



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}, \text{ тринадцатый член равен } 5-x, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{(13x-35)(x+1)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних" симметрий (средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 560$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = k^6 a_1$$

$$a_{13} = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = 5-x = k^{12} a_1 \Rightarrow \frac{a_{15}}{a_7} = k^8 = \sqrt{(x+1)^4} = (x+1)^2 \Rightarrow$$

$$a_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} = k^{14} a_1 \Rightarrow 8+2 \geq 0$$

I case $x < -1$

$$k^4 = -(x+1)$$

$$k^2 = \sqrt{-(x+1)}$$

$$\Rightarrow k^2 = \sqrt{-(x+1)}$$

$$\text{НОТ.К. } \sqrt{-(x+1)} > 0 \Rightarrow$$

$$k^2 = \sqrt{-(x+1)}$$

$$a_7 \text{ и } a_{15} \text{ — б.о.}$$

$$a_7 \cdot k^4 \cdot k^2 = a_{13} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot (-x-1) \cdot \sqrt{-(x+1)} = \sqrt{-(13x-35)} =$$

$$= 5-x \Rightarrow -13x+35 = 25-10x+x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+3x-10=0$$

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -2 \end{cases} \rightarrow \text{не подходит Т.К. Тогда } a_{13}=0$$

$$a_7 > 0 \text{ и } a_{13} \text{ а } a_7 \neq 0$$

$$x = -2$$

II case $x \geq -1$

$$k^4 = x+1$$

$$k^2 = \sqrt{x+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot (x+1) \cdot \sqrt{x+1} =$$

$$= \sqrt{13x-35} = 5-x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13x-35 = 25-10x+x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-23x+60=0$$

$$x_1 = 20 \\ x_2 = 3 \Rightarrow \text{оба подходят.}$$

Ответ: $x=2; x=3; x=20$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

⇒ всего вариантов наборов $3C_{25000}^4 - 2C_{12500}^2 = 3$

$$\Rightarrow \left[\frac{25000!}{4! \cdot 25996!} \cdot 3 - \frac{12500!}{2! \cdot 12498!} \cdot 2 \right] \leftarrow \text{Ответ!}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

⇓

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = 4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos^2 x - 3 + 6\cos x$$

$$= 4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 = p \quad a \in [-1; 1]$$

$$\text{Пусть } \cos x = a \Rightarrow 4a^3 + 6a^2 + 3a - 3 - p = 0$$

Ищем мин. знач. $f(a) = 4a^3 + 6a^2 + 3a - 3$, на промежутке от -1 до $1 = -4$

$$f'(a) = 12a^2 + 12a + 3 = 0, \text{ при } a = -\frac{1}{2}$$

$$f''(a) = 24a + 12, \text{ в точке } -\frac{1}{2} \quad f''(a) \text{ — меняет знак}$$

т.к. $f'(a) = 3(2a+1)$ то значит $f'(a) \geq 0$ на области определения $\Rightarrow a = -\frac{1}{2}$ — не является экстремумом $\Rightarrow f(a)$ — монотонно возр. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ мин значение будет в $a = -1$ а

$f(-1) = -4$; аналогично max. значение будет в $a = 1$, $f(1) = 10 \Rightarrow$ при любом значении $p \in [-4; 10]$ уравнение имеет решение



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

- ¹⁵
I вид симметричен - центр.
II вид - симм. отн. гориз. средней линии
III вид - симм. отн. верт. средней линии.

Посчитаем кол-во наборов I вида, заметим что каждой клетке соответствует 2-ух симм. ей (аналогично для симм. II и III вида) $\Rightarrow$ вся доска бьётся на пары клеток причём в каждой паре закрывается либо обе либо ни одной клетки $\rightarrow$
 $\rightarrow$ кол-во таких наборов = кол-ву способов выбрать 4 пары из $\frac{200 \times 250}{2} = \binom{14}{25000} = \frac{25000 \cdot 24999 \cdot 24998 \cdot 24997}{4 \cdot 3 \cdot 2}$

$\frac{24997}{8}$, для каждого вида этих способов столько же $\Rightarrow$ всего вариантов $\frac{25000 \cdot 24999 \cdot 24998 \cdot 24997}{8}$

