



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Обозначив радиусы протрассии за d , составим уравнения:

$$\begin{cases} 3x+3+2d = (x^2+2x)^2 \\ 3x+3+6d = 3x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+3+2d = (x^2+2x)^2 \\ x+1+2d = x^2 \end{cases}$$

Вычтем второе уравнение из первого:

$$2(x+1) = (x^2+2x)(x^2+3x)$$

$$2(x+1) = x(x+1)(x^2+3x)$$

1) $x = -1$ - корень

2) $x \neq -1$

$$2 = x^3 + 3x^2 \Rightarrow x^3 + 3x^2 - 2 = 0$$

$$(x+1)(x^2+2x-2) = 0$$

$$x^2+2x-2 = 0$$

$$D_1 = 1+2=3$$

$$x_1 = -1+\sqrt{3}$$

$$x_2 = -1-\sqrt{3}$$

Учтем: $x_1 = -1 \Rightarrow a_3 = 0, a_5 = 1, a_9 = 3 \Rightarrow d = 0,5$

$$x_2 = -1+\sqrt{3}$$

$$a_3 = 3\sqrt{3}, a_5 = 4, a_9 = 12-6\sqrt{3}, d = 2-\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$x_3 = -1-\sqrt{3}$$

$$a_3 = -3\sqrt{3}, a_5 = 4, a_9 = 16+6\sqrt{3}, d = 2+\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

Ответ: $-1; -1 \pm \sqrt{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y \leq 3 \\ x-3y \geq -3 \\ 3x-y \leq 1 \\ 3x-y \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3y+3 \\ x \geq 3y-3 \\ x \leq \frac{y+1}{3} \\ x \geq \frac{y-1}{3} \end{cases}$$
$$\begin{aligned} 1) 3y+3 &\geq \frac{y+1}{3} \Rightarrow 9y+9 \geq y+1 \Rightarrow y \geq -\frac{10}{8} \\ \frac{y+1}{3} &\geq 3y-3 \Rightarrow y+1 \geq 9y-9 \Rightarrow y \leq \frac{10}{8} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) = (m+n)(m+n-9)$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

Заметим, что числа mn и $m+n-9$ имеют разную четность $\Rightarrow A \equiv 2$

Но если ни p , ни $q \neq 2$, то и $13p^2$, и $45q^2$ - чет. число.

Противоречие $\Rightarrow$ одно из чисел p, q равно 2.

1) $p=2 \Rightarrow (m+n)(m+n-9) = 13 \cdot 4$

$m+n=t, t>0, \text{ и.к. } m, n \in \mathbb{N}$

$$t^2 - 9t - 52 = 0$$

$$t_1 = 13 \Rightarrow m+n = 13$$

$$t_2 = -4 \text{ - не угод. условию}$$

$$m+n = 13$$

$$B = mn \cdot 10 \text{ и } B = 45q^2$$

$$10mn = 45q^2$$

$$2mn = 15q^2 \Rightarrow q=2 \dots$$

$\div 2$

$$\begin{cases} mn = 30 \\ m+n = 13 \end{cases} \rightarrow \text{корни уравнения } x^2 - 13x + 30 = 0$$

$$x_1 = 10$$

$$x_2 = 3$$

$$m=10 \text{ и/или } n=3$$

$$n=3 \text{ и/или } m=10$$

2) $q=2 \Rightarrow (m+n)(m+n-9) = 45 \cdot 4$

$m+n=t, t>0$

$$t^2 - 9t - 300 = 0$$

$$D = 81 + 1200 = 1281$$

Нет решений.

$$\rightarrow \div 3$$

$$\rightarrow \div 9$$

$$\Rightarrow \sqrt{1281} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow t = \frac{9 \pm \sqrt{1281}}{2} \notin \mathbb{N}$$

Ответ: (3; 10), (10; 3)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$AC=18, AZ=6, YZ=8$$

$AX \parallel YZ \Rightarrow \angle CAZ = \angle CYZ$ как соответственные
 $\angle YZA = \angle BAX$ как накрест лежащие.

