



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен $\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}$, двенадцатый член равен $2 - x$, а восемнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

Пусть k - коэффициент, на который умножается каждый следующий член прогрессии.

Тогда a_i - i -ый член этой прогрессии, тогда

$$a_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}; \quad a_{12} = 2-x; \quad a_{18} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$$

$$a_{12} = a_{11} \cdot k = a_{10} \cdot k^2 = k^2 \cdot \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$$

$$a_{18} = a_{17} \cdot k = a_{16} \cdot k^2 = a_{15} \cdot k^3 = a_{14} \cdot k^4 = a_{13} \cdot k^5 = a_{12} \cdot k^6 = a_{11} \cdot k^7 = a_{10} \cdot k^8 = k^8 \cdot \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$$

$$(25x+34)(3x+2) \geq 0, \Rightarrow \begin{cases} 25x+34 \geq 0 \\ 3x+2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{34}{25} \\ x \geq -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25x+34 \leq 0 \\ 3x+2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{34}{25} \\ x \leq -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{2}{3} \\ x \leq -\frac{34}{25} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{12} = 2-x \\ a_{18} = k^8 \cdot \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k^2 \geq 0 \\ \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \geq 0, \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2-x \geq 0, \Rightarrow x \leq 2$$

$$\begin{cases} a_{18} = k^8 \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \\ a_{18} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} \end{cases} \Rightarrow k^8 \sqrt{(25x+34)(3x+2)} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 25x+34=0 \\ k^8 = \frac{1}{(3x+2)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{34}{25} \\ k = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{13x+21}} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Если } x = -\frac{34}{25}, \text{ то } a_{10} = \sqrt{(25 \cdot (-\frac{34}{25}) + 34)(3 \cdot (-\frac{34}{25}) + 2)} = \sqrt{0 \cdot (3 \cdot (-\frac{34}{25}) + 2)} =$$

$$= \sqrt{0} = 0, \text{ тогда } \begin{cases} a_{12} = a_{10} \cdot k^2 = 0 \cdot k^2 = 0 \\ a_{12} = 2 - (-\frac{34}{25}) = 2 + \frac{34}{25} = \frac{84}{25} \end{cases} \text{ — невозможно,}$$

значит, $k = \pm \sqrt{\frac{1}{|3x+2|}}$; $x \neq -\frac{34}{25}$

$$a_{12} = k^2 \sqrt{(25x+34)(3x+2)} = \sqrt{\frac{1}{|3x+2|} \cdot (25x+34)(3x+2)} =$$

$$= \sqrt{|25x+34|}$$

$$a_{12} = 2 - x, \Rightarrow 2 - x = \sqrt{|25x+34|}, \Rightarrow 4 - 2x + x^2 = |25x+34|$$

$$\text{Если } x \in [-\frac{2}{3}; 2], \text{ то } 4 - 2x + x^2 = 25x + 34$$

$$\text{Если } x \in (-\infty; -\frac{34}{25}), \text{ то } 4 - 2x + x^2 = -25x - 34$$

$$\begin{cases} x^2 - 27x - 30 = 0 \\ x \in [-\frac{2}{3}; 2] \\ x^2 + 23x + 38 = 0 \\ x \in (-\infty; -\frac{34}{25}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{27 \pm \sqrt{729 + 120}}{2} = \frac{27 \pm \sqrt{849}}{2} \\ x \in [-\frac{2}{3}; 2] \\ x = \frac{-23 \pm \sqrt{529 - 152}}{2} = \frac{-23 \pm \sqrt{377}}{2} \\ x \in (-\infty; -\frac{34}{25}) \end{cases}$$

Проверим, попали ли корни в диапазоны.

$$\frac{27 + \sqrt{849}}{2} = 13,5 + \frac{\sqrt{849}}{2} > 13 > 2 \text{ — не попал.}$$

$$\frac{27 - \sqrt{849}}{2} < \frac{27 - \sqrt{841}}{2} = \frac{27 - 29}{2} = -1 < -\frac{2}{3} \text{ — не попал.}$$

$$\frac{-23 - \sqrt{377}}{2} = -11,5 - \frac{\sqrt{377}}{2} < -11 < -\frac{34}{25} \text{ — попал}$$

$$\frac{-23 + \sqrt{377}}{2} < \frac{-23 + \sqrt{900}}{2} = \frac{-23 + 30}{2} = 1,5 \neq -\frac{150}{100} = -\frac{37,5}{25} < -\frac{34}{25} \text{ — не попал.}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{-23 + \sqrt{377}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1; \sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x =$$

$$= (\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot \cos x - 2\sin^2 x \cdot \cos x = \cos x (\cos^2 x - 3\sin^2 x) =$$

$$= \cos x (4\cos^2 x - 3) = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$(4p \cos^3 x - 3p \cos x) + (12 \cos^2 x - 6) + 3p \cos x + 12 \cos x + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0$$

$$p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$$

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos x + 1)^3 = 0$$

Если $p=0$, то уравнение примет вид

$$3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$$

его дискриминант равен $9-12 = -3 < 0$ - нет корней, а при $p \neq 0$ уравнение сложившееся

кубическое, а у любого уравнения нечетной

степени либо есть хотя бы 1 корень, то есть $p=0$ не подходит.