~~15~~ Заметим что если набор симм. по Фибо-
начи 2-ух видам то он симм. и третьему $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ мы трижды посчитали наборов которые симм. всем 3-им видам. Заметим, что если набор симм. во всем видам то ~~это~~ ~~то~~ закрытия образуют крз с центром в центре основного крз $\Rightarrow$ каждой точке соответствует еще 3 замр. точки $\Rightarrow$ крз. крз лежит на четверки $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ кол-во таких наборов равно $\binom{1500}{2}$

Т.к. таких четверок всего 12500 и каждая содержит 2 из них. $\Rightarrow$

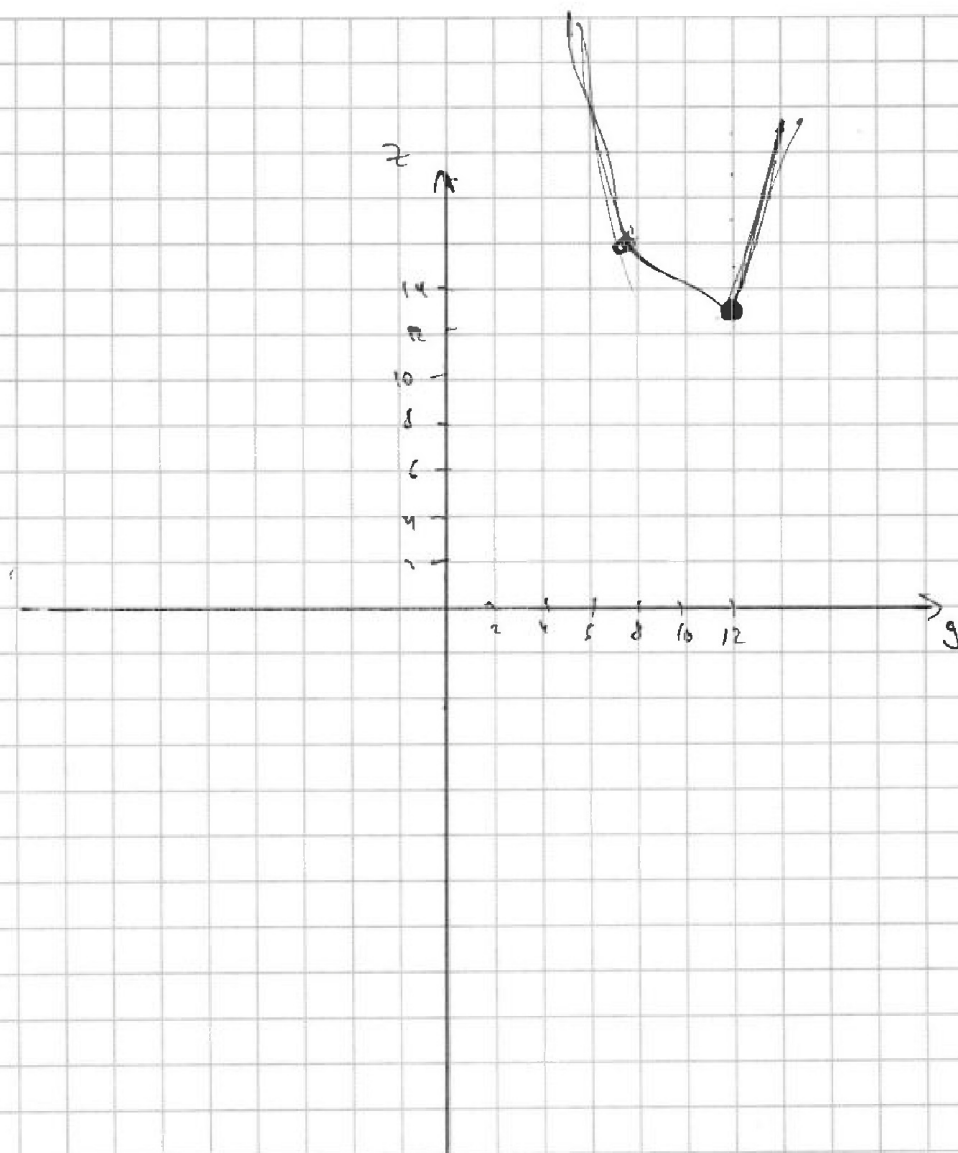


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6 $\rightarrow a-c$ и $b-c$ - одного знака

$$(a-c)(b-c) = p^2, \text{ т.к. } a > b \text{ то } a-c \neq b-c \text{ и } \Rightarrow a-c > b-c$$

