



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [3 балла] Второй член арифметической прогрессии равен  $12 - 12x$ , четвёртый член равен  $(x^2 + 4x)^2$ , а восьмой равен  $(-6x^2)$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения  $10x + 5y$  при условии

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 2y| \leq 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$  и  $B = m^2n - 2mn^2 - 2mn$  равно  $17p^2$ , а другое равно  $15q^2$ , где  $p$  и  $q$  - простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AX$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AC$  и продолжение стороны  $AB$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 18$ ,  $AZ = 6$ ,  $YZ = 8$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}, \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3y} = 2y^5 - \sqrt[4]{3x} + 4y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $7 \times 7$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 6$ ,  $AN = 5$ .



1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть разность прогрессии равна  $d$ , а  $n$ -й член  $a_n$

Поэтому I  $12 - 12x = a_1 + d$

II  $(x^2 + 4x)^2 = a_1 + 3d$

III  $-6x^2 = a_1 + 7d$

Вычитая

из II - I и III - II

IV  $(x^2 + 4x)^2 + 12x - 12 = 2d$

V  $-6x^2 - (x^2 + 4x)^2 = 4d$

Рассмотрим 2 случая  $d = 0$  и  $d \neq 0$ .

$d = 0 \Rightarrow 12 - 12x = -6x^2$   $6x^2 - 12x + 12 = 0$

$(x^2 + 4x)^2 = -6x^2$   $x^2 - 2x + 2 = 0$

$(x^2 + 4x)^2 \geq 0$   $\Rightarrow$  равенство

$-6x^2 \leq 0$  будет достигаться:  
 $(x^2 + 4x)^2 = -6x^2 = 0$   
 $-6x^2 = 0$

$x = 0 \Rightarrow (x^2 + 4x)^2 = 0$

Но  $12 - 12x \neq -6x^2$  - противоречие,  $d \neq 0$

Положим V : IV

$$\frac{-6x^2 - (x^2 + 4x)^2}{(x^2 + 4x)^2 + 12x - 12} = 2$$

$$-6x^2 - (x^2 + 4x)^2 = 2(x^2 + 4x)^2 + 24x - 24$$

$$3(x^2 + 4x)^2 + 6x^2 + 24x - 24 = 0$$

$$1x^2 + 4x^2 + 2x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$1x^2 + 4x^2 + 2(x^2 + 4x) - 8 = 0$$

$$t = x^2 + 4x$$

$$t^2 + 2t - 8 = 0$$

$$t = 2$$

$$t = -4$$

Ответ:  $-2; 2 \pm \sqrt{6}$

Вернёмся к задаче

$$\begin{cases} x^2 + 4x + 4 = 0 & | x^2 + 4x - 2 = 0 \\ D = 24 & | x = \frac{4 \pm \sqrt{24}}{2} \\ x = 2 & | = 2 \pm \sqrt{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ x = 2 \pm \sqrt{6} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |2x-3y| \leq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |3x-2y| \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-3y \leq 6 \\ 2x-3y \geq -6 \\ 3x-2y \leq 4 \\ 3x-2y \geq -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-3t+6x \leq 6 \\ 8x-3t \geq -6 \\ 3x-2t+4x \leq 4 \\ 3x-2t+4x \geq -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x-3t \leq 6 \quad | \cdot 7 \\ 8x-3t \geq -6 \quad | \cdot 7 \\ 7x-2t \leq 4 \quad | \cdot 8 \\ 7x-2t \geq -4 \quad | \cdot 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 56x-21t \leq 42 \\ 56x-21t \geq -42 \\ 56x-16t \leq 32 \quad | \cdot (-1) \\ 56x-16t \geq -32 \quad | \cdot (-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x-3t \leq 6 \\ 56x-21t \leq 42 \quad (I) \\ 56x-21t \geq -42 \quad (II) \\ -56x+16t \geq -32 \quad (III) \\ -56x+16t \geq -32 \quad (IV) \end{cases}$$

$$(I) + (IV) \quad -5t \leq -74$$

$$5t \geq 74$$

$$t \geq \frac{74}{5}$$

$$a \leq 74 - \text{это оценка}$$

$$(I) + (IV) \quad -5t \leq 74$$

$$5t \geq -74$$

$$t \geq \frac{a}{5}$$

$$a \geq -74 - \text{это оценка}$$

Пример:  $x = -4,8; y = -5,2$

$$2x-3y=6 \Rightarrow |2x-3y| \leq 6$$

$$3x-2y=-4 \Rightarrow |3x-2y| \leq 4$$

$$10x+5y = -48-26 = -74$$

Ответ:  $-74$ .