AX - биссектриса $\Rightarrow \angle CAZ = \angle BAX \Rightarrow \angle CYZ = \angle YZA$

$\triangle AYZ$ - равнобедренный $\Rightarrow AY = AZ = YZ = 6$

$$YC = 6 + 18 = 24$$

$$\triangle CAZ \sim \triangle CYZ (\angle CAZ = \angle CYZ, \angle C \text{ общий}) \Rightarrow \frac{AZ}{YC} = \frac{YZ}{AC} = \frac{24}{18} = \frac{4}{3}$$

$$AZ = 6 \Rightarrow YC = 3t \Rightarrow YX = t$$

$$XB = 4t$$

$$BX = 5t, XC = 3t \Rightarrow \text{по св. биссектрисы } \frac{AB}{AC} = \frac{BX}{XC} = \frac{5}{3}$$

$$AB = 30$$

Пусть $\angle BAC = \alpha$, тогда:

$$\text{по косинусов для } \triangle ABC: BC^2 = 30^2 + 18^2 - 2 \cdot 30 \cdot 18 \cos \alpha$$

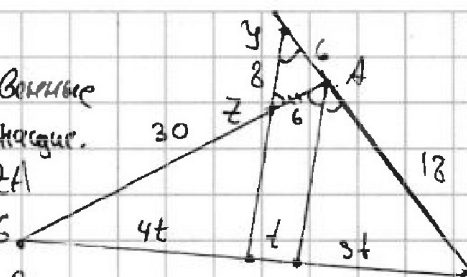
$$\text{для } \triangle AYZ: 64 = 36^2 + 36^2 + 2 \cdot 36 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{-8}{72} = -\frac{1}{9}$$

$$BC^2 = 900 + 324 + 120 = 1344$$

$$BC = \sqrt{16 \cdot 84} = 4\sqrt{84} = 8\sqrt{21}$$

Ответ: $8\sqrt{21}$.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

Преобразуем второе уравнение:

$$x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} = y^4 + 5y^2 + \sqrt{y}$$

Заметим, что функция $f(a) = a^4 + 5a^2 + \sqrt{a}$ возрастает, т.к.

при $a > 0$ $a^4 \uparrow$, $5a^2 \uparrow$, $\sqrt{a} \uparrow \Rightarrow$ каждое своё значение она принимает при единственном значении аргумента.

Следовательно, $x = y$

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{(x+1)(6-x)}$$

Пусть $a = \sqrt{x+1}$, $b = \sqrt{6-x}$, $a, b > 0$, тогда:

$$\begin{cases} a+b+5 = 2ab \\ a^2+b^2 = 4 \end{cases}$$

$$a+b+5 = (a+b)^2 - 4$$

$$(a+b)^2 - (a+b) - 12 = 0 \text{ — корни } 4 \text{ и } -3$$

• $a+b = -3$ — не удов. условию $a > 0$ и $b > 0$

$$\begin{cases} a+b=4 \\ 2ab=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=4 \\ ab=\frac{9}{2} \end{cases} \text{ корни уравнения } t^2 - 4t + \frac{9}{2} = 0$$

$$D_1 = 4 - \frac{9}{2} = -0,5 < 0$$

Нет корней!

Решений нет!

Ответ: $\emptyset$.



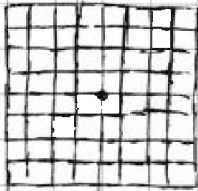
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☒☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что из любой конфигурации можно получить ещё 3 поворота на 90° , 180° , 270° , если эта конфигурация не является симметричной относительно центра квадрата. Всего на доске 81 узел. Для простоты будем считать, что каждая точка доски имеет свой уникальный цвет.

Разделим ответ на 2. Существует 80 симметричных конфигураций, при этом поворотом каждой на 90° можно получить другие 3 без учёта поворотов на доске 80 симметричных конфигураций (80 способов поставить первую точку, 1 способ поставить её симметрично). Всего без учёта поворотов на доске $81 \cdot 80$ конфигураций. Итого есть $81 \cdot 80 - 80$ несимметричных и 80^2 симметричных комбинаций без учёта поворотов. С их учётом кол-во первых увеличивается в 4 раза, кол-во вторых - в 2 (поворот на 180° переводит симметричную конфигурацию в тоже симметричную).

