



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



- ① [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}, \text{ тринадцатый член равен } 5-x, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{(13x-35)(x+1)}.$$

- ② [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .

- ⑤ [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- ⑥ [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 560$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ш1

Пусть $b_7 = \sqrt{\frac{(13x-35)^7}{(x+1)^3}} = b_1 q^6$

ОДЗ: $x \neq -1$

$(13x-35)(x+1) \geq 0$

$x \in (-\infty, -1) \cup \left[\frac{35}{13}, +\infty\right)$

$b_{13} = 5-x = b_1 q^{12}$

$b_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} = b_1 q^{14}$

Заметим, что $13x-35 \neq 0$ т.к. тогда $b_7 = b_{15} = 0$ и все выражения должны состоять из нулей, но $5-x \neq 0$.

Также заметим, что

$\frac{b_7^4}{b_7} = \frac{b_1^4 q^{48}}{b_1 q^6} = b_1^3 q^{42} = (b_1 q^{14})^3 = b_{15}^3$

Подставим b_{13} , b_7 и b_{15} :

$\frac{(5-x)^4}{(13x-35)^{\frac{3}{2}}} = (5-x)^4 \sqrt{\frac{(x+1)^3}{(13x-35)}} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}^3$

Далее будем решать относительно модуля $13x-35$, а на

$(x+1)^{\frac{3}{2}}$ сократим:

$(5-x)^4 = (13x-35)^2$

$(5-x)^2 = 13x-35$

1) $x^2 - 23x + 60 = 0$

$x = 20 \quad x = 3$

2) $x^2 + 3x - 10 = 0$

$x = 2 \quad x = -5$

(не подходит 003)

$x = 20$ не подходит, т.к. тогда $b_7 > 0$, $b_{13} < 0$, $b_{15} > 0$, а такое не может быть.

Ответ: $x = -5, x = 3, x \neq 20$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x+z-x^2} \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 4-x-z \geq 0 \\ y+x+z-x^2 \geq 0 \end{cases}$$

т.к. $z^2 \geq 0$, то $169 - z^2 \leq 169$ и $\sqrt{169 - z^2} \leq 13$.

Значит $|y+1| + 3|y-12| \leq 13$.

1. $y \leq -1$

$$-y-1-3y+36 \leq 13$$

$$-4y \leq -22$$

$$y \geq \frac{11}{2} \text{ - объединяя с } y \leq -1 \text{ получим } y \in \emptyset$$

2. $-1 < y < 12$

$$y+1-3y+36 \leq 13$$

$$-2y \leq -24$$

$$y \geq 12 \text{ - объединяя с } -1 < y < 12 \text{ получим } y \in \emptyset$$

3. $y \geq 12$

$$y+1+3y-36 \leq 13$$

$$4y \leq 48 \quad y \leq 12 \text{ - объединяя с } y \geq 12 \text{ получим } y = 12.$$

Подставим $y = 12$ во второе уравнение системы:

$$\sqrt{169 - z^2} = 13 \Rightarrow z = 0.$$

Подставим $y = 12$ и $z = 0$ в первое ур-е системы:

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2} \quad | \text{ возведем в квадрат}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{12+x-x^2} - 5 \quad | \text{ возведем в квадрат (X)}$$

$$7 - 2\sqrt{12+x-x^2} = 4(12+x-x^2) - 20\sqrt{12+x-x^2} + 25$$

$$\sqrt{12+x-x^2} = 1$$

$$7 - 2 \cdot 1 = 4 \cdot 1 - 20 \cdot 1 + 25$$

$$4 \cdot 1 - 48 \cdot 1 + 18 = 0$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = \frac{3}{2}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} \geq 0$$

возведем в квадрат
возведем в квадрат



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$t_1 = 3$$

$$t = \frac{3}{2}$$

$$\sqrt{12+x-x^2} = 3$$

$$x-x^2+12=9$$

$$x-x^2+3=0$$

$$x^2-x-3=0$$

$$D = 1+12=13$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Одна подходит по ОДЗ, т.к.

$$\sqrt{13} < 4$$

Не подходит отриц. т.к. тогда в (x) левая часть отриц., а правая полож.