Пусть  $10x+5y=a$ , мы ищем  $\max(a)$

$$y = \frac{a}{5} - 2x$$

$$t = \frac{a}{5}$$

$$y = t - 2x$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
 2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Подставим  $m-2n$  во (II)

$$2mn = 15q^2 \Rightarrow 15q^2 : 2 \Rightarrow q^2 : 2 \quad \left. \begin{array}{l} 15 \div 2 \\ q - \text{простое} \end{array} \right\} \Rightarrow q = 2$$

$$\begin{cases} mn = 30 \\ m - 2n = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m - 2n = 4 \\ m = 2n + 4 \end{cases}$$

$$n^2 + 2n - 15 = 0$$

$$D = 64$$

$$n = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} \notin \mathbb{N}$$

$$\begin{cases} 2n^2 + 4n - 30 = 0 \\ m = 10 \\ n = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 2n + 4 \\ n^2 + 2n - 15 = 0 \end{cases}$$

$$n^2 + 2n - 15 = 0$$

Рассмотрим II - случай:

$$\begin{cases} (m - 2n + 13) / (m - 2n) = 15q^2 \\ mn(m - 2n - 2) = 17p^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m - 2n + 13) / (m - 2n) = 15q^2 \\ mn(m - 2n - 2) = 17p^2 \end{cases}$$

Аналогично I-му случаю  $15q^2 : 2, \Rightarrow q^2 : 2 \Rightarrow q = 2$

$$\begin{cases} (m - 2n + 13) / (m - 2n) = 60 \text{ (I)} \\ mn(m - 2n - 2) = 17p^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} mn(m - 2n - 2) = 17p^2 \\ t = m - 2n, \text{ решим (I)} \end{cases}$$

$$t = m - 2n, \text{ решим (I)}$$

$$t^2 + 13t - 60 = 0$$

$$D = 409$$

$$t = \frac{-13 \pm \sqrt{409}}{2} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \text{во II случае } m \text{ и } n \notin \mathbb{N}$$

Пусть как и в I-м случае  $m - 2n > 2$

$$t \in \mathbb{Z}, \text{ т.к. } m \in \mathbb{N}, 2n \in \mathbb{N}$$

Ответ: (10; 3).





1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = (m-2n)^2 + 13(m-2n) = (m-2n+13)(m-2n)$$

$$B = mn(m-2n-2)$$

Есть два случая. I:  $\begin{cases} A = 17p^2 \\ B = 15q^2 \end{cases}$

II:  $\begin{cases} A = 15q^2 \\ B = 17p^2 \end{cases}$

Рассмотрим I случай:

$$\begin{cases} (m-2n+13)(m-2n) = 17p^2 \\ (m-2n-2)mn = 15q^2 \end{cases}$$

Заметим, что  $(m-2n-2)$  и  $(m-2n+13)$  — разной чётности, а значит одно из них чётно, а значит их произведение чётно, а значит  $17p^2 \div 2$ , т.к.  $17 \div 2 \Rightarrow p^2 \div 2$ , т.к.  $p$  — простое и  $p^2 \div 2 \Rightarrow p = 2$

$$68 = 2^2 \cdot 17$$

$$\begin{cases} (m-2n+13)(m-2n) = 68 \\ (m-2n-2)mn = 15q^2 \end{cases}$$

$$15q^2 > 0$$

$$mn > 0, \text{ т.к. } q \in \mathbb{N}$$

$$(m-2n-2)mn = 15q^2 \text{ (II)}$$

Решим первое уравнение в натуральных числах, учитывая, что  $m-2n > 2$  и  $m-2n-2 > 0$  из (II)

$$\begin{cases} m-2n = 4 \\ m-2n+13 = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-2n = 34 \\ m-2n+13 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-2n = 68 \\ m-2n+13 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-2n = 4 \\ m-2n+13 = 17 \end{cases}$$