Всего способов почески $\frac{1}{4} \left(\frac{81 \cdot 80}{2} - \frac{80}{2} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{80}{2} = \frac{80 \cdot 80}{8} + \frac{80}{4} = 800 + 20 = 820$

Ответ: 820



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) N лежит на окружности с диаметром AC $\Rightarrow \angle ANM = 90^\circ$
 $AN \perp AC$

2) $PQ \parallel$ высоте, опущенной из $B \Rightarrow PQ \perp AC$
 PQ касается ω, Ω — линии центров ω и Ω ,
т.к. является общей хордой $\Rightarrow AC \parallel O_1O_2$

O_1 — середина CL $X = O_1O_2 \cap MN$

O_2 — середина AM $Y = O_1O_2 \cap AB$

Рассмотрим $\triangle AMN$. XO_2 проходит через O_2 и $\parallel AN$

XO_2 — средняя линия?

Рассмотрим $\triangle ACL$. $O_1Y \parallel AC$ X — середина MN

O_1Y проходит через O_1

O_1Y — средняя линия

Y — середина AC

Рассмотрим $\triangle ACL$. O_2Y — средняя линия $\Rightarrow ML \parallel O_2Y$

Но $O_2Y \parallel AC \Rightarrow ML \parallel AC \Rightarrow ML$ — средняя линия $\triangle ABC$

L — середина AB

3) Обозначим $AC=BC$ за $x \Rightarrow CN=x-8$.

$AC = \frac{1}{2}CB$ (CL — биссектриса и медиана)

Проведем BM — высоту $AN \parallel BM$, AN проходит через M

AN — средняя линия $\triangle BMC$

$AN = x-8 \Rightarrow CM = 2x-16$

Теорема Пифагора для $\triangle BMC$ и $\triangle ANM$. $MA = 16-x$

$$\begin{cases} x^2 = 4x^2 + 256 - 64x + BM^2 \\ 100 = 256 + x^2 - 32x + BM^2 \end{cases}$$

Вычитаем:

$$x^2 - 100 = 3x^2 - 32x$$

$$2x^2 - 32x + 100 = 0$$

$$x^2 - 16x + 50 = 0$$

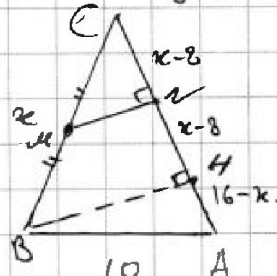
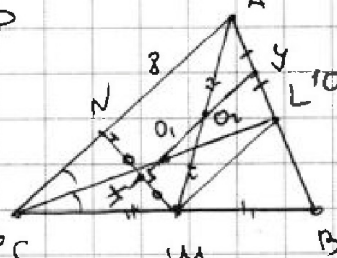
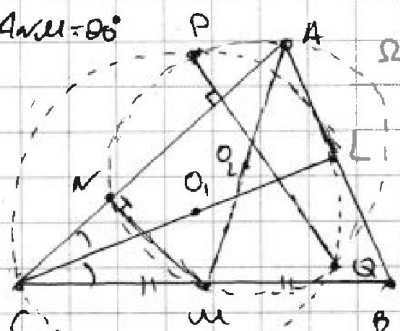
$$D_1 = 64 - 50 = 14$$

$$x_1 = 8 - \sqrt{14} < 8 \Rightarrow AC < AN - \text{не угод. условию (N \in \text{отрезку AC})}$$