$$\Rightarrow \text{т.к. } p^2 \text{ имеет делители только } \pm 1, \pm p, \text{ и } \pm p^2 \text{ то}$$

$$\text{то } a-c = p^2, a-b-c = 1 \Rightarrow c = b-1, \text{ тогда}$$

$$\text{т.к. } a-b \not\equiv 3 \Rightarrow a-b \equiv 1 \text{ или } 2, \text{ но т.к. } p^2 = (a-c) \cdot 1$$

$$= a-c = a-b+1, \text{ то } p^2 \equiv 2 \text{ или } 0, \text{ но квадратов}$$

$$\text{не могут быть сравнимых с } 2 \Rightarrow p^2 : 3 \Rightarrow p : 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = 3 \text{ т.к. } p - \text{ простое} \Rightarrow p^2 = 9 \Rightarrow a-b = 8 \Rightarrow b = a-8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a + b^2 = a + (a-8)^2 = a^2 - 15a + 64 = 560 \Rightarrow$$

$\Rightarrow a = 31 \text{ или } a = -16 \Rightarrow$

Тогда $a-c = -1 \Rightarrow c = a+1$
 $b-c = -p^2$

a	b	c
31	23	22
-16	-24	-23

$p^2 = -(b-c) = -b+c = a-b+1 \Rightarrow a-b=8 \Rightarrow b=a-8 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 31 \text{ или } a = -16 \Rightarrow$

a	b	c
31	23	32
-16	-24	-15

Ответ: $(31; 23; 22); (-16; -24; -23); (31; 23; 32); (-16; -24; -15)$.



1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|y+1|+3|y-12| \quad (1) \quad \sqrt{2}$$

$$I \ y \in (-\infty; -1] \Rightarrow (1) \Leftrightarrow -4y + 35 - \text{убав.} \Rightarrow \min \text{ знач. при } y = -1 = 39$$

$$II \ y \in [-1; 12] \Rightarrow (1) \Leftrightarrow -2y + 37 - \text{убав.} \Rightarrow \min \text{ знач. при } y = 12 = 13$$

$$III \ y \in [12; +\infty) \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 4y - 35 - \text{возр.} \Rightarrow \min \text{ знач. при } y = 12 = 13$$

$$\Downarrow \\ \min \text{ знач. (1)} = 13, \text{ замечаем что } \sqrt{169 - 2z^2} \stackrel{(2)}{\geq} 13 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1) = (2) \text{ только при } y = 12 \text{ и } z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z^2} + 5 = 2\sqrt{9+x-x^2+z^2} \Leftrightarrow \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{-x^2+x+12}$$

$$= 2\sqrt{(x+3)(4-x)} \Rightarrow \text{по } x+3=a \Rightarrow 4-x=-a+7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a - (-a+7) + 5 = 2a(-a+7)$$

$$2a - 7 + 5 = 2a(-a+7)$$

$$x-1 = -a^2 + 14a \Rightarrow a^2 - 6a - 1 = 0 \Rightarrow a_{1,2} = 3 \pm \sqrt{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{10}, \text{ но т.к. } x+3 \text{ и } 4-x \text{ — положительные вы-}$$

$$\text{ражения то } -3 \leq x \leq 4 \Rightarrow x = -\sqrt{10} \text{ — не подходит, т.к.}$$

$$-\sqrt{10} < -3 \Rightarrow \text{Ответ: } x = \sqrt{10}; y = 12; z = 0.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2
□3
□4