$$m-2n = 4$$

$$m-2n = 4$$

$$\begin{cases} m-2n = 34 \\ m-2n = -11, m-2n - \text{принимать} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-2n = 68 \\ n-2n = -12 \end{cases}$$

$$n-2n = -12$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☒☐☐☐

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{в } \triangle AYZ: YZ^2 = AY^2 + AZ^2 - 2AY \cdot AZ \cdot \cos \angle ZAY$$

$$64 = 36 + 36 - 2 \cdot 36 \cos \angle ZAY \quad (\text{по т. косинусов})$$

$$\cos \angle ZAY = \frac{1}{9}$$

$$\angle ZAY + \angle BAC = 180^\circ \quad (\text{смежные } \angle \text{ образуют развёрнутый угол})$$

$$\cos \angle BAC = -\cos \angle ZAY = -\frac{1}{9}$$

$$\text{в } \triangle ABC: BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC$$

$$BC^2 = 36 + 324 - 2 \cdot 6 \cdot 18 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) \quad (\text{по т. косинусов})$$

$$BC^2 = 36 + 324 + 24 = 384$$

$$BC = 8\sqrt{6}$$

Ответ:  $8\sqrt{6}$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~104.~~

$BM = MC$

$ZM \parallel AX$  (по условию)

$\angle AXC = \angle ZMC$   
(соответств. при перес.  $XZ$ )

в  $\triangle ZMC$  и  $\triangle AXC$ :  
 $\angle C$  - общий  
 $\angle X = \angle M$

$\triangle ZMC \sim \triangle AXC$   
(по 2-м углам)

$\frac{ZC}{AC} = \frac{MC}{XC}$

$\frac{2}{3} = \frac{MC}{XC}$  Пусть  $MC = 2x$ , тогда  
 $XC = 3x$   $XM = XC - MC = x$

$BM = MC = 2x$  (по условию)

$BX = BM - XM = x$

в  $\triangle ABC$ :  $AX$  - биссектриса  $\Rightarrow \frac{BX}{XC} = \frac{AB}{AC}$  (по ед. сб-ву)

$\frac{1}{3} = \frac{AB}{18}$   
 $AB = 6$

Для  $\triangle ABC$  и прямой  $MZ$

$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CZ}{AZ} \cdot \frac{AB}{BY} = 1$  (по т. Менелая)

$\frac{AB}{BY} = \frac{1}{2}$   
 $BY = AB + AY = 6 + AY$   
 $\frac{6}{6+AY} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow AY = 6$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=\sqrt{13} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-b=-2 \\ a+b=\sqrt{10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2} \\ b=\frac{\sqrt{13}}{2}-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-b=-2 \\ a=\frac{\sqrt{10}}{2}-1 \\ b=\frac{\sqrt{10}}{2}+1 \end{cases}$$

Во время проверки выяснилось, что корни подселят  $a-b=2$  и  $a^2+b^2=4$

Вернёмся к замене (т.к.  $a$  выражается через  $b$ , то мы получим  $\sqrt{x+4}=a \Leftrightarrow \sqrt{x+4}$ , поэтому возведём, только  $\sqrt{x+4}=a$ .

$$\sqrt{x+4} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\sqrt{x+4} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{10}}{2} + 1$$

$$x+4 = \frac{1}{4} + \frac{13}{4} - \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$x+4 = \frac{10}{4} + 1 - \sqrt{10}$$

$$x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$y=x$$

Ответ:  ~~$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$~~   $\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right);$

$\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{10}}{2}\right).$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a-b=2ab-5 \\ a^2+b^2=7 \end{cases} \quad ab = \sqrt{12-x-x^2} \geq 0 \quad ab \geq 0$$

$$\begin{aligned} (a-b)^2 &= (2ab-5)^2 = \\ &= 4a^2b^2 - 20ab + 25 \\ a^2 - 2ab + b^2 &= 4a^2b^2 - 20ab + 25 \end{aligned}$$