$$\sqrt{12+x-x^2} = \frac{3}{2}$$

$$12+x-x^2 = \frac{9}{4}$$

$$x^2-x-\frac{39}{4}=0$$

$$4x^2-4x-39=0$$

$$D = 16 + 16 \cdot 39 = 16 \cdot 40 = 640$$

$$x = \frac{4 \pm 8\sqrt{10}}{8} = \frac{1 \pm 2\sqrt{10}}{2} = 0,5 \pm \sqrt{10}$$

т.к. $\sqrt{10} < 3,5$, одна подходит

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ 12+x-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-3, 4]$$

не подходит с "+" т.к. тогда в (x) левая часть полож., а правая отриц.

Ответ: $\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; 12; 0\right) \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; 12; 0\right) \left(\frac{1+2\sqrt{10}}{2}; 12; 0\right) \left(\frac{1-2\sqrt{10}}{2}; 12; 0\right)$

Не подходит из-за условия $\sqrt{12+x-x^2}$

Ответ: $\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; 12; 0\right) \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; 12; 0\right) \left(\frac{1+2\sqrt{10}}{2}; 12; 0\right) \left(\frac{1-2\sqrt{10}}{2}; 12; 0\right)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$$

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos(x+2x) = \cos 2x \cos x - \sin x \sin 2x = (\cos^2 x - 1)\cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x) = \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x\end{aligned}$$

$$p = 4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos^2 x - 3 + 6\cos x$$

$$p = 4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3$$

$$\cos x = t, t \in [-1, 1]$$

$$p = f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$$

$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 3(2t+1)^2$$

Т.к. $f'(t) \geq 0$ всегда, то $f(t)$ возрастает на всей промежутке $\Rightarrow$

$$\Rightarrow f(-1) \leq p \leq f(1)$$

$$\underline{\underline{-4 \leq p \leq 10}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

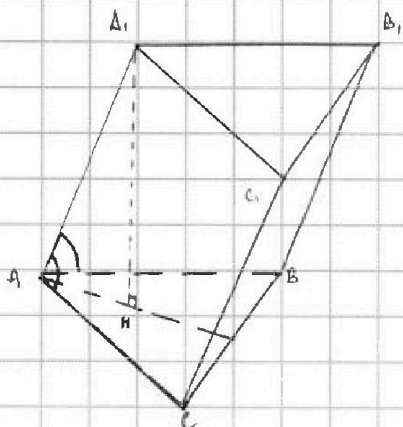
6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

17



Реш: $(ABC) \perp (A_1B_1C_1)$

ABC - прав. Δ $AB = 1$

$$S_{AA_1C_1C} = 4$$

$$S_{AA_1B_1B} = 4$$

$$S_{CC_1A_1B_1} = 3$$

$$\text{Максимум } h = A_1H$$

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad S_{AA_1B_1B} &= AB \cdot AA_1 \sin \angle BAA_1 = AA_1 \sin \angle BAA_1 = 4 \\ S_{AA_1C_1C} &= AC \cdot AA_1 \sin \angle CAA_1 = AA_1 \sin \angle CAA_1 = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sin \angle BAA_1 = \sin \angle CAA_1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \angle BAA_1 = \angle CAA_1$$

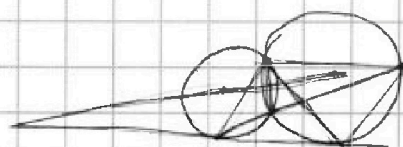


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

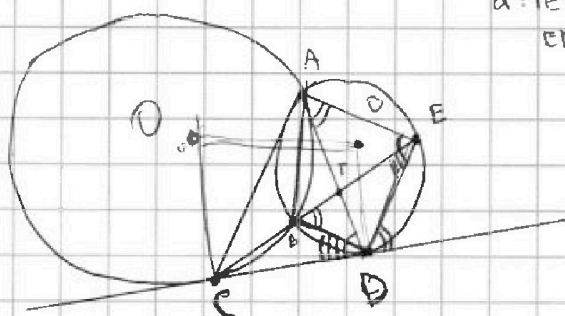
СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\alpha: TE = 3:10$$

$$ED: CO = ?$$



$$\cos 2x(2\cos x + 3) + \frac{\sqrt{5}}{2}(2\cos x + 3) =$$

$$= (2\cos x + 3) \left(\cos 2x + \frac{\sqrt{5}}{2} \right) = p + \frac{15}{2}$$