подходят все p , кроме 0.

Решим уравнение при ненулевом p

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos x + 1)^3 = 0$$

$$(\sqrt[p-1]{p-1} \cos x + \cos x + 1)(\sqrt[p-1]{p-1}^2 \cos^2 x + \sqrt[p-1]{p-1} \cos x (\cos x + 1) + (\cos x + 1)^2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt[p-1]{p-1} \cos x + \cos x + 1 = 0 \\ \sqrt[p-1]{p-1}^2 \cos^2 x + \sqrt[p-1]{p-1} \cos x (\cos x + 1) + (\cos x + 1)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \cos x &= -\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1} \\ \left(\sqrt[3]{p-1}^2 - \sqrt[3]{p-1} + 1 \right) \cos^2 x - \left(\sqrt[3]{p-1} - 2 \right) \cos x + 1 &= 0 \\ \cos x &= \frac{\sqrt[3]{p-1} - 2 \pm \sqrt{\left(\sqrt[3]{p-1}^2 - 4\sqrt[3]{p-1} + 4 - 4\sqrt[3]{p-1}^2 + 4\sqrt[3]{p-1} - 4 \right)}}{2 \left(\sqrt[3]{p-1}^2 - \sqrt[3]{p-1} + 1 \right)} = \\ &= \frac{\sqrt[3]{p-1} - 2 \pm \sqrt{-3\sqrt[3]{p-1}^2}}{2 \left(\sqrt[3]{p-1}^2 - \sqrt[3]{p-1} + 1 \right)} \end{aligned}$$

Это есть дискриминант. Это такое уравнение равно

$$D = -3\sqrt[3]{p-1}^2, \text{ но } \sqrt[3]{p-1}^2 \geq 0, \Rightarrow -3\sqrt[3]{p-1}^2 \leq 0, \Rightarrow D \geq 0 \text{ только}$$

$$\begin{aligned} \text{при } p-1=0; \Rightarrow p=1, \Rightarrow \cos x &= \frac{\sqrt[3]{1-1} - 2 \pm \sqrt{-3\sqrt[3]{1-1}^2}}{2 \left(\sqrt[3]{1-1}^2 - \sqrt[3]{1-1} + 1 \right)} = \\ &= \frac{-2 \pm 0}{2} = -1 - \text{подходит} \end{aligned}$$

Но можно еще это есть квадратное уравнение будет иметь решение только при $p=1$

$$\text{Вспомогательное, что } \cos x \in [-1; 1], \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1} \in [-1; 1]$$

$$-\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1} \geq -1, \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{p-1}+1 \geq 0 \\ -1 \geq \sqrt[3]{p-1}+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{p-1}+1 \geq 0 \\ \sqrt[3]{p-1} \leq -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p-1 \geq 0 \\ \sqrt[3]{p-1} \leq -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p-1 \geq 0 \\ p-1 \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \geq 1 \\ p \leq 0 \end{cases}$$

Когда не подходит $p \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$

$$-\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1} \leq 1, \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{p-1}+1 \geq 0 \\ \sqrt[3]{p-1}+1 \geq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{p-1}+1 \geq 0 \\ \sqrt[3]{p-1} \geq -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p-1 \geq 0 \\ \sqrt[3]{p-1} \leq -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p-1 \geq -1 \\ p-1 \leq -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \geq 0 \\ p \leq -7 \end{cases}$$

Когда не подходит $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$ и $p=0$ не подходит.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

При всех $p \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$ будут

корни $\cos x = -\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1}$, а при $p=1$ будут ещё корни

$$\cos x = -1$$

Ответ: $p \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$

При $p \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$ корни уравнения будут

$\cos x = -\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1}$, а при $p=1$ корни уравнения

$$\begin{cases} \cos x = -\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1} = -1 \Rightarrow \cos x = -1, \text{ то есть} \\ \cos x = -1 \end{cases}$$

при всех $p \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$ корни уравнения

будут $\cos x = -\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1}$;

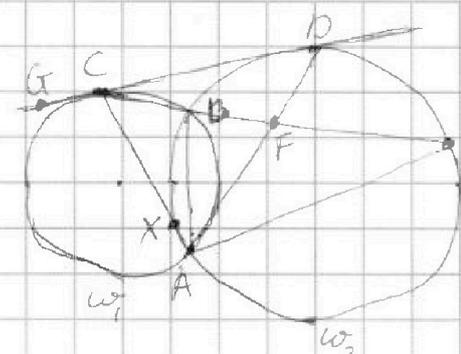
$$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1}\right) + 2\pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Задача 4

Точка F - точка пересечения

AD и EC, тогда $\frac{CF}{FE} = \frac{7}{20}$

Четырёхугольник AB, AE, AC, AD.

