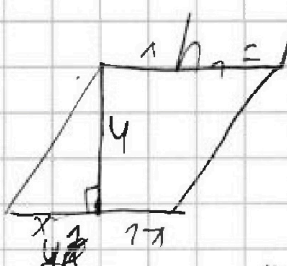
$$\begin{aligned}h^2 + x^2 &= 16 \\h^2 + y^2 &= 9 \\x^2 - y^2 &= 7\end{aligned}$$



$$S_1 = S_2 = S_3 = h_{1,2,3}$$

$$h_1 = h_2 = 4, h_3 = 3$$

$$C_{2500}^2 = \frac{12500 \cdot 12499}{2}$$



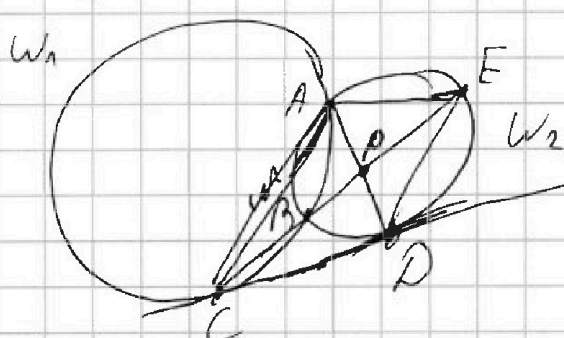
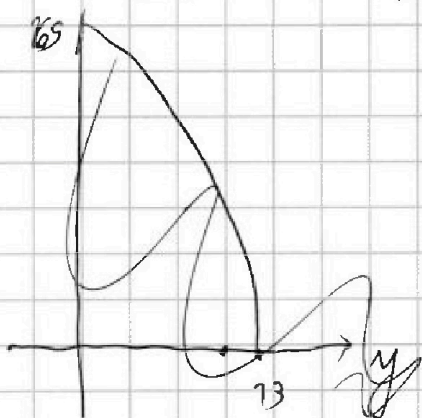
- 1) C_{2500}^4
- 2) C_{2500}^4
- 3) C_{2500}^4

$$3 \cdot C_{2500}^2 = 2 \cdot 2500 \cdot 12499$$

пусть $y \geq 12$:

$$y + 1 + 3y - 36 = \sqrt{169 \cdot 2^2}$$

$$CP:PE = 3:10$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

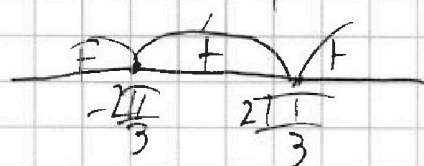
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y' = 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 3 = 0$$

$$4 \cos^2 x + 4 \cos x + 1 = 0 = (2 \cos x + 1)^2$$

$$\cos x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{4} = -0,5 \quad \cos x = -0,5$$



$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$$

$$\cos x = 1$$

$$\max_p = 4 + 6 + 3 - 3 = 10$$

$$\cos x = 0$$

$$\min_p = -3$$

$$\cos x + \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos 3x + \cos x = -2 \sin 2x \sin x$$

$$3 \cos^2 x - 3 \sin^2 x - 2 \sin^2 x \cos x + \cos x$$

$$(\cos x \cdot \cos x)' = -\sin x \cos x - \cos x \cdot \sin x = -2 \cos x \sin x = -\sin 2x$$

$$(\cos^3 x)' = -2 \cos 2x \cdot \cos x + \sin 2x \cdot \sin x$$

$$-2 \cos^2 x + 2 \cos x$$