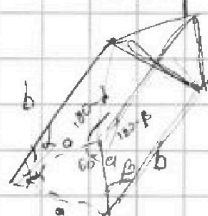
$$(2\cos x + 3)(2\cos 2x + 5) = 2p + 15$$

$$\cos 3x + 2\cos 2x + 6\cos x = p$$

$$\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x + 2\cos 2x + 6\cos x = p$$

$$2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x + 6\cos^2 x - 3 + 6\cos x = p$$

$$f(x) = p = 4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3$$



$$f'(x) = 12\cos^2 x + 12\cos x + 3 =$$

$$= 3(4\cos^2 x + 4\cos x + 1) =$$

$$= 3(2\cos x + 1)^2 \geq 0 - \text{всегда} \Rightarrow$$

$$f(x) - \text{всегда} \text{ всегда} \rightarrow p \in [-4; 10]$$

$$ab \sin \alpha = 4$$

$$ab \sin \beta = 3$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{\cos 3x + 3\cos 2x + 2\cos x + 3\cos x}{\frac{3}{2}\cos \frac{3x}{2}\cos \frac{x}{2} + \cos 2x(2\cos x + 3) + 5\cos x + \frac{15}{2}} = p + \frac{15}{2}$$

$$\sin \beta = \frac{3}{4} \sin \alpha$$

$$\cos 2x \cos x + 3\cos 2x + 5\cos x$$

$$D = 4 \rightarrow$$

$$x + \frac{6}{x} = 2$$

$$3x + 3y = 2$$

$$xy = 2$$

$$6x^2 - 2x + 6 = 0$$

$$\frac{y}{x} = \frac{2}{x}$$

$$5a + 2ab + 3b =$$

$$2ab + 3a + 5b$$

$$8a - 3ab + 5b - 5ab =$$

$$= 3a(1-b)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$a_1 \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = b q^6$$

$$a_2 \quad 5-x = b q^{12}$$

$$a_3 \quad \sqrt{(13x-35)(x+1)} = b q^{14}$$

$$\frac{(13x-35)^{\frac{3}{2}} (x+1)^{\frac{3}{2}}}{(5-x)^{\frac{12}{2}}} = \frac{13x-35}{(5-x)^{\frac{12}{2}}}$$

$$\frac{a_3^2}{a_2} = \frac{b^2 q^{28}}{b q^{12}} = b q^{16}$$

$$|y+1| + 3|y-12| \leq 13$$

$$\frac{(5-x)^4}{(13x-35)^{\frac{1}{2}}} = (13x-35)^{\frac{3}{2}} (x+1)^{\frac{3}{2}}$$

$$(5-x)^4 = (13x-35)^2$$

$$(5-x)^2 = 13x-35$$

$$(5-x)^2 = -13x+35$$

$$x+3 + 4\sqrt{x-2} + 2\sqrt{(x+2)(4-x-2)} = 7x+2x-2x^2+25-20\sqrt{y+x+2-x^2}$$

$$4-x-2 \geq 0$$

$$2 \leq 4-x$$

$$4-x-2 \geq 0$$

$$-13 \leq 2 \leq 4-x$$

$$-3 \leq x \leq 17$$

$$-13 \leq 2 \leq 13$$

$$y \geq x^2 - x - 2 \geq x^2 - x - 13 \geq -\frac{1}{4} - 13 = -\frac{53}{4}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$y+13 \geq y+x+2 \geq x^2$$

$$y+20 \geq 0$$

$$y \geq -20$$

$$x+2 \leq 4$$

$$-13 \leq 2 \leq 4-x$$

$$x \leq 17$$

$$0 \leq x+3 \leq 20$$

$$20 \geq 4-x-2 \geq -26 \geq 0$$

$$\frac{5}{4} \quad 10, \quad 20$$

$$x=3$$

$$1) \frac{1}{4}$$

$$2) 2$$

$$3) 4$$

$$\frac{260}{35}$$

$$225 = 27$$

$$a_3 = \frac{a_1^2}{a_2} \cdot \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{7}{3}}$$

