



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен $6x + 18$, седьмой член равен $(x^2 - 4x)^2$, а одиннадцатый равен $(-3x^2)$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $14x + 7y$ при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$ и $B = m^2n - mn^2 + 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $3q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 12$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[3]{y} = 4y^4 - 5\sqrt{x+y}. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 9×9 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 26$, $AN = 20$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$a_5 = 6x + 18$$

$$a_7 = (x^2 - 4x)^2$$

$$a_{11} = -3x^2$$

Т.к. у нас арифм. прогрессия, то $a_7 = \frac{a_5 + a_9}{2}$

$$(x^2 - 4x)^2 = \frac{6x + 18 + a_9}{2}$$

$$2(x^2 - 4x)^2 = 6x + 18 + a_9$$

$$a_9 = 2(x^2 - 4x)^2 - 6x - 18$$

с группой старших, $a_9 = \frac{a_7 + a_{11}}{2}$

$$a_9 = \frac{(x^2 - 4x)^2 - 3x^2}{2}$$

Ищем: $2(x^2 - 4x)^2 - 6x - 18 = \frac{(x^2 - 4x)^2 - 3x^2}{2}$

$$4(x^2 - 4x)^2 - 12x - 36 = (x^2 - 4x)^2 - 3x^2$$

$$3(x^2 - 4x)^2 - 12x - 36 = -3x^2$$

$$3(x^4 - 8x^3 + 16x^2) - 12x - 36 + 3x^2 = 0$$

$$3x^4 - 24x^3 + 48x^2 - 12x - 36 + 3x^2 = 0$$

$$3x^4 - 24x^3 + 51x^2 - 12x - 36 = 0$$

$$x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$x = 2$$

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 & x - 2 \\ \hline 2^4 - 2x^3 & 1x^3 - 6x^2 + 5x + 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -6x^3 + 17x^2 \\ -6x^3 + 12x^2 \\ \hline 5x^2 - 4x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5x^2 - 4x \\ -5x^2 + 10x \\ \hline 6x - 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6x - 12 \\ -6x + 12 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$x^3 - 6x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$x = 2$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 6x^2 + 5x + 6 & x - 2 \\ \hline x^3 - 2x^2 & x^2 - 4x + 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -4x^2 + 5x \\ -4x^2 + 8x \\ \hline -3x + 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -3x + 6 \\ -3x + 6 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$D = 16 + 12 = 28 = (2\sqrt{7})^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\lambda_1 = \frac{4+2\sqrt{7}}{2} = 2+\sqrt{7}$$

$$\lambda_2 = \frac{4-2\sqrt{7}}{2} = 2-\sqrt{7}$$

Итак, у нас λ может быть равен 2; $2+\sqrt{7}$; $2-\sqrt{7}$

Проверим: $\lambda=2$

$$a_5 = 30$$

$$a_7 = 16$$

$$a_{11} = -12$$

$$\left. \begin{array}{l} a_5 = 30 \\ a_7 = 16 \end{array} \right\} \Rightarrow a_9 = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} a_7 = 16 \\ a_{11} = -12 \end{array} \right\} \Rightarrow a_9 = 2$$

$$\lambda = 2+\sqrt{7}$$

$$a_5 = 30+6\sqrt{7}$$

$$a_7 = 9$$

$$a_{11} = -33+19\sqrt{7}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_5 = 30+6\sqrt{7} \\ a_7 = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow a_9 = -17-6\sqrt{7}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_7 = 9 \\ a_{11} = -33+19\sqrt{7} \end{array} \right\} \Rightarrow a_9 = -17-6\sqrt{7}$$

$$\lambda = 2-\sqrt{7}$$

$$a_5 = 30-6\sqrt{7}$$

$$a_7 = 9$$

$$a_{11} = -33+19\sqrt{7}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_5 = 30-6\sqrt{7} \\ a_7 = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow a_9 = -12+6\sqrt{7}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_7 = 9 \\ a_{11} = -33+19\sqrt{7} \end{array} \right\} \Rightarrow a_9 = -12+6\sqrt{7}$$