$\angle CBA = \frac{1}{2} \overset{\frown}{CA} = \angle GCA$, где G - точка на прямой

CD такая, что G и D лежат по разные стороны

от точки C.

$\angle ABE = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \angle GCA = \angle ACD = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{DE} + \overset{\frown}{AE} - \overset{\frown}{AD})$, где X - точка, симметричная к C относительно

AC окружности ω_2 , тогда $\frac{1}{2} \overset{\frown}{XD} = \angle XAD = \angle CAD$,

$\frac{1}{2} \overset{\frown}{DE} = \angle DAE$, $\frac{1}{2} \overset{\frown}{AE} = \angle ABE$, $\Rightarrow \angle ABE = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{DE} + \overset{\frown}{AE} - \overset{\frown}{AD}) =$

$= \angle ABE + \angle DAE - \angle CAD$, $\Rightarrow \angle DAE - \angle CAD = \angle ABE - \angle ABE = 0$, \Rightarrow

AD - биссектриса $\angle CAE$, $\Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{CF}{FE} = \frac{7}{20}$; $AC = \frac{7}{20} AE$

$\angle CDA = \frac{1}{2} \overset{\frown}{CA} = \angle BEA$, $\Rightarrow \triangle CDA \sim \triangle AED$ ($\angle DAE = \angle DAC$,

$\angle CDA = \angle BEA$, т.к. CD - касательная, $\angle BEA$ опирается на

дугу $\overset{\frown}{DA}$), $\Rightarrow \frac{CD}{DE} = \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE}$, $\Rightarrow AD^2 = AE \cdot AC$, \Rightarrow

$\Rightarrow AD = \sqrt{AE \cdot AC} = \sqrt{AE^2 \cdot \frac{7}{20}} = AE \sqrt{\frac{7}{20}}$, \Rightarrow

$\frac{CD}{DE} = \frac{AD}{AE} = \frac{AE \sqrt{\frac{7}{20}}}{AE} = \sqrt{\frac{7}{20}}$, $\Rightarrow \frac{ED}{DC} = \sqrt{\frac{20}{7}}$

Ответ: $\frac{ED}{DC} = \sqrt{\frac{20}{7}}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5

Будем красить клетки так, что на n -й шагу по номеру ходов мы бы размещали n клеток симметричного предугулей по одной из симметричной из условий.

Рассчитаем сколько количество способов раскрасить эти 8 клеток относительно центра. Это будет $500 \cdot 120$ способов выбрать первую клетку, $500 \cdot 120 - 2$ способов выбрать вторую клетку, $500 \cdot 120 - 4$ способов выбрать третью клетку и $500 \cdot 120 - 6$ способов выбрать четвертую клетку, но на пятом ходу мы считаем дваноси, если перемещали это, размещаем

всего 2⁴, так же как и в центре пересечен
 Введем клетку, а мы их конечная конструкция,
 тогда поделили сумму на 4!, т.к. на $\frac{5}{2} = 4$
 $500 \cdot 120 \cdot (500 \cdot 120 - 2) \cdot (500 \cdot 120 - 4)$
 Тогда количество способов равно $2^4 \cdot 4!$
 $(500 \cdot 120 - 8)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Посчитаем количество способов симметрично горизонтальной средине мраморных шариков

В данном случае мы можем выделить первую

клетку $250 \cdot 120$ способами, ^{вторую} ~~вторую~~ $250 \cdot 120 - 1$ способами, ^{третью} ~~третью~~ $250 \cdot 120 - 2$ способами, ^{четвертую} ~~четвертую~~ $250 \cdot 120 - 3$

способами.

Ответ же получим в $4!$, так как в каждом порядке всегда клетки.

$$\text{Получимся число } \frac{250 \cdot 120 (250 \cdot 120 - 1) (250 \cdot 120 - 2) (250 \cdot 120 - 3)}{4!} =$$

$$\text{Ответ} = \frac{500 \cdot 120 (500 \cdot 120 - 2) (500 \cdot 120 - 4) (500 \cdot 120 - 6)}{2^4 \cdot 4!}$$

Для симметрично симметрично вертикали

аккамулятно поуровню количество способов

$$\frac{500 \cdot 60 \cdot (500 \cdot 60 - 1) (500 \cdot 60 - 2) (500 \cdot 60 - 3)}{4!} = \frac{500 \cdot 60 \cdot 120 \cdot (500 \cdot 120 - 2) \cdot (500 \cdot 120 - 4) \cdot (500 \cdot 120 - 6)}{2^4 \cdot 4!}$$