$$x_2 = 8 + \sqrt{14}$$

$$\text{Итого } AC = BC = 8 + \sqrt{14}$$

$$\text{Ответ: } 8 + \sqrt{14}$$



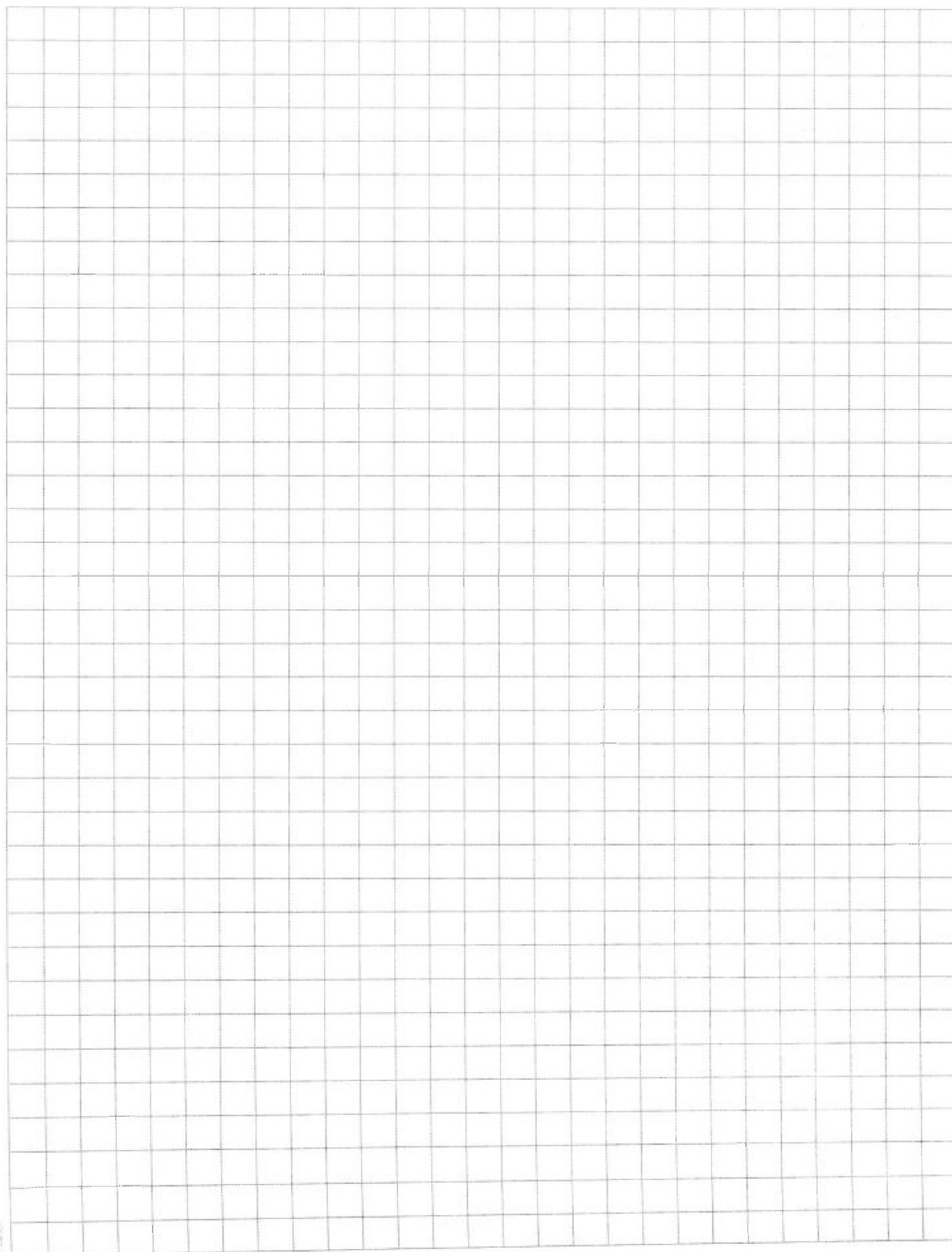


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_3 = 3x + 3$$

$$a_5 = (x^2 + 2x)^2$$

$$a_9 = 3x^2$$

$$(x^2 + 2x)^2 = 3x + 3 + 2d \Rightarrow x^4 + 4x^3 + 4x^2 = 3x + 3 + 2d$$

$$3x^2 = (x^2 + 2x)^2 + 4d \Rightarrow 3x^2 = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4d$$

$$0 = x^4 + 4x^3 + x^2 + 4d$$

$$0 = x^2$$

$$3x + 3 + 6d = 3x^2$$

$$3x^2 - 3x - 3 - 6d = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + x^2 + 4d = 0$$

Возрастаем?