Ответ: $\lambda=2$; $\lambda=2+\sqrt{7}$; $\lambda=2-\sqrt{7}$

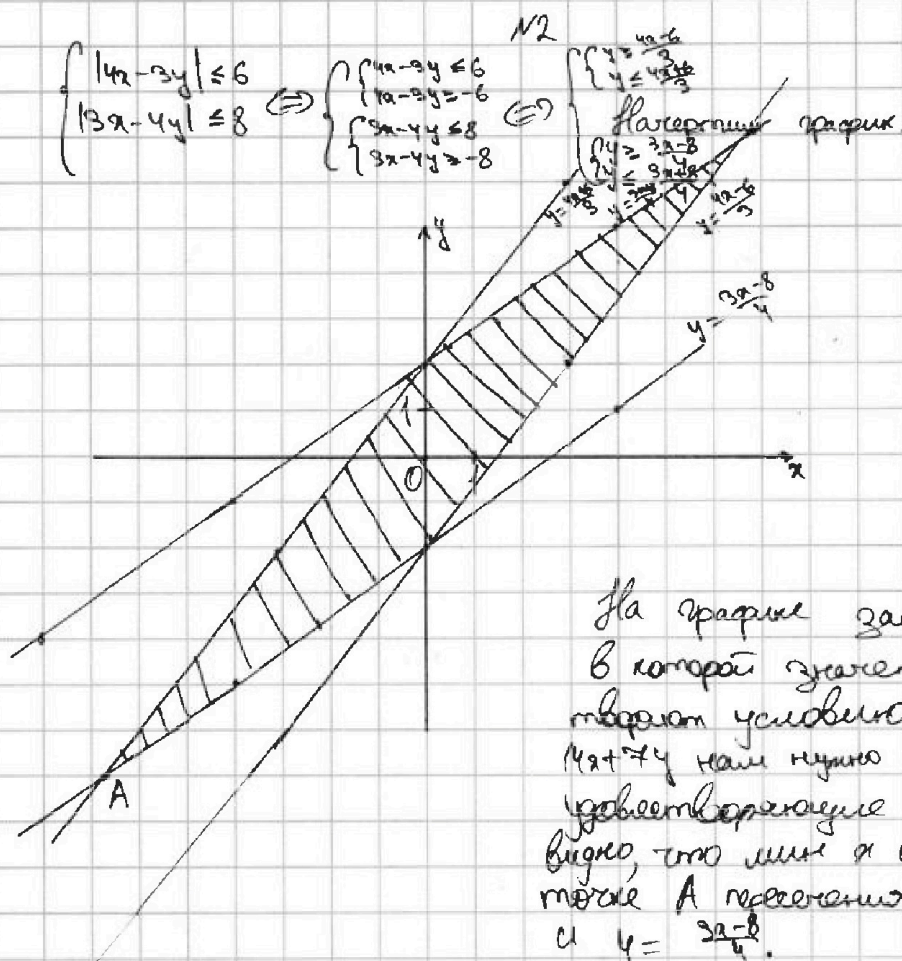


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На графике заштрихована область, в которой значения x и y удовлетворяют условию. Для минимизации $4x+7y$ нам нужно минимизировать x и y , удовлетворяющие условию. По графику видно, что мин x и y достигаются в точке A пересечения прямых $y = \frac{4x+6}{3}$ и $y = \frac{3x-8}{4}$.

$$\frac{4x+6}{3} = \frac{3x-8}{4} \quad | \cdot 12$$

$$16x+24 = 9x-24$$

$$7x = -48$$

$$x = -\frac{48}{7}$$

$$y = \frac{4 \cdot (-\frac{48}{7}) + 6}{3} = -\frac{192}{21} + \frac{6}{3} = -\frac{64}{7} + 2 = -\frac{50}{7}$$

$$\min (4x+7y) = 4 \cdot (-\frac{48}{7}) + 7 \cdot (-\frac{50}{7}) = -96 - 50 = -146$$

Ответ: -146.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = (m-n)^2 + 3(m-n) = (m-n)(m-n+3)$$

$$B = mn(m-n+3)$$

Начнем рассуждения с случая, когда $p=13$, $q=3$, т.е. $p=13$
 $q=3$.