Важно отметить, что

Заметим, что если 8 клеток симметричны

по вертикали - то 2 из них из этих двух симметричны по оси симметрии, а 6 по первой симметрии



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Эта задача посвящена двум кубам K_1 и K_2 и их диагоналям EM_1 и EM_2 ,
 где M_1 и M_2 — центры противоположных граней.
 Возьмем 2 симметричные кубы из задачи 5,
 расположив, они симметричны относительно горизонтальной
 срединной плоскости. У каждой из них есть еще пометки, симметричные
 относительно этой же плоскости. Если введем
 координаты симметричных точек относительно
 вертикальной срединной плоскости, то ^{эти точки будут}
 образовать прямоугольник, средние линии
 которого в вертикальном направлении
 совпадают со средними линиями
 большого прямоугольника, то есть координаты
 прямоугольника симметричны относительно его
 центра, \Rightarrow равенство углов между диагоналями,
 т.к. углы этого прямоугольника совпадают
 с углами большого прямоугольника.
 Аналогично, если введем координаты симметричных
 точек относительно центра, то они
^{симметричны относительно}
 будут взаимно перпендикулярны друг другу относительно
 вертикальной срединной плоскости, то есть



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Анализ удобности все пути симметричны.

Аналогично, если первые клетки симметричны

друг другу относительно вертикальной средней,
и конфигурация удовлетворяет
средней линии, то она будет удовлетворительной,

если какой-то симметрично, то конфигурация
будет удовлетворять все пути симметрично.

Все пары симметричных симметричных разобраны, тогда
если конфигурация удовлетворяет нескольким
симметрично, то она удовлетворит и все
симметрично сразу.

Рассчитаем количество таких конфигураций

Будем выделять две клетки в левой верхней

четверти размером 250×60 клеток

2 клетки закрепивать. Если по 3 симметричные
или по пути симметрично.

$250 \cdot 60$ способов выделить первую клетку и

$250 \cdot 60 - 1$ способов выделить вторую клетку, когда
разрешено выделить как на картинке, так и по диагонали,
всё и получим число $250 \cdot 60 \cdot (250 \cdot 60 - 1) = 250 \cdot 60 \cdot 500 \cdot 120 \cdot (500 \cdot 120 - 1)$

$$\frac{250 \cdot 60 \cdot (250 \cdot 60 - 1)}{2!} = \frac{250 \cdot 60 \cdot 500 \cdot 120 \cdot (500 \cdot 120 - 1)}{2 \cdot 2!}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
5 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда при симметричных ^{количества} первых двух способов
мы учтем симметричные варианты, когда
конфигурация симметрична по всем путям
симметрично, тогда вычтем это число.

$$\begin{aligned}
 & 3 \cdot \frac{500 \cdot 120 \cdot (500 \cdot 120 - 2) \cdot (500 \cdot 120 - 4) \cdot (500 \cdot 120 - 6)}{2^4 \cdot 4!} - \frac{500 \cdot 120 \cdot (500 \cdot 120 - 4)}{2^4 \cdot 2} = \\
 & = \frac{500 \cdot 120 \cdot (500 \cdot 120 - 2)}{2^4} \left(\frac{3 \cdot (500 \cdot 120 - 2) \cdot (500 \cdot 120 - 4)}{4!} - 1 \right) = \\
 & = 3 \cdot \frac{500 \cdot 60 \cdot (500 \cdot 60 - 1) \cdot (500 \cdot 60 - 2) \cdot (500 \cdot 60 - 3)}{4!} - \frac{4! \cdot 500 \cdot 60 \cdot (500 \cdot 60 - 1)}{4!} = \\
 & \frac{(500 \cdot 60 - 2) \cdot (500 \cdot 60 - 3)}{(500 \cdot 60 - 1) \cdot (500 \cdot 60 - 3)} = 3 \cdot C_{30000}^4 - \frac{4!}{(500 \cdot 60 - 1) \cdot (500 \cdot 60 - 3)} \cdot C_{50000}^4 = \\
 & = 3 \cdot C_{30000}^4 \left(\frac{500 \cdot 60 \cdot 29998^2 - 1 - 8}{29998^2 - 1} \right) = 3 \cdot C_{30000}^4 \frac{(30000 + 3)(30000 - 3)}{(30000 - 3)(30000 - 1)} = \\
 & = 3 \cdot C_{30000}^4 \frac{30000 \cdot 3}{29999} = C_{30000}^4 \cdot \frac{90000}{29999} \\
 \text{Ответ: } & C_{30000}^4 \cdot \frac{90000}{29999}
 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

$$\begin{cases} a, b, c, p \in \mathbb{Z} \\ (a-c)(b-c) = p^2, \text{ где } p - \text{ простое число,} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \\ a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-c = p \\ b-c = p \end{cases} - \text{невозможно, т.к. } b \neq a, \text{ т.к. } b > a$$