5

6

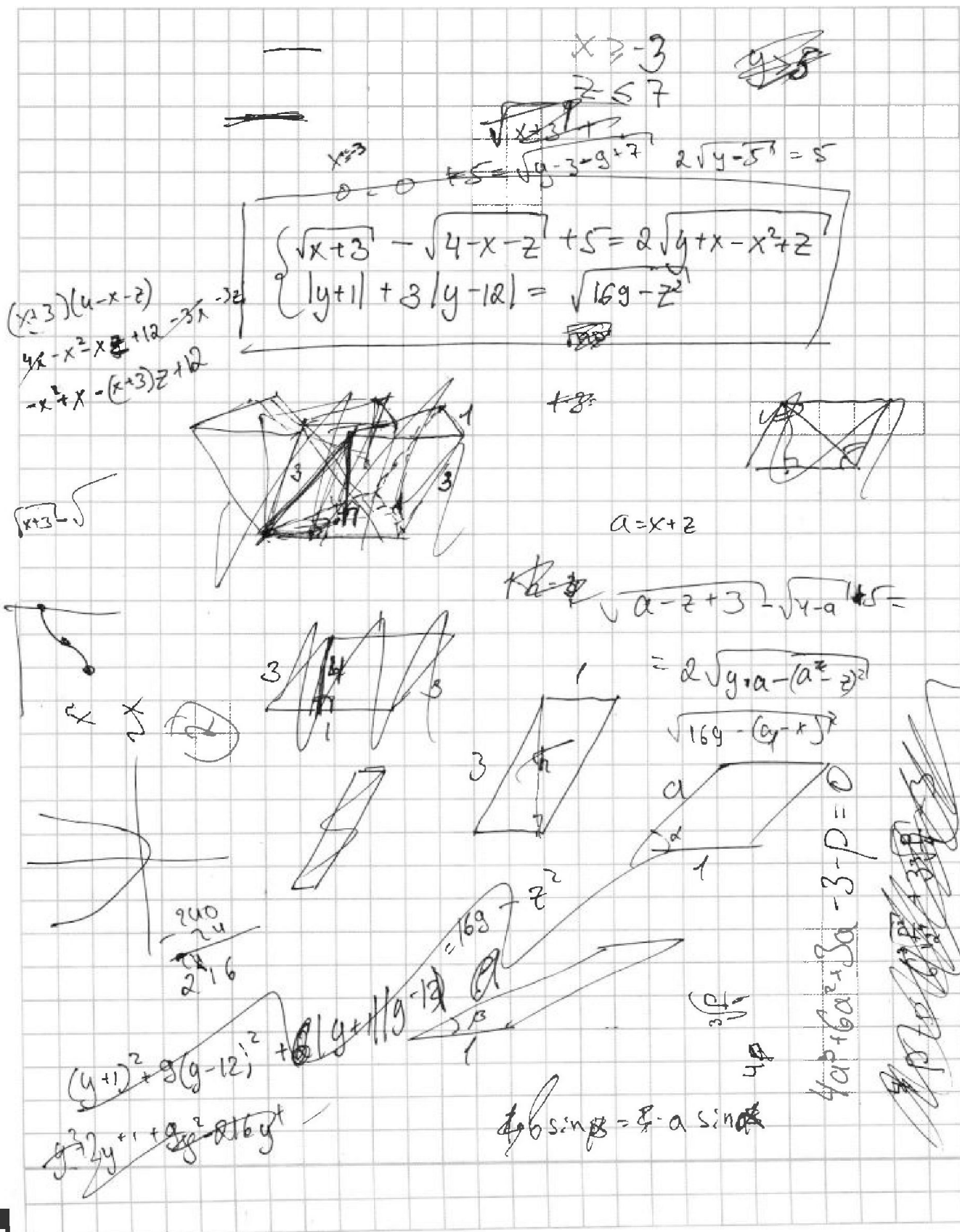
7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если же предположить, что в задании были опечатки не 4, 4, 3, а 4, 3, 3 то. Тогда $CL = BL = AL = 4$ (из н/у CLB, B) тогда $\sin \alpha = \frac{3}{AL \cdot AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow$ тогда $AL = 4 \cdot \frac{3}{4} = 3 \Rightarrow AL = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7} \Rightarrow$ т.к. $\angle LAK = 30^\circ$ то $AK = AL : \cos 30 = \frac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{\frac{7}{3}} \Rightarrow$ т.к. AA_1K - н/у Δ то $AK = \sqrt{4^2 - \frac{2^2}{3}} = \sqrt{\frac{20}{3}} = 2\sqrt{\frac{5}{3}}$, а AK - это и есть искомая высота ~~на~~ треугол.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