$$p=13: 13p^2 = 13^3 = 2197$$

$$(m-n)(m-n+3) = 2197$$

$$t = m-n$$

$$t^2 + 3t - 2197 = 0$$

$$D = 81 + 4 \cdot 2197 = 8869 \notin \mathbb{N} \Rightarrow t \notin \mathbb{N}, \text{ но } m-n \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$mn(m-n+3) = 2197$$

$$\begin{cases} mn=1 \Rightarrow m=1, n=1 \\ m-n+3=2197 \end{cases}$$

— не годится, т.к. $m-n+3 \neq 2197$

$$\begin{cases} mn=13 \Rightarrow m=1, n=13 \text{ или } m=13, n=1 \\ m-n+3=169 \end{cases}$$

$$m-n+3=169$$

$$\begin{cases} mn=169 \Rightarrow m=1, n=169; m=13, n=13; m=169, n=1 \\ m-n+3=13 \end{cases}$$

$$m-n+3=13$$

$$\begin{cases} mn=2197 \\ m-n+3=1 \end{cases}$$

$$m-n+3=1$$

$$m-n+3=1$$

Итак, $p \neq 13$.

$$q=3: 3q^2 = 27$$

$$(m-n)(m-n+3) = 27$$

$$t = m-n$$

$$t^2 + 3t - 27 = 0$$

$$D = 81 + 108 = 189 \notin \mathbb{N}, \text{ тогда } t \notin \mathbb{N}, \text{ но } m-n \in \mathbb{N}$$

$$mn(m-n+3) = 27$$

$$\begin{cases} mn=1 \Rightarrow m=1, n=1, \text{ но } m-n+3 \neq 27 \\ m-n+3=27 \end{cases}$$

$$m-n+3=27$$

$$\begin{cases} mn=3 \\ m-n+3=27 \end{cases}$$

$$m-n+3=27$$

$$\begin{cases} mn=9 \\ m-n+3=27 \end{cases}$$

$$m-n+3=27$$

$$\begin{cases} mn=27 \\ m-n+3=1 \end{cases}$$

$$m-n+3=1$$

Итак, $p \neq 13$ и $q \neq 3 \Rightarrow A: 13$ и $B: 3$ или $A: 3$ и $B: 13$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Предположим, $A:13$ и $B:3$.

$$(m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9):13. \text{ Тогда } m-n:13 \text{ или } m-n+9:13$$

$$mn(m-n+3):3. \text{ Тогда } m:3 \text{ или } n:3 \text{ или } (m-n):3. \text{ При}$$

этом однозначно m и n не могут быть
кратны 3, т.к. иначе $mn(m-n+3):27$, а $39 \nmid 27$.

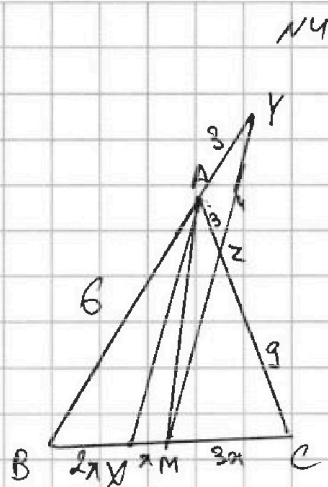


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{matrix} AC = 12 \\ AZ = 9 \end{matrix} \Rightarrow ZC = 9$$

Т.к. $AX \parallel ZM$, то по теореме Фалеса

$$\frac{AZ}{ZC} = \frac{XM}{MC} = \frac{1}{3}$$

$XM = x \Rightarrow MC = 3x$, а т.к. $BM = MC$, то $BX = 2x$

Т.к. AX — биссектриса, то

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BX}{XC}$$

$$\frac{AB}{12} = \frac{2x}{3x}$$

$$\frac{AB}{12} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{AB}{12} = \frac{1}{2}$$

$$AB = 6$$

Данные мы можем применить теорему Менелая для треугольника ABC и прямой YXZ:

$$\frac{BY}{MC} \cdot \frac{CZ}{ZA} \cdot \frac{AY}{YB} = 1$$

$$1 \cdot 3 \cdot \frac{AY}{YB} = 1$$

$$\frac{AY}{YB} = \frac{1}{3}$$

$$3AY = YB = AB + AY$$

$$3AY = AB + AY$$

$$2AY = 6$$

$$AY = 3$$

Мы знаем все стороны треугольника AYZ. Применим в нем теорему косинусов и узнаем $\cos \angle ZAY$:

$$16 = 9 + 9 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cos \angle ZAY$$