$$\begin{cases} a-c = -p \\ b-c = -p \end{cases} - \text{невозможно, т.к. } b \neq a, \text{ т.к. } b > a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \\ a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b-a = c-a-1 \\ c = p^2 b \cdot p^2 \\ c = a+1 \\ c = b+p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b-p^2 = a-1 \\ c = a-1 \\ b+p^2 = a+1 \\ c = a+1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b-a = p^2 - 1 = (p-1)(p+1) \\ c = a-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b-a = p^2 - 1 = -(p-1)(p+1) \\ c = a+1 \end{cases}, \text{ т.к. } b-a \not\equiv 3, \Rightarrow \begin{cases} p-1 \not\equiv 3 \\ p+1 \not\equiv 3, \Rightarrow p \equiv 3, \text{ т.к.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p \equiv 1 \\ p \equiv 2 \end{cases}, \text{ а } a \text{ и } b \text{ делятся на 3 или все 3 остатка } \{0, 1, 2\}, \Rightarrow$$

$$p \equiv 0, \Rightarrow p \equiv 3, \text{ т.к. } p - \text{ простое число,} \Rightarrow p = 3, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b-a = 8 \text{ (т.к. } p^2 - 1 = 9 - 1 = 8) \\ c = a-1 \\ b-a = 1 - 9 = -8 \\ c = a+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = a+8 \\ c = a-1 \\ b = a-8 \\ c = a+1 \end{cases}$$

$$\text{т.к. } a^2 + b = 1000, \Rightarrow \begin{cases} a^2 + a + 8 = 1000 \\ b = a+8 \\ c = a-1 \\ a^2 + a - 8 = 1000 \\ b = a-8 \\ c = a+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4 \cdot 992}}{2} \\ b = a+8 \\ c = a-1 \\ a = \frac{-1 \pm \sqrt{4 \cdot 1008+1}}{2} \\ b = a-8 \\ c = a+1 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a = \frac{-1 \pm \sqrt{63}}{2} \\ b = a + 8 \\ c = a - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$b = a + 8$$

$$c = a - 1$$

$$\begin{cases} a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 33}}{2} \\ b = a + 8 \\ c = a - 1 \end{cases}$$

$$b = a + 8$$

$$c = a - 1$$

$$c = a - 1$$

$$\begin{cases} a = \frac{-1 + \sqrt{63}}{2} = 31 \\ b = a + 8 = 31 + 8 = 39 \\ c = a - 1 = 30 \end{cases}$$

$$b = a + 8 = 31 + 8 = 39$$

$$c = a - 1 = 30$$

$$\begin{cases} a = \frac{-1 - \sqrt{63}}{2} = -32 \\ b = a + 8 = -32 + 8 = -24 \\ c = a - 1 = -32 - 1 = -33 \end{cases}$$

$$b = a + 8 = -32 + 8 = -24$$

$$c = a - 1 = -32 - 1 = -33$$

Ответ: $\begin{cases} a = 31; b = 39; c = 30 \\ a = -32; b = -24; c = -33. \end{cases}$