$$7 - 2ab = 4a^2b^2 - 20ab + 25 \quad \text{а потом идем на проверку}$$

$$4a^2b^2 - 18ab + 18 = 0.$$

$$t = ab, \quad t \geq 0$$

$$2t^2 - 9t + 9 = 0.$$

$$D = 81 - 144 = 9$$

$$t = \frac{9 \pm 3}{4} = \begin{cases} 3 \\ \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab=3 \\ a^2+b^2=7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab=\frac{3}{2} \\ a^2+b^2=7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-b=1 \\ \begin{cases} a+b=\sqrt{13} \\ a+b=-\sqrt{13} \end{cases} \\ \begin{cases} a-b=-2 \\ \begin{cases} a+b=\sqrt{10} \\ a+b=-\sqrt{10} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2ab=6 \\ |a-b|^2=1 \\ |a+b|^2=13 \end{cases} \quad \text{I}$$

$$\begin{cases} 2ab=3 \\ |a+b|^2=10 \\ |a-b|^2=4 \end{cases} \quad \text{II}$$

В (I) системе  $2ab=6$ ,  
вспомогательное уравнение  
 $a-b=2ab-5=1$

В (II) системе  $2ab=3$   
 $a-b=2ab-5=-2$

Т.к.  $a \geq 0, b \geq 0$

$$a+b \geq 0$$

$$\begin{cases} a+b \neq -\sqrt{13} \\ a+b \neq -\sqrt{10} \end{cases}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} \cdot \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2} & (I) \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3y} = 2y^5 - \sqrt[4]{3x} + 4y^2 & (II) \end{cases}$$

Отдельно рассмотрим (II):

$$2x^5 - 2y^5 + 4x^2 - 4y^2 + \sqrt[4]{3x} - \sqrt[4]{3y} = 0.$$

Если  $x > y$ :

$$2x^5 - 2y^5 > 0$$

$$4x^2 - 4y^2 > 0$$

$$\sqrt[4]{3x} - \sqrt[4]{3y} > 0$$

$\Rightarrow$  Равенство (II) не будет достигнуто из-за положительности левой части

Если  $x < y$ :

$$2x^5 - 2y^5 < 0$$

$$4x^2 - 4y^2 < 0$$

$$\sqrt[4]{3x} - \sqrt[4]{3y} < 0$$

$\Rightarrow$  Равенство (II) не будет достигнуто из-за отрицательности левой части.

Остается только  $x = y$ , причем при этом случае равенство верно  $0 = 0$ , подставим  $y = x$  в (I)

$$\sqrt{x+4} \cdot \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{12-x-x^2}$$

$$\sqrt{x+4} \cdot \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{x+4} \cdot \sqrt{3-x} \quad \begin{matrix} \text{т.к.} \\ x+4 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{matrix}$$

Пусть  $a = \sqrt{x+4}$ ;  $b = \sqrt{3-x}$

$$a^2 = x+4$$

$$b^2 = -x+3$$

$$-a^2 = -x-4 \quad | +7$$

$$-a^2 + 7 = -x+3 = b^2$$

$$\begin{cases} a \cdot b + 5 - 2ab = 0 \end{cases}$$

$$b^2 = -a^2 + 7 \quad | +a^2 + 2ab$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq -4 \end{cases}$$





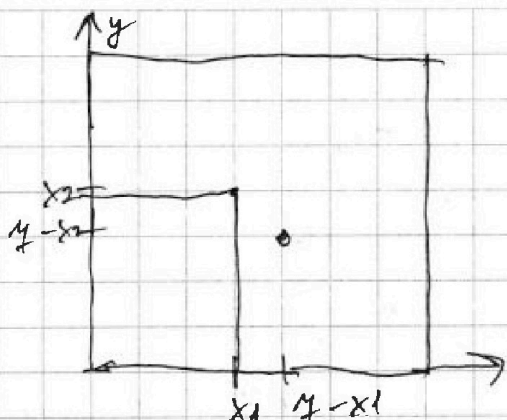
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐2  
☐3  
☐4  
☐5  
☐6  
☒7  
☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Всего есть 64 различные узла.

Тригониально упрощаем 2 вида раскрасок.