$$16 = 18 - 18 \cos \angle ZAY$$

$$-2 = -18 \cos \angle ZAY$$

$$\cos \angle ZAY = \frac{1}{9} \quad \angle BAC = (180^\circ - 2\angle ZAY) \Rightarrow \cos \angle BAC = -\cos 2\angle ZAY = -\frac{1}{9}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Мы знаем $\cos \angle BAC$, AB и AC , а значит можем найти BC по теореме косинусов:

$$BC^2 = 36 + 144 - 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$BC^2 = 180 + 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot \frac{1}{3}$$

$$BC^2 = 180 + 16$$

$$BC = 14$$

$$\text{Ответ: } BC = 14$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}$$

$$4x^4 + x - 5\sqrt{y} = 4y^4 - 5\sqrt{x} + y$$

ОЗ: $\begin{cases} x+6 \geq 0 \\ 5-y \geq 0 \\ 30-x-y^2 \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -6 \\ y \leq 5 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 30-x-y^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0, \infty) \\ y \in [0, 5] \\ 30-x-y^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0, \infty) \\ y \in [0, 5] \\ x \leq 30-y^2 \end{cases} \Leftrightarrow$

т.к. мин. $y=0$,
то макс. $30-y^2=30$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \in [0, 5] \\ x \in [0, 30] \end{cases}$$

$$4x^4 - 4y^4 + x - y + 5\sqrt{x} - 5\sqrt{y} = 0$$

$$4(x^2-y^2)(x^2+y^2) + (x-y) + 5(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$4(x-y)(x+y)(x^2+y^2) + (x-y) + 5(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(x-y)(4(x+y)(x^2+y^2) + 1) + 5(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(4(x+y)(x^2+y^2) + 1) + 5(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \left(\frac{(4\sqrt{x} + 4\sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(4(x+y)(x^2+y^2) + 1) + 5}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right) = 0$$

возможно только $x=y$ из 2-ого уравнения системы.

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2}$$

$$\sqrt{x+6} - 2\sqrt{(x+6)(5-x)} - \sqrt{5-x} + 5 = 0$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} = -5 + 2\sqrt{(x+6)(5-x)}$$

$$x+6 - 2\sqrt{(x+6)(5-x)} + 5-x = 4(x+6)(5-x) - 20\sqrt{(x+6)(5-x)} + 25$$

$$11 - 2\sqrt{(x+6)(5-x)} = 4(x+6)(5-x) - 20\sqrt{(x+6)(5-x)} + 25$$

$$4(x+6)(5-x) - 18\sqrt{(x+6)(5-x)} + 14 = 0$$

$$t = \sqrt{(x+6)(5-x)}$$

$$4t^2 - 18t + 14 = 0$$

$$2t^2 - 9t + 7 = 0$$

$$t_1 = 1$$

$$t_2 = 3,5$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$t=1$:

$$\sqrt{(x+6)(5-x)} = 1$$

$$(x+6)(5-x) = 1$$

$$5x - x^2 + 30 - 6x = 1$$

$$-x^2 - x + 30 = 1$$

$$x^2 + x - 29 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 29 = 117$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{117}}{2}, \text{ тогда } y = \frac{\sqrt{117} - 1}{2}, \text{ тогда } \sqrt{30 - \frac{\sqrt{117} - 1}{2} - \frac{(\sqrt{117} - 1)^2}{4}} =$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{117}}{2} - \text{негод.}, x \geq 0 = \sqrt{30 - \frac{\sqrt{117} - 1}{2} - \frac{1 + 2\sqrt{117} + 1}{4}} =$$

$$= \sqrt{30 - \frac{\sqrt{117} - 1}{2} - 29 + \sqrt{117}} =$$

$$= \sqrt{\sqrt{117} - \frac{\sqrt{117} - 1}{2} - 29} =$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{117} + 1}{2} - 29} \leq 0, \text{ негод.}$$

$$\text{тогда } 30 - \frac{\sqrt{117} - 1}{2} - \frac{(\sqrt{117} - 1)^2}{4} =$$

$$= 30 - \frac{\sqrt{117} - 1}{2} - \frac{1 + 2\sqrt{117} + 1}{4} =$$

$$= 30 - \frac{(2\sqrt{117} - 2 + 1 + 2\sqrt{117} + 1)}{4} =$$

$$= 30 - 29 = 1 > 0 \checkmark$$

$$\text{и } \frac{\sqrt{117} - 1}{2} < 5 \text{ (для } y \in [0, 5])$$

$t=3,5$:

$$\sqrt{(x+6)(5-x)} = 3,5$$

$$(x+6)(5-x) = 12,25$$

$$4(x+6)(5-x) = 49$$

$$4(5x - x^2 + 30 - 6x) = 49$$

$$4(-x^2 - x + 30) = 49$$

$$-4x^2 - 4x + 120 = 49$$

$$-4x^2 - 4x + 71 = 0$$

$$4x^2 + 4x - 71 = 0$$

$$D = 16 + 4 \cdot 4 \cdot 71 = 1152 = (24\sqrt{3})^2$$

$$x_1 = \frac{-4 + 24\sqrt{3}}{8} = \frac{6\sqrt{3} - 1}{2}, \text{ тогда } y = \frac{6\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-4 - 24\sqrt{3}}{8} \leq 0, \text{ негод.}$$

$$30 - \frac{6\sqrt{3} - 1}{2} - \frac{(6\sqrt{3} - 1)^2}{4} = 30 - \frac{6\sqrt{3} - 1}{2} - \frac{73 - 12\sqrt{3}}{4} = 30 - \frac{12\sqrt{3} - 2}{4} - \frac{73 - 12\sqrt{3}}{4} =$$

$$= 30 - \frac{(12\sqrt{3} - 2 + 73 - 12\sqrt{3})}{4} =$$

$$\frac{71}{4} = 17,75 > 0 \checkmark \text{ и } \frac{6\sqrt{3} - 1}{2} < 5 \text{ (для } y \in [0, 5])$$

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{117} - 1}{2}; \frac{\sqrt{117} - 1}{2}\right), \left(\frac{6\sqrt{3} - 1}{2}; \frac{6\sqrt{3} - 1}{2}\right)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

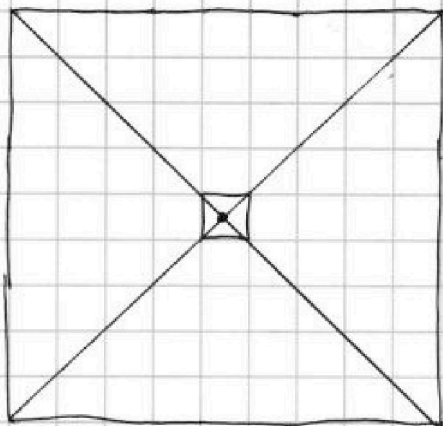
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6



Всего узлов $10 \cdot 10 = 100$ штук.

Заметим, что узлы, лежащие на выделенных диагоналях, а именно на диагоналях распадаются

Заметим, что для узла, лежащего вместе на одной из выделенных диагоналей на одинаковом расстоянии от центра таблицы, симметрично, а значит, при 4 поворотах фигуры будут повторяться одинаковые случаи. 4 других узла

~~при 4 поворотах будут 4 разных случая.~~
Выборить узел, не лежащий на диагоналях, и любой другой узел, а после их перекрасить можно $\frac{20 \cdot 99}{2 \cdot 4}$. Выбрать два узла, лежащих на диа-

нет разницы в каком порядке мы выберем узлы, не лежащих на диагоналях
делит на 4, т.к. при повороте у нас 4 одинаковых распада, выбираем любой из них узлы

нельзя уже выбирать и симметричный к нему узел

значит, ~~то~~ но при этом несимметрично, можно $\frac{20 \cdot 18}{2 \cdot 4}$ способами.

а после перекрасить узлы

Выборить два симметричных узла, после перекрасить, можно $\frac{20 \cdot 1}{2 \cdot 2}$ - симметричный узел после выбранного определяется однозначно.

$\frac{20 \cdot 1}{2 \cdot 2}$ 10 способами.

Итого: $\frac{20 \cdot 99}{2 \cdot 4} + \frac{20 \cdot 18}{2 \cdot 4} + \frac{20 \cdot 1}{2 \cdot 2} = 990 + 45 + 5 = 1040$ способов.