$\begin{cases} a = 31; b = 39; c = 30 \\ a = -32; b = -24; c = -33. \end{cases}$

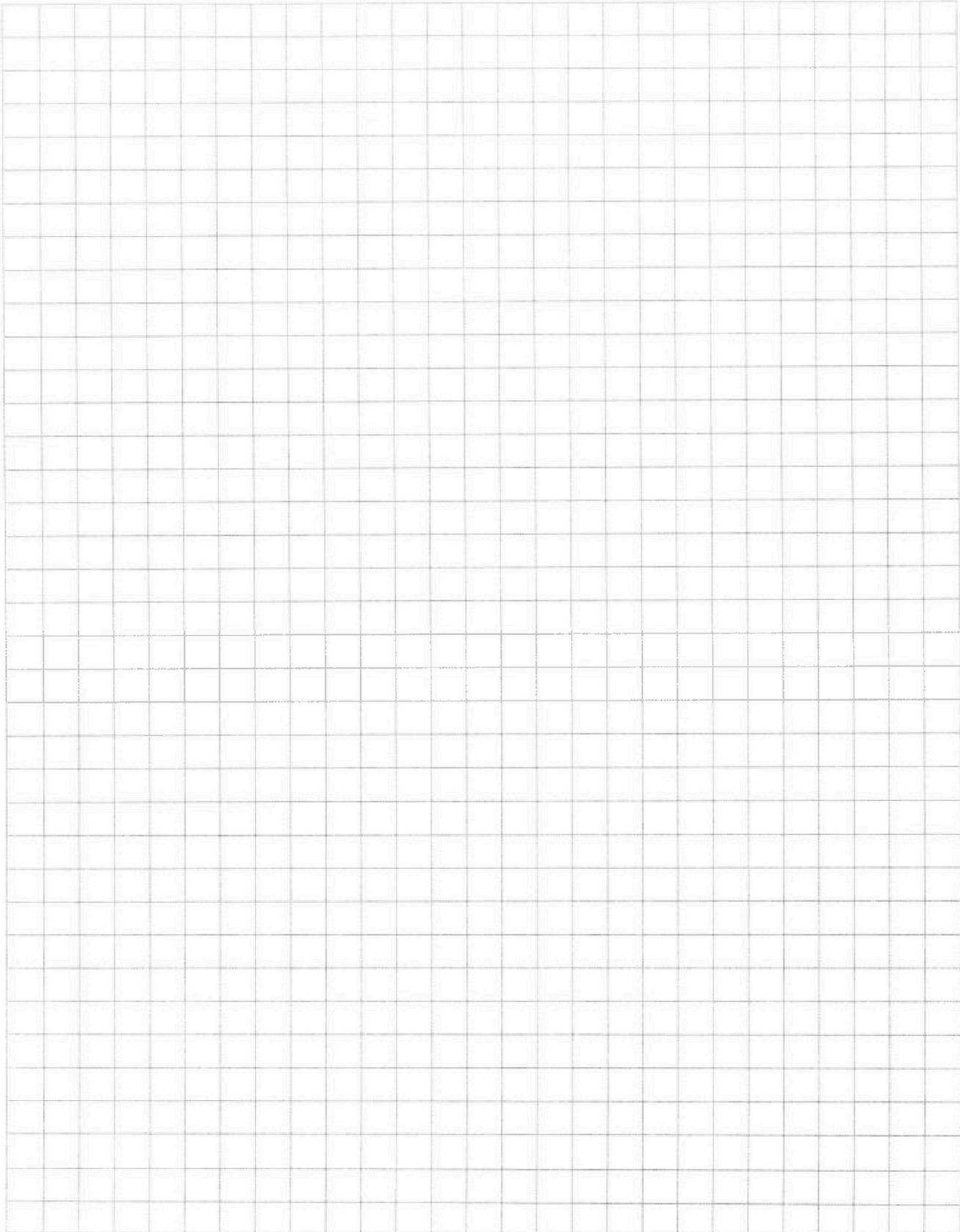


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



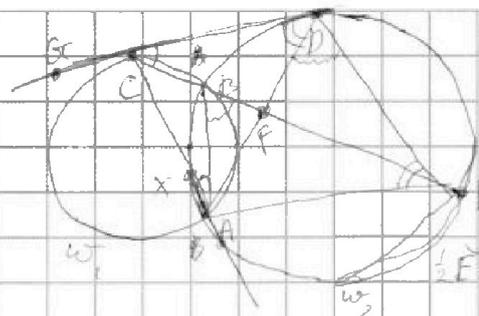
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{CAF}{FBE} = \frac{7}{20}$$

$$\begin{array}{r} 3969 + 4 \cdot 16 \\ \times 34 \\ \hline 15876 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \angle CBA &= \frac{1}{2} \widehat{CA} = \angle \beta \quad (\angle A = 180^\circ - \angle DCB) \\ \frac{1}{2} \widehat{EA} &= \angle ABE = 180^\circ - \angle CBA = 180^\circ - (180^\circ - \angle PCA) = \\ &= \angle PCA = \frac{1}{2} (\widehat{DE} + \widehat{AE} - \widehat{DA}^x) = \\ &= \frac{1}{2} \widehat{AE} + \angle DAE - \angle DAC \\ \angle DAE - \angle DAC &= \frac{1}{2} \widehat{EA} - \frac{1}{2} \widehat{EA} = 0, \Rightarrow \end{aligned}$$

AD - диаметр. $\angle A$. $\frac{CD}{DE} = \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE}$

$$\frac{AC}{AE} = \frac{CF}{FE} = \frac{7}{20}; AC = \frac{7}{20} AE \quad AD = \sqrt{AC \cdot AE} = AE \cdot \sqrt{\frac{7}{20}}$$

$$\frac{CD}{DE} = \frac{AD}{AE} = \frac{AE \cdot \sqrt{\frac{7}{20}}}{AE} = \sqrt{\frac{7}{20}}$$