$$a_3^3 = \frac{a_1^6}{a_2^3} \cdot \frac{a_2^7}{a_1^7} = \frac{a_2^4}{a_1}$$

$$a_3^3 = \frac{a_2^4}{a_1} = \frac{16}{15} = \frac{128}{15}$$

$$x^2 - 26x + 60 = 0$$

$$25 - 10x + x^2 = 13x - 35$$

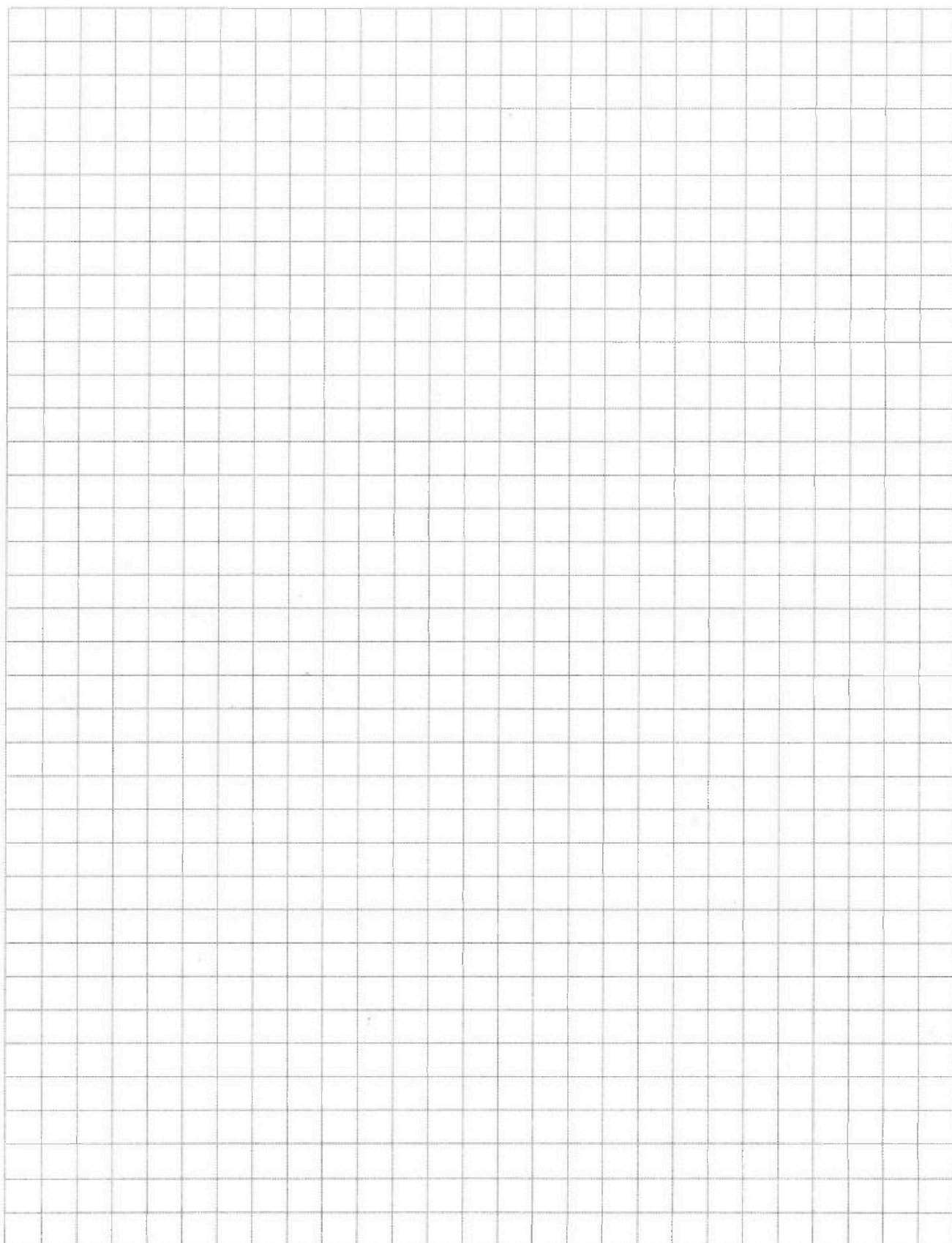


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$17 \quad x = -3$$

$$2-3 \leq x+z \leq 4$$

$$x \leq 4-z \leq 4+13-17$$

$$-13 \leq z \leq 7$$

$$y^2 + 2y + 1 + 9y^2 + 144y - 3 \cdot 24y + 18 \cdot 16 = 18 \cdot 16$$

$$+ 6|y+1||y-12| = 169 - z^2$$

$$10y^2 - 214y + 1128 + 6|y+1||y-12| = 169 - z^2$$

$$\begin{cases} -3 \leq x \leq 17 \\ -13 \leq z \leq 7 \end{cases}$$

$$4+y \geq x+y+z \geq x^2$$

$$x+z \leq 4$$

$$x+z \geq 0$$

$$-4y \leq -23 \quad y \geq \frac{23}{4}$$

$$|y+1| + 3|y-12| \leq 13$$

$$-y + 3y + 36 \leq 13$$

$$-4y \leq 2$$

$$18 + x - x^2 \geq 0 \quad x^2 - x \leq 18$$

$$y \in [-1, 12]$$

$$y+1-3y+36 \leq 13$$

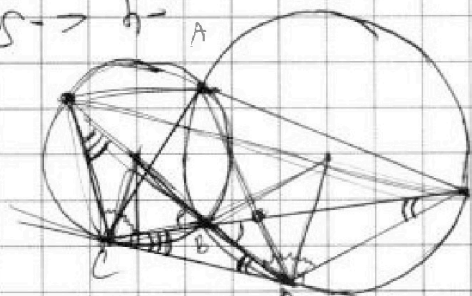
$$\sqrt{x+3} - \sqrt{x-8} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+12}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{x-8} + 5 = 2\sqrt{18+x-x^2}$$

$$x=33: \quad \sqrt{18+33(-32)}$$

$$4y-1 \geq 3$$

$$4y \geq 4$$



$$[h:3:4] \geq x$$

$$y=0 \quad \log$$

$$y=1 \quad \log$$

$$y=3$$

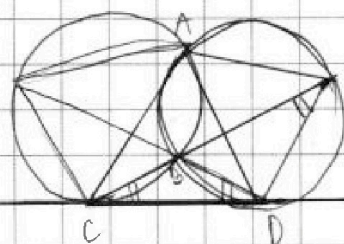
$$y=4$$

$$y=5$$

$$y=6$$