Ответ: 1040 способов

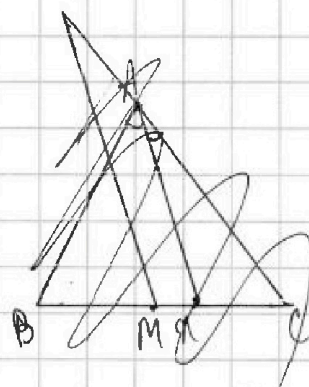
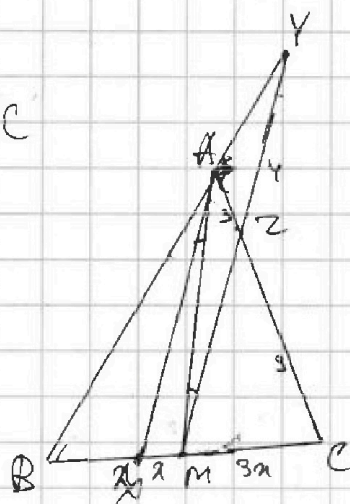
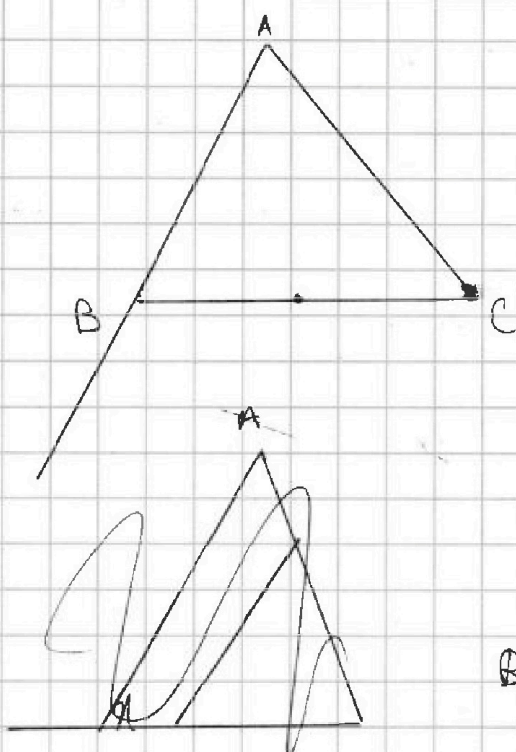


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} & \overline{AB} - \sqrt{5}y + 5 = 2\sqrt{30 - x - y^2} \\ & \sqrt{30 - x - y^2} = 4y - \sqrt{5}x + y \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9(m-n) = 169^2 \quad \text{или} \quad 89^2$$
$$B = mn(m-n+9) = 3q^2 \quad \text{или} \quad 13p^2 \quad m, n \in \mathbb{N}$$

$$A - (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9) : 3$$

$$B = mn(m-n+9) : 3 \quad m-n : 3 \quad \text{или} \quad m-n+9 : 3$$

$$\text{или } m : 3$$

$$n : 3$$

$$m-n : 3$$

$$\begin{array}{r} \times 169 \\ 13 \\ \hline 507 \\ + 169 \\ \hline 2197 \end{array}$$

$$(m-n)(m-n+9) = 2197$$

$$\begin{array}{l} \cancel{m-n=169} \\ m-n=13 \\ m-n+9=169 \\ 13+9=169 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} mn(m-n+9) = 89^2 \\ m-n=13 \\ m-n+9=169 \\ mn=169 \\ m-n+9=13 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 2197 \\ 13 \\ \hline 8789 \\ - 8863 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \times 27 \\ (m-n)(m-n+9) = 27 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} mn(m-n+9) = 27 \\ mn = 1 - 1699 \\ m-n+9 = 27 \\ mn = 27 \\ m-n+9 = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (m-n+9) = 3 \\ mn = 9 \\ m-n+9 = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} m-n=0 \\ m=n \\ 33 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} m=3 \\ n=3 \\ q=3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 97 \\ \times 97 \\ \hline 679 \\ + 873 \\ \hline 9409 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 93 \\ \times 93 \\ \hline 879 \\ + 879 \\ \hline 8649 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$6x+18$$