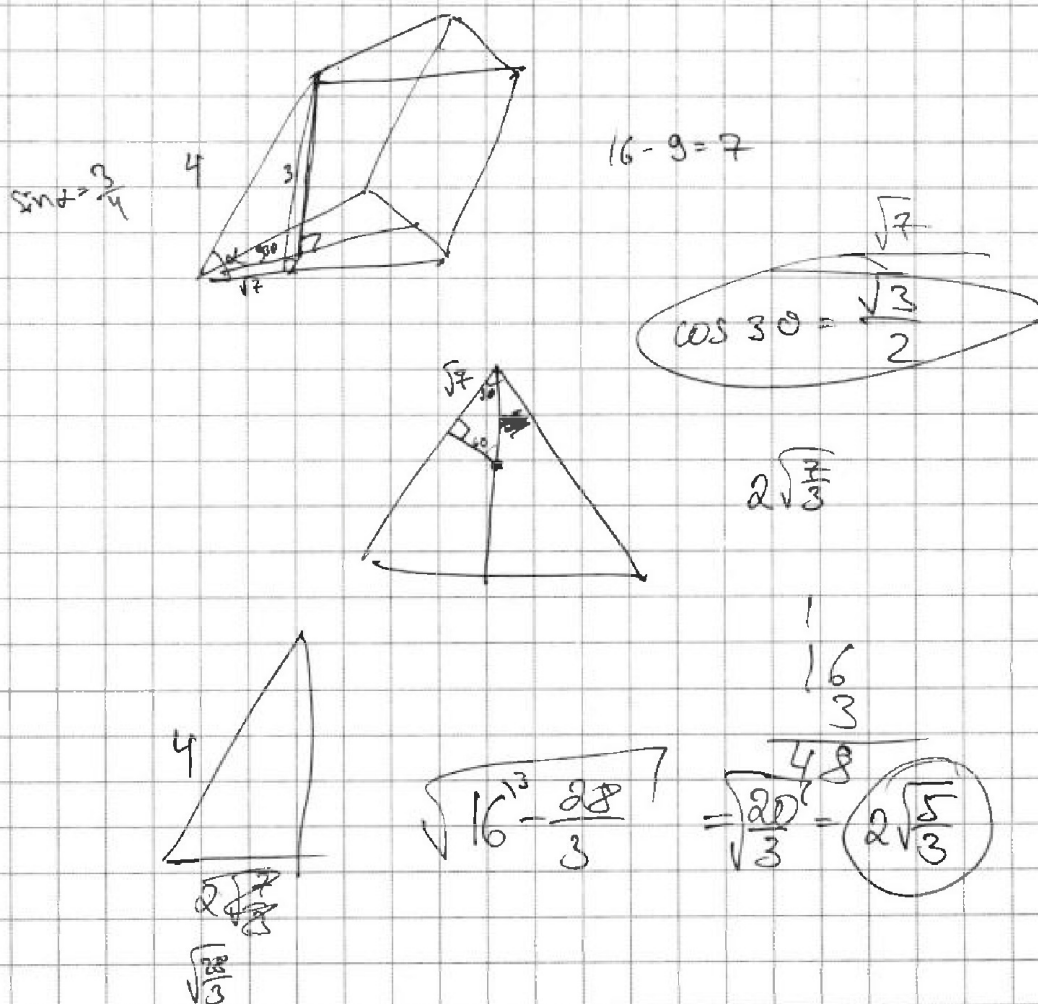
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

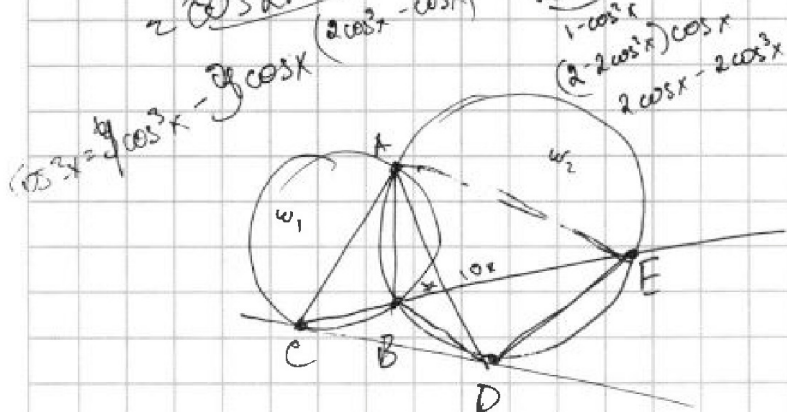
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x = \cos(2x+x) =$$

$$= \frac{2\cos^2 x - 1}{2} \cos x - \frac{\sin 2x \sin x}{2 \sin x \cos x}$$



$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$0 = 4 \frac{3\sqrt{3}}{8} - 3 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$-4 \leq p \leq 10$$

$$p = 10 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$p = -3 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$$p = -4 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos^2 x - 3 + 6\cos x = p$$