$$\begin{array}{r} 8221 \\ 501 \\ 521 \\ 518 \\ 518 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a-b+5=2ab \\ 2ab+b-a+5=0 \\ y=6 \\ 4+18=25 \end{array}$$



$$-2y+36 \leq 13$$

$$2y \geq 24$$

$$y \geq 12$$

$$y \geq 12$$

$$y \geq 12$$

$$y \geq 12$$

$$y \geq 12$$

$$4y-35 \leq 13$$

$$4y \leq 48$$

$$y \leq 12$$

$$y \leq 12$$

$$y \leq 12$$

$$y \leq 12$$

$$y \leq 12$$

$$y \leq 12$$

$$y \leq 12$$

$$y \leq 12$$

$$y \leq 12$$

$$y \leq 12$$

$$y \leq 12$$

$$y \leq 12$$

$$y \leq 12$$

$$y \leq 12$$

$$y \leq 12$$

$$y \leq 12$$

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_2 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = a+6d$$

$$a_{13} = 5-x = a+12d$$

$$a_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} = a+14d$$

$$\cos 3x = \cos(2x+x) =$$

$$= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x =$$

$$= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin^2 x \cos x =$$

$$6d = a_{13} - a_2$$

$$a_2 = a + a_{13} - a_2$$

$$a = 2a_2 - a_{13}$$

$$= 2a_2 - a_{13} + 14 \frac{a_{13} - a_2}{6} =$$

$$= \frac{12a_2}{6} + \frac{14a_{13}}{6} - \frac{5a_{13}}{6} + \frac{14a_{13}}{6} =$$

$$= -\frac{a_2}{3} + \frac{4a_{13}}{3}$$

$$(13x-35)(x+1) \geq 0$$

$$3\sqrt{(13x-35)(x+1)} = 4(5-x) - \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$3\sqrt{(13x-35)(x+1)} + \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = 4(5-x)$$