$$81+49$$

$$(x^2-4x)$$

$$81+64$$

$$x^2$$

$$(-3x^2)$$

$$81+109$$

$$-3(11+4\sqrt{7}) =$$

$$= -33 - 12\sqrt{7}$$

$$x^2-4x = \frac{6x+18+49}{2}$$

$$18 = 30 + 85\sqrt{7} + 49$$

$$-12 - 6\sqrt{7}$$

$$2x^2-8x = 6x+18+49$$

$$(6\sqrt{7})^2 - 4(20\sqrt{7})^2 =$$

$$= (4+7+4\sqrt{7}-8-4\sqrt{7})^2 =$$

$$49 = x^2-8x-6x-18 = x^2-14x-18$$

$$(2-5\sqrt{7})^2 = 9$$

$$= 4-4\sqrt{7}+7 = 11-4\sqrt{7}$$

$$= 8+7$$

$$\frac{x^2-4x-3x^2}{2} = \frac{-2x^2-4x}{2} = -x^2-2x$$

$$11-4\sqrt{7} - 4(2-5\sqrt{7}) =$$

$$= 11-4\sqrt{7}-8+20\sqrt{7} = 3$$

$$9$$

$$18 = 30 + 85\sqrt{7} + 49$$

$$-12 + 6\sqrt{7} = 49$$

$$2x^2-14x-18 = -x^2-2x$$

$$3x^2-12x-18 = 0$$

$$x^2-4x-6 = 0$$

$$\Delta = 16+24 = 40 = 2\sqrt{10}$$

$$x_1 = \frac{4+\sqrt{10}}{2}$$

$$x_2 = \frac{4-\sqrt{10}}{2}$$

$$x^2-6x^2+5x+6$$

$$8-24+10+6$$

$$30$$

$$16$$

$$2$$

$$-12$$

$$2+7$$

$$6(20\sqrt{7})+18 = 30+12\sqrt{7}$$

$$16-88+(7\cdot 4-4\cdot 12)=$$

$$= 16-88+68-8-12 =$$

$$= 16+4-8-12 = 0$$

$$(6\sqrt{7})^2 - 4(20\sqrt{7})^2 =$$

$$= (4+7+4\sqrt{7}-8-4\sqrt{7})^2 =$$

$$= 9$$

$$16\sqrt{7}$$

$$2+7$$

$$a_6$$

$$9$$

$$a_8$$

$$a_{10}$$

$$11+4\sqrt{7}$$

$$16-5\sqrt{7} = 2$$

$$(2+5\sqrt{7})^2 = 4+7+4\sqrt{7} = 11+4\sqrt{7}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



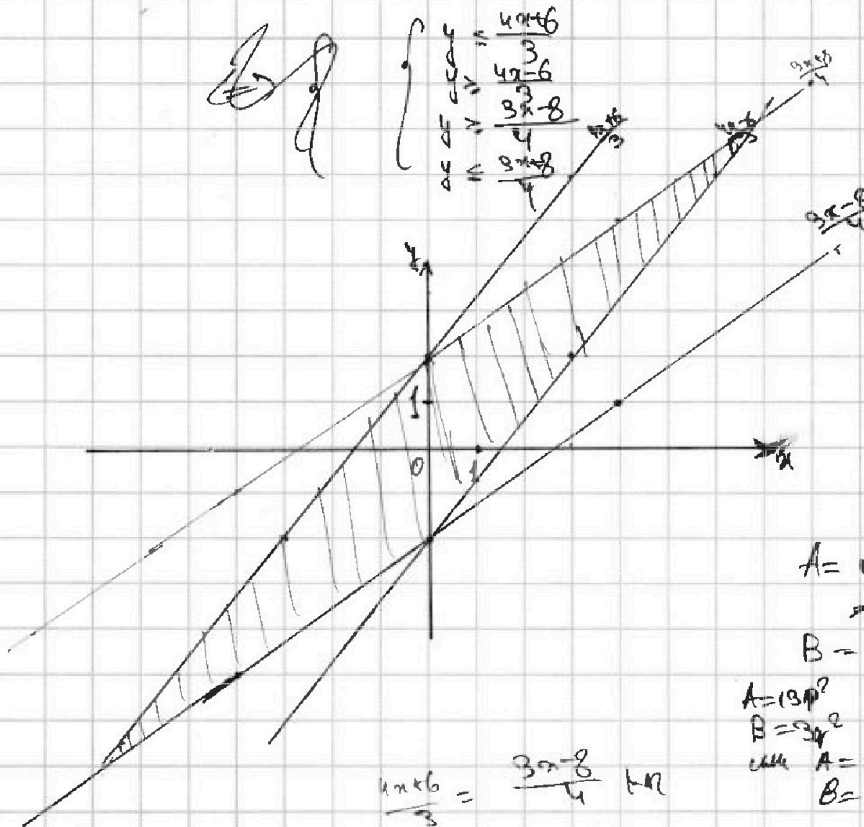
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |4x-3y| \leq 6 \\ |3x-4y| \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3y \leq 6 \\ 4x-3y \geq -6 \\ 3x-4y \leq 8 \\ 3x-4y \geq -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y \leq 4x+6 \\ 3y \geq 4x-6 \\ 4y \geq 3x-8 \\ 4y \leq 3x+8 \end{cases}$$