$$x^2 \rightarrow x + 1$$

$$3x^2 > 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 \Rightarrow 0 > x^4 + 4x^3 + x^2 = (x^2 + x)^2 - 2x^3 = (x(x+1))^2 - 2x^3$$

$$3x + 3 + 2d = (x^2 + 2x)^2$$

$$3x + 3 + 6d = 3x^2 \Rightarrow x + 1 + 2d = x^2$$

$$2x + 2 = (x^2 + x)(x^2 + 3x)$$

$$2(x+1) = x^2(x+1)(x+3)$$

$$x = -1$$

$$2 = x^2(x+3) \Rightarrow x^3 + 3x^2 - 2 = 0$$

-1 - корень.

$$(x+1)(x^2 + 2x - 2) = 0$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$x = -1 + \sqrt{3}$$

$$x = -1 - \sqrt{3}$$

$$d = 2 + 5\sqrt{3}$$

$$a_3 = 3\sqrt{3}$$

$$a_5 = (4 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2)^2 = 4$$

$$a_9 = 3(4 - 2\sqrt{3}) = 12 - 6\sqrt{3}$$

$$a_3 = -3\sqrt{3}$$

$$a_5 = (4 + 2\sqrt{3} - 2 - \sqrt{3})^2 = 4$$

$$a_9 = 3(4 + 2\sqrt{3}) = 12 + 6\sqrt{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

• $p=2 \Rightarrow (m+n)(m+n-9) \neq 13 \cdot 4 \rightarrow (13 \cdot 2 \cdot 2) / (13 \cdot 4 \cdot 1) = 13 \cdot 82$
 $m+n=13$

$B = 10 \text{ mm} = 45q^2$

$2mh = 45q^2 \Rightarrow q \geq 2 \Rightarrow mh = 30$

$m+n=13$
 $mh=30$

$x^2 - 13x + 30 = 0$

$D = 169 - 120 = 49$

$m=3, n=10$
 $m=10, n=3$

$a^2 - 9a - 92$

• $q \geq 2 \Rightarrow (m+n)(m+n-9) = 45 \cdot 4 = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4$

$a^2 - 9a = 300$

$a^2 - 9a - 300 = 0$

$D = 81 + 1200 = 1281$

не «вагран»!!!

$1281 = 43 \cdot 29$

$13 \cdot 4 = 52$

$13 \cdot 4 = 52$

$13 \cdot 4 = 52$

$13 \cdot 4 = 52$

$13 \cdot 4 = 52$

$13 \cdot 4 = 52$

$13 \cdot 4 = 52$

$13 \cdot 4 = 52$

$13 \cdot 4 = 52$

$13 \cdot 4 = 52$

$13 \cdot 4 = 52$

$13 \cdot 4 = 52$

$13 \cdot 4 = 52$

$13 \cdot 4 = 52$

$13 \cdot 4 = 52$

$13 \cdot 4 = 52$

$13 \cdot 4 = 52$

$13 \cdot 4 = 52$

$13 \cdot 4 = 52$

$13 \cdot 4 = 52$

$13 \cdot 4 = 52$

$13 \cdot 4 = 52$

$13 \cdot 4 = 52$

$13 \cdot 4 = 52$

$13 \cdot 4 = 52$

$13 \cdot 4 = 52$

$13 \cdot 4 = 52$

$13 \cdot 4 = 52$

$13 \cdot 4 = 52$

$13 \cdot 4 = 52$

Всё!

② $\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 6xy + 9y^2 \leq 9 \\ 9x^2 + y^2 - 6xy \leq 1 \end{cases}$

$5x^2 + 5y^2 - 6xy \leq 5$

$(x-3y)^2(3x-y)^2 \leq 4$

$((x-3y)(3x-y)-2)((x-3y)(3x-y)+2) \leq 0$

$(3x^2+3y^2-10xy-2)(3x^2+3y^2-10xy+2) \leq 0$

$3x^2+3y^2-10xy-2 \leq 0 \quad (a-2)(a+2) \leq 0$

$-2 \leq 3x^2+3y^2-10xy \leq 2$

$-2 \leq 3x^2+3y^2-10xy \Rightarrow 2 \geq -3x^2-3y^2+10xy$

Симметрично:

$2x^2+7y^2+4xy \leq 7$

$(x+y)^2 \leq \frac{7}{2}$

$4y+8x=$

$8x^2+8y^2-16xy \leq 7$

$(2x-2y)^2 \leq \frac{7}{2}$

$(x-y)^2 \leq \frac{7}{8}$