$$9(13x-35)(x+1) + \frac{13x-35}{(x+1)^3} + 6\sqrt{\frac{(13x-35)^2}{(x+1)^2}} = 16(5-x)^2$$

$$9(13x-35)(x+1) + \frac{13x-35}{(x+1)^3} + 6\frac{(13x-35)}{(x+1)} = 16(25-10x+x^2)$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x^2} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+2}$$

$$[y+1+2]y-12 = \sqrt{13-z^2}$$

$$y^2+2y+1+9y^2-22y+144 = 169-z^2$$

$$\cos 3x + 2\cos 2x + \cos x = p$$

$$10y^2 - 20y - 24 + z^2 + 6[y^2 - 11y - 12] = 0$$

$$8D > 121 + 48 = 169$$

$$y \in (-\infty, -1] \cup [12; \infty)$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos^2 x - 3 +$$

$$+ 6\cos x = p$$

$$p = 4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3$$

$$p' = 12t^2 + 12t + 3 = 3(t^2 + 4t + 1) =$$

$$D = 144 - 4 \cdot 3 \cdot 12 = 0$$

$$= 3(2t+1)^2$$

$$16y^2 - 136y - 96 + z^2 = 0$$

$$\Delta = 144$$

$$4y^2 - 4y + 48 + z^2 = 0$$

$$16 - 4 \cdot 4 + 48 < 0$$

$$= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x) =$$

$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x =$$

$$= 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$+ +$$

$$\rightarrow -\frac{1}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

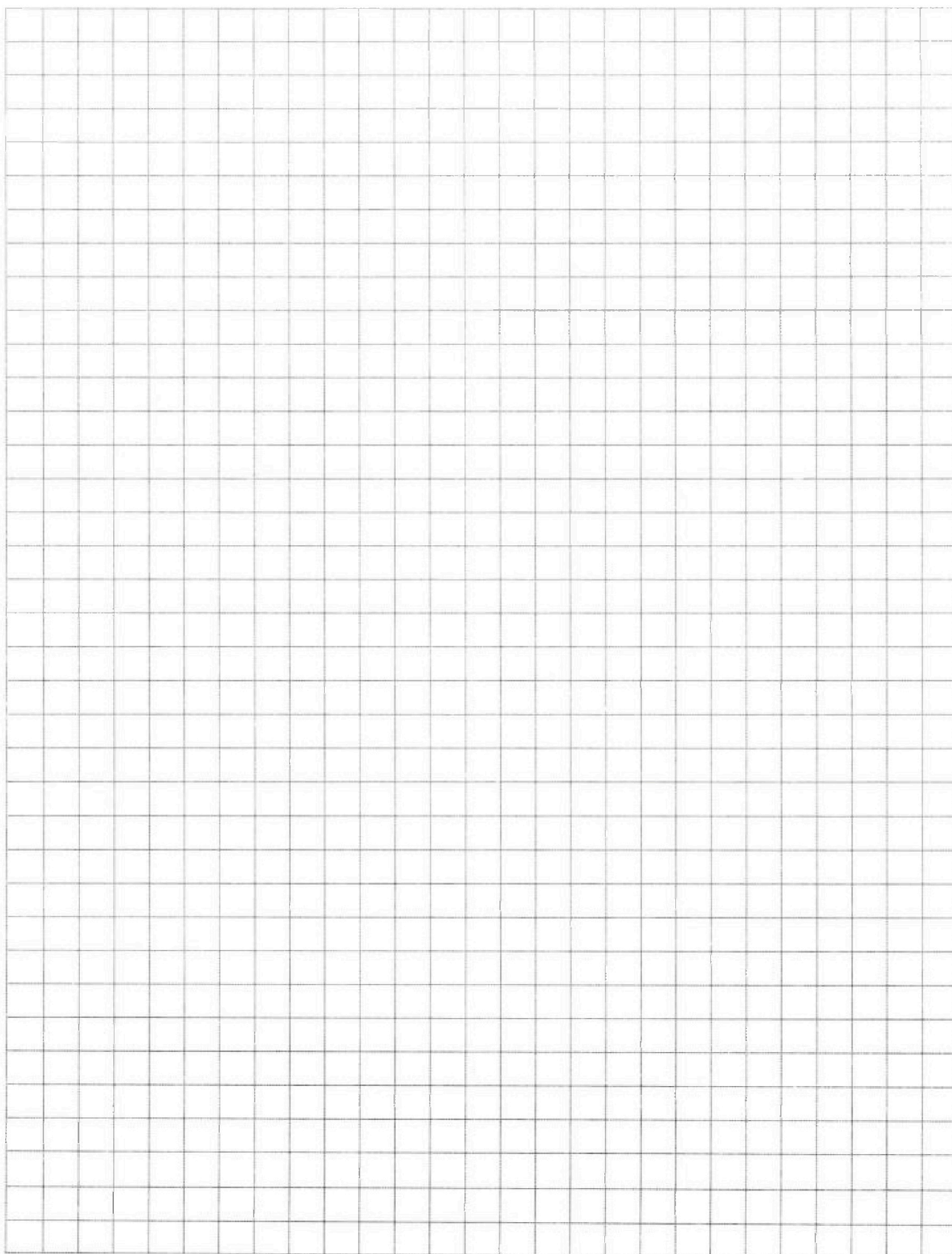
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Д6.