1-й вид: при повороте на  $180^\circ$  получается та же самая раскраска

2-й вид: все, что не 1-й вид  
Рассмотрим узлы  $(x, y)$   $(x_1, x_2)$  и  $(y_1, y_2)$ .  
После поворота на  $180^\circ$  узлы другие  $(4-x_1, 4-y_1)$  и  $(4-x_2, 4-y_2)$ .  
Поскольку при повороте на  $180^\circ$

I не мог перейти в II, а II в IV, поэтому

$$I \mapsto IV; II \mapsto III \Rightarrow \begin{cases} x_1 + y_1 = 4 \\ x_2 + y_2 = 4 \end{cases}$$

Заметим, что если мы выбрали  $x_1$  и  $x_2$ , то  $y_1$  и  $y_2$  определяются однозначно. А значит раскрасок первого вида 64, + т.к. из одной раскраски поворотом можно получить другую раскраску (и только).

Значит среди раскрасок 1-го вида  $\frac{64}{2} = 32$  различных.

$$\text{раскрасок 2-го вида } \frac{64 \cdot 63}{2} - 64 = 32 \cdot 63 - 64$$

из раскраски 2-го вида получается 3 раскраски 2-го вида, а значит среди них:

$$\frac{32 \cdot 63 - 64}{4} = 8 \cdot 63 - 16 \text{ различных раскрасок}$$

$$\text{Итого их } 8 \cdot 63 + 16 = 520$$

Ответ: 520.

$$\begin{array}{r} 63 \\ 8 \cdot 63 \\ \hline 504 \end{array}$$

$\angle A Q M = 90^\circ$   
 $\angle L Q C = 90^\circ$   
 $\angle L P C = 90^\circ$   
 $\angle A P M$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7  
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

СТРАНИЦА  
 \_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$t^2 + 13t - 68 = 0$$

$$D = 169 + 272 = 441$$

$$t = \frac{-13 \pm 21}{2} = 7 \text{ и } 4$$

$$\sqrt{400} = 20$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 68 \\ \times 4 \\ \hline 272 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 22 \\ + 169 \\ \hline 441 \end{array}$$

н 5.

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y}$$

$$2x^5 - 2y^5 + 4x^2 - 4y^2 + \sqrt{3}x - \sqrt{3}y = 0$$

$$(a+b)^2 = 12 + (a+b)$$

$$t^2 - 4t + 4,5$$

$$\sqrt{7}$$

$$t^2 + 3t + 1 = 0$$

$$\sqrt{x+4} + \sqrt{3-x} + 5 = \sqrt{12-x-x}$$

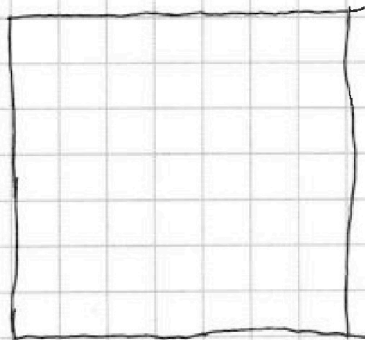
$$D = 5$$

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$x_8 = -\frac{1}{2}$$

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

н 6.



$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$2\left(\frac{10}{4} + 1\right) = \left(\frac{13}{4} - 2\right)$$

$$\left(\frac{\sqrt{13}}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{13}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 =$$

$$2\left(\frac{10}{4} - 1\right) = 2\left(\frac{13}{4} + \frac{1}{4}\right) = 4$$



1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a = 74$$

$$1 \quad 10x + 5y = -74$$

$$x = -\frac{74}{5} = -14,8$$

$$3x - 7y \leq 4$$

$$7y \geq \frac{3}{2}x - 2$$

$$10x + 5y = -74$$

$$x - y \geq -2$$

$$x - y = -2 \cdot 5$$

$$15x = -84$$

$$x = -\frac{84}{15}$$

$$2x - 3y \leq 6$$

$$3y \geq 2x - 6$$

$$y = x + 2 = -\frac{54}{15}$$

$$384$$

$$64$$

$$\begin{array}{r} 384 \overline{) 16} \\ 32 \overline{) 24} \\ 32 \overline{) 24} \\ 32 \overline{) 24} \\ 32 \overline{) 24} \end{array}$$