$$4a^3 + 6a^2 + 3a - 3 - p = 0$$

$$x \begin{array}{c|c|c} 4 & 6 & 3 \\ \hline 4 & 4+6 & \end{array} \begin{pmatrix} -p-3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$4(p^2 - 6p + 3) + 6p - 12 + 3 = 0$$

$$a(4a^2 + 6a + 3)$$

$$p^2 - 6p + 3$$

$$a \neq p - 3$$

$$4x^2 + 6x + 3$$

$$4x^3 + 6x^2 + 3x - p - 3 = 0$$

$$4p^2$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

$$(2a+1)^2 =$$

$$24a+12$$

$$2a+1$$

$$-\frac{1}{8} \cdot 4 \quad -4 \geq p$$

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{3}{x_2}$$

$$-4 \cdot 6 - 3 = -27$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{x_2} - 3$$

$$p = 4a^3 + 6a^2 + 3a - 3$$

$$12a^2 + 12a + 3 = 0$$

$$4a^2 + 4a + 1 = 0$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

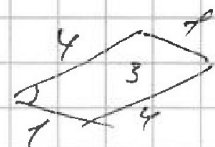
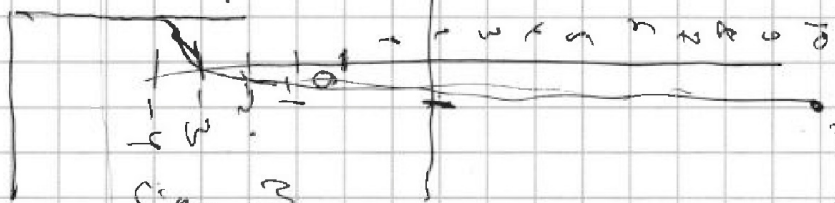
$$3+4+5+4+4=20$$

$$(3+4)+5+5+4+4+6 \quad 31-16=15$$

$$\sqrt{x+3^2} - \sqrt{4-x-2^2} + 5 = 2 \quad y+x-x^2+z^2$$

$$1(y+1) + 3(y-12) = \sqrt{(12-z^2)(13+z^2)}$$

$$-4+6-5-5=5$$



$$\sin x = \frac{3}{4}$$

$$a-c \neq b-c, \text{ т.к. } a > b$$

$$(a-b)(b-c) = p^2$$

$$48-35=13$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ 560 \\ -864 \\ \hline 496 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ 496 \\ +4 \\ \hline 1984 \\ -225 \\ \hline 2209 \end{array}$$

$$4 \cdot 75 \sin x = 3$$

$$225+$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 47 \\ 147 \\ \hline 506329 \\ -3500 \\ \hline 2009 \end{array}$$

$$a-c=p^2 \quad b=c+1$$

$$a-b/3 \Rightarrow a-b = \frac{2}{3}$$

$$y+1-3y+36 \mid a+b^2=560$$

$$a-(b-1) = a-b+1 = p^2$$

$$a-(b-1)=560$$

$$a^2-15a+64=560$$

$$a^2-15a+496=0$$

$$D=47^2$$

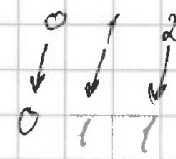
$$a_{1,2} = \frac{15 \pm 47}{2}$$

$$= 31 \mid -16$$

$$a-b+1=9$$

$$a-b=8$$

$$b=a-8$$



$$p^2=9 \Rightarrow p=3 \Rightarrow p^2=9$$



a	b	c
3	23	22
-16	-24	-23



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$k^{11} = x+1 \Rightarrow k^2 = x+1$

$k^4 = -k-1 \Rightarrow k^2 = \sqrt{-x-1}$

$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$

$a_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$

$a_7 = \sqrt{(13x-35)(x+1)^3} = (x+1)^2 = k^8 \Rightarrow k^4 = \pm(x+1)$

$a_2 = k a_1$
 $a_7 = k^6 a_1$
 $a_{13} = k^{12} a_1$
 $a_{15} = k^{14} a_1$

$a_2 = \sqrt{(13x-35)(x+1)^3}$
 $a_{13} = 5-x$
 $a_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$

$529 - 240 = k+2$

$a_{15} \cdot a_7 = k^{20} a_1^2 = \sqrt{(13x-35)^2 (x+1)^2} \Rightarrow \frac{73 \pm 17}{2} =$

$\Rightarrow k^{20} a_1^2 = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$

$x^2 - 13x + 160 = 0$

$\sqrt{13x-35} = 5-x$
 $13x-35 = x^2 - 10x + 25$