Введем обозначение ^{простого} числа p , квадрат которого равен $(b-c)(a-c)$.

$$(b-c)(a-c) = p^2$$

Т.к. a, b, c — целые числа, ~~то~~ а p — простое, то это верно при варианте:

$$1) \begin{cases} b-c=p \\ a-c=p \end{cases} \Rightarrow a=b - \text{противоречие}$$

$$2) \begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=b-1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \quad b-a+1=p^2$$

p — простое $\Rightarrow p^2 \geq 4$. Из условия $a > b$ получаем $b-a < 0$ $b-a+1 \leq 0$, то есть $p^2 \leq 0$ — противоречие.

$$3) \begin{cases} b-c=1 \\ a-c=p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b+1=p^2 \\ a-b=p^2-1 \end{cases}$$

Заметим, что квадрат любого ^{целого} числа при делении на 3 может давать остаток 0 или 1, а т.к. $a-b \not\equiv 0$, то и

$$p^2-1 \not\equiv 0, \text{ то есть } p^2 \not\equiv 1 \Rightarrow p^2 \text{ делится на } 3, \text{ но так как}$$

p — простое, то $p=3$. Т.к. $p=3$, то $a=b+8$ — подставим в $a+b^2=550$.

$$b^2+b-552=0$$

$$b = -24 \quad b = 23$$

$$a = -16 \quad a = 31$$

$$c = -25 \quad c = 22$$

Ответ: $(-16; -24; -25)$ $(31; 23; 22)$



1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

15

Разделим прямоугольник пополам вертикальной линией. Значит, что при центральной симметрии ровно 4 клетки находятся справа от этой линии и ровно 4 слева. Значит, чтобы определить количество из восьми элементов с центральной симметрией достаточно выбрать 4 клетки с одной половины: C_{2500}^4 . Также также рассуждения можно повторить для симметрии относительно "средних линий" прямоугольника. Тогда всего объектов получится $3C_{2500}^4$. Некоторые из объектов оказались посчитаны несколько раз, а именно, те объекты, что имеют несколько разных симметрий. При этом никакие объекты не могут иметь только две симметрии, так как если объект симметричен относительно вертикальной и горизонтальной линий, то симметричен и относительно центра и т.д. Значит, посчитали сколько объектов могут иметь три симметрии. Для их определения достаточно выбрать две клетки из четверти доски: C_{1250}^2 . Т.к.

Известных объектов, имеющих три симметрии были посчитаны 3 раза, то ответ будет: $3C_{2500}^4 - 2C_{1250}^2 =$

$$= 3 \frac{(2500)!}{4! \cdot (2500-4)!} - 2 \frac{(1250)!}{2! \cdot (1250-2)!} = \frac{2500!}{8 \cdot 2499!} - \frac{1250!}{1249!}$$

Ответ: $\frac{2500!}{8 \cdot 2499!} - \frac{1250!}{1249!}$