Умножим: $\frac{(500-120) \cdot (500-120-1) \cdot (500-120-2) \cdot (500-120-3) \cdot (500-120-4) \cdot (500-120-5) \cdot (500-120-6)}{(500-120-7) \cdot (500-120-8) \cdot (500-120-9) \cdot (500-120-10) \cdot (500-120-11) \cdot (500-120-12)}$

$$60 \cdot 500 \cdot (60-500-1) \cdot (60-500-2) \cdot (60-500-3) = \frac{f}{2^4}$$

$$120 \cdot 250 \cdot (120-250-1) \cdot (120-250-2) \cdot (120-250-3) = \frac{f}{2^4}$$

$$500 \cdot 120 \cdot (250-120-1) \cdot (250-120-2) \cdot (250-120-3) \cdot (250-120-4) \cdot (250-120-5) \cdot (250-120-6) \cdot (250-120-7) \cdot (250-120-8) \cdot (250-120-9) \cdot (250-120-10) \cdot (250-120-11) \cdot (250-120-12)$$

$$3f = 250 \cdot 120 \cdot (250-60-1) =$$

$$= 3 \cdot 500 \cdot 120 \cdot (500-120-2) \cdot (500-120-4) \cdot (500-120-6) \cdot$$

$$= \frac{500 \cdot 120 \cdot (500-120-4)^2 \cdot 500 \cdot 120 \cdot (500-120-4)}{2^4} \cdot (3/500-120-2) \cdot$$

$$\cdot (500-120-6-1)$$

$a < b$; $b-a \neq 3$; $(a-c)(b-c) = p^2$, p - простое $\Rightarrow \begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \\ a-c=p \\ b-c=p^2-1 \end{cases}$

$$c = a-1 \quad b-a$$

$$c = b-p^2 = a-1$$

$$b-a = p^2-1 = (p-1)(p+1) \quad \begin{cases} p-1 \neq 3 \\ p+1 \neq 3 \end{cases} \Rightarrow p=3, \Rightarrow p=3, \Rightarrow (a-c)(b-c)=9$$

$$c = a-1; \quad c = b-9; \quad b-a = 9-1 = 8; \quad b = a+8$$

$$a^2 + b = 1000, \quad a^2 + 9a + 8 = 1000; \quad a^2 + a - 992 = 0; \quad a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4 \cdot 992}}{2} =$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{3969}}{2} = \frac{-1 \pm 63}{2} = \begin{cases} 31 \\ -32 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 39 \\ b = -24 \end{cases} \quad \begin{cases} c = 30 \\ c = -35 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$S = 4; \quad \frac{\sqrt{10}^2}{4} = 4; \quad a = \frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{3}}$$



$$S_{\text{бок}} = 6 = \frac{1}{2} h \cdot (a - x) \cdot a$$

$$= \frac{2h - x}{2} a$$



$$5 = (2,4 - x) \cdot \frac{4\sqrt{3}}{2} = 9,6 - 2\sqrt{3}x$$

$$2\sqrt{3}x = 9,6 - 5 = 4,6$$

$$x = \frac{4,6}{2\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{3} \cdot 5 = (6 - x) \cdot a$$

$$5\sqrt{3} = 6a - ax$$

$$6a = \frac{5\sqrt{3} + ax}{1}$$

$$6 = \frac{5\sqrt{3} + ax}{a}$$

$$V = h \cdot S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2} \cdot a \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 h$$

$$S = \frac{a^2}{2} + \frac{S_{\text{бок}}}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{2h}{\sqrt{3}} + 2,5$$

$$\frac{2h}{\sqrt{3}} = 6 - 2,5 = 3,5$$

$$5 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{4} - x \right) \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = 2 - x \cdot \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$x \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = 2 - 5 = -3$$

$$x \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = 2; \quad x = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$V = h \cdot S = \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot x = \frac{2\sqrt{3}}{4} \cdot 4 - \frac{1}{3} \cdot \frac{16}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3} \sqrt{3} = \frac{4}{3} \sqrt{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1; \sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x = (\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot \cos x - 2\sin^2 x \cos x = \\ &= \cos x (\cos^2 x - 2\sin^2 x) = \cos x (4\cos^2 x - 3) = 4\cos^3 x - 3\cos x \end{aligned}$$

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 12 \cos^2 x - 6 + 3p \cos x + 12 \cos x + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0$$

$$p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$$

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos x + 1)^3 = 0$$

$$\left(\sqrt[3]{p-1} \cos x + \cos x + 1 \right) \left(\sqrt[3]{p-1} \cos^2 x + \sqrt[3]{p-1} \cos x (\cos x + 1) + (\cos x + 1)^2 \right) = 0$$

$$\left(\sqrt[3]{p-1} \cos x + 1 \right) \cos x = -1$$

$$\left(\sqrt[3]{p-1}^2 - \sqrt[3]{p-1} + 1 \right) \cos^2 x - \left(\sqrt[3]{p-1} + 2 \right) \cos x + 1 = 0$$

$$\begin{cases} \cos x = -\frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \\ \sqrt[3]{p-1} + 1 \neq 0 \Rightarrow p \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 3969 \\ 61 \\ \hline 9039 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 84 \\ \times 1024 \\ \hline 4096 \end{array}$$

~~используем~~
Решим для $p=0$ в исходном урав.