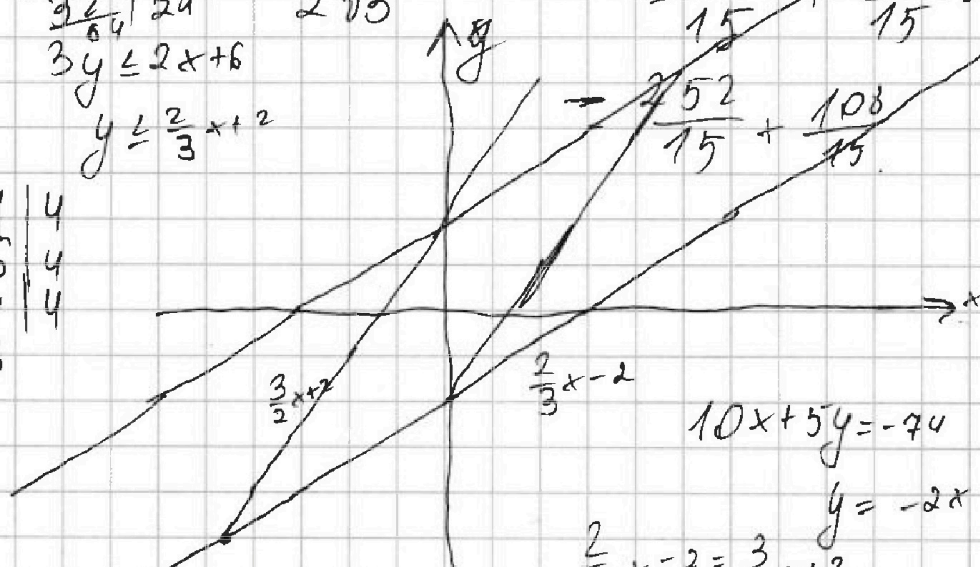
$$3y \leq 2x + 6$$

$$y \leq \frac{2}{3}x + 2$$

$$-\frac{168}{15} + \frac{162}{15} =$$

$$-\frac{252}{15} + \frac{108}{15}$$

$$\begin{array}{r} 384 \overline{) 4} \\ 96 \overline{) 4} \\ 24 \overline{) 4} \\ 6 \end{array}$$



$$10x + 5y = -74$$

$$y = -2x - 14,4$$

$$\frac{2}{3}x - 2 = \frac{3}{2}x + 2$$

$$\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}x = 4/6$$

$$4x - 9x = 24$$

$$-5x = 24$$

$$x = -4,8$$

$$-9,6 + 15,6 \leq 6$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 18 \\ 144 \\ 180 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$\sqrt{384}$$

$$384/2$$

$$\begin{array}{r} 192 \overline{) 2} \\ 18 \overline{) 96} \\ 6 \end{array}$$

$$5y = -5,2$$

$$5y - 48 = -74$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☒

2  
☒

3  
☒

4  
☒

5  
☒

6  
☒

7  
☒

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 10a + b + 5 - 2ab = 0 \\ (a+b)^2 = 7 + 2ab \end{cases}$$

Рассмотрим (III)  $t = a+b$

$$t^2 - t - 12 = 0$$

$$D = 49$$

$$t = \frac{1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 4 \\ -3 \end{cases}$$

Вернёмся к замене:

$$\begin{cases} 2ab = 9 \\ a+b = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab = 1 \\ a+b = -3 \end{cases}$$

$$a+b = -3$$

$$\begin{cases} ab = 18 \\ a^2 + b^2 + 2ab = 16 \end{cases} \quad | -4ab$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - 2ab = -16 \\ a+b = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab = 1 \\ a^2 + 2ab + b^2 = -3 \\ a+b = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4ab = 18 \\ (a-b)^2 = -2, (a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a, b \notin \text{в этой системе.} \\ a+b = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab = 1 \\ a+b = -3 \end{cases}$$

Вернёмся к замене

$$\begin{cases} \sqrt{12-x-x^2} = 1 \\ \sqrt{x+4} + \sqrt{3-x} = -3 \end{cases}$$

$$x \in \emptyset$$

Ответ: решений нет.

$$\begin{aligned} \text{т.к. } \sqrt{x+4} &\geq 0 \text{ и } \sqrt{3-x} \geq 0 \\ \sqrt{x+4} + \sqrt{3-x} &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{x+4} + \sqrt{3-x} \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{x+4} + \sqrt{3-x} = -3, \quad x \in \emptyset$$