мен REN

$$A = (m-n)^2 + q(m-n) =$$

$$B = mn(m-n+q)$$

или $A = 3q^2$ $B = 13p^2$

$p, q \in \text{примитивы}$

$$\frac{4x+6}{3} = \frac{3x-8}{4} + n$$

$$16x+24 = 9x-24$$

$$7x = -48$$

$$x = -\frac{48}{7}$$

$$\frac{3 \cdot -\frac{48}{7} + 6}{4} = \frac{-\frac{144}{7} + 6}{4} = -\frac{36}{7} + 2 = -\frac{20}{7}$$

$$\frac{4 \cdot -\frac{48}{7} + 6}{3} = \frac{-\frac{192}{7} + 6}{3} = -\frac{64}{7} + 2 = -\frac{50}{7}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \geq -6$$

$$y \leq 5$$

$$30 - x - y^2 \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$x \geq 0$$

NT

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} = 2\sqrt{30-x-y^2} - 5$$

$$4x^2 - 4y^2 + x - y + 5\sqrt{x} - 5\sqrt{y} = 0$$

$$x \in [-6; +\infty) \quad y(x+y) + 6 - y + 5(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$y \in [0; 5] \quad y(2x+y) + 6 - y + 5(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$30 - y^2 \geq 0$$

$$x \in [0; 5]$$

$$x \in [0; 5]$$

$$y \in [0; 5]$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}$$
$$4x^2 - 4y^2$$
$$(x+6)(5-y) = 2x - x^2 + 20 - 6y$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 12 \\ \hline 112 \\ 128 \\ \hline 192 \end{array}$$

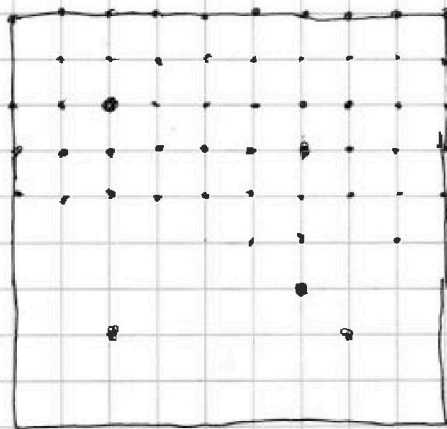
$$x^2 - x + 30$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 30$$

$$= 30.75$$

$$= 75$$



$$10 \cdot 10 = 100 \text{ точек}$$

$$\frac{100 \cdot 99}{4} = 2475$$

Кроме центра
Подсчитали по
формуле
на 2.

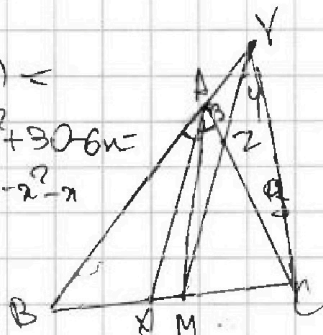
$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 12 \\ \hline 112 \\ 128 \\ \hline 192 \end{array}$$

$$(x+6)(5-y) =$$

$$= 5x - x^2 + 30 - 6y$$

$$= 30 - x^2 - y$$

BC - ?



$$\begin{array}{r} 100 \\ \times 12 \\ \hline 1200 \\ 1200 \\ \hline 1200 \end{array}$$

$$\frac{\sqrt{11} - 1}{2} \sqrt{5}$$
$$\sqrt{11} - 1 \sqrt{10}$$
$$\sqrt{11} \sqrt{11}$$
$$\sqrt{11} < 11$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