$$\left(\sqrt[3]{0-1}^2 - \sqrt[3]{0-1} + 1 \right) \cos^2 x - \left(\sqrt[3]{0-1} + 2 \right) \cos x + 1 = 0$$

$$(1 + 1) \cos^2 x - (2 - 1) \cos x + 1 = 0$$

$$3 \cos^2 x - \cos x + 1 = 0$$

$$\cos x \in \left[\frac{1 \pm \sqrt{1-12}}{6} \right] = \left[\frac{1 \pm \sqrt{-11}}{6} \right] \Rightarrow \text{нет решений} \Rightarrow$$

$p \neq 0$

$$\left(\sqrt[3]{p-1}^2 - \sqrt[3]{p-1} + 1 \right) \cos^2 x - \left(\sqrt[3]{p-1} + 2 \right) \cos x + 1 = 0$$

$$\cos x = \frac{\sqrt[3]{p-1} + 2 \pm \sqrt{\left(\sqrt[3]{p-1} + 2 \right)^2 - 4 \left(\sqrt[3]{p-1}^2 - \sqrt[3]{p-1} + 1 \right)}}{2 \left(\sqrt[3]{p-1}^2 - \sqrt[3]{p-1} + 1 \right)}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{p-1} + 2 \pm \sqrt{-3\sqrt[3]{p-1}^2 + 5\sqrt[3]{p-1}}}{2 \left(\sqrt[3]{p-1}^2 - \sqrt[3]{p-1} + 1 \right)}$$

$$D = \sqrt[3]{p-1}^2 (8 - 3\sqrt[3]{p-1}) \geq 0$$

$$\begin{cases} p=1 \\ \sqrt[3]{p-1} \leq \frac{256}{27} \\ p < 8 \\ p-1 \geq \frac{256}{27} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=1 \\ \sqrt[3]{p-1} \leq \frac{283}{27} \\ p < 8 \\ p \geq \frac{283}{27} > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p=1 \\ \sqrt[3]{p-1} \leq \frac{283}{27} \\ p < 8 \\ p \geq \frac{283}{27} \end{cases} \Rightarrow 1 \leq p \leq \frac{283}{27}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$k^2 \sqrt{(25x+34)(3x+2)} = 2-x$ $x \in [-\frac{2}{3}, -\frac{34}{25}, 2]$

$k^2 \sqrt{(25x+34)(3x+2)} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^2}}$ $25x+34 \geq 0$

$k^2 \cdot \frac{(3x+2)^2}{4} = 1$ $x \geq -\frac{34}{25}$

$k = \pm \sqrt{\frac{4}{(3x+2)^2}}$ $3x+2 \geq 0$

$x \geq -\frac{2}{3}$ $x \geq -\frac{2}{3}$

$\sqrt{\frac{(25x+34)(3x+2)}{|3x+2|}} = 2-x = \sqrt{25x+34}$ $25x+34 \leq 0$

$4 - 2x + x^2 = 25x + 34$ $2(3x+2) \leq 0$

$2 \geq x \geq -\frac{2}{3}$ $x \geq -\frac{2}{3}$

$4 - 2x + x^2 = 25x + 34$ $x \leq -\frac{2}{3}$

$x^2 - 27x - 30 = 0$ $x \leq -\frac{2}{3}$

$x = \frac{27 \pm \sqrt{849}}{2}$ $x \leq -\frac{2}{3}$

$\frac{34}{25} \geq x$ $x \leq -\frac{2}{3}$

$4 - 2x + x^2 = -25x - 34$ $x \leq -\frac{2}{3}$

$x^2 + 23x + 38 = 0$ $x \leq -\frac{2}{3}$

$x = \frac{-23 \pm \sqrt{529 - 152}}{2} = \frac{-23 \pm \sqrt{377}}{2}$ $x \leq -\frac{2}{3}$

$\frac{27 - \sqrt{849}}{2} < -\frac{2}{3}$ $x \leq -\frac{2}{3}$

$\frac{\sqrt{849} - 27}{2} > -\frac{2}{3}$ $x \leq -\frac{2}{3}$

$\frac{27 + \sqrt{849}}{2} > -\frac{2}{3}$ $x \leq -\frac{2}{3}$

$\frac{27 - \sqrt{849}}{2} > -\frac{2}{3}$ $x \leq -\frac{2}{3}$

$\frac{27 + \sqrt{849}}{2} > -\frac{2}{3}$ $x \leq -\frac{2}{3}$

$\sqrt{377} < \sqrt{400} = 20$ $x \leq -\frac{2}{3}$

$-23 + \sqrt{377} < -3$ $x \leq -\frac{2}{3}$

$\frac{-23 + \sqrt{377}}{2} < -\frac{3}{2} < -\frac{34}{25} < -\frac{34}{25} < -\frac{34}{25}$ $x \leq -\frac{2}{3}$