



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен

$$\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}, \text{ двенадцатый член равен } 2 - x, \text{ а восемнадцатый член равен } \sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}, \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

Пусть k - коэффициент, на который умножается каждый следующий член прогрессии.

Тогда a_i - i -ый член такой прогрессии, тогда

$$a_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}; a_{12} = 2-x; a_{18} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$$

$$a_{12} = a_{11} \cdot k = a_{10} \cdot k^2 = k^2 \cdot \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$$

$$a_{18} = a_{16} \cdot k = a_{15} \cdot k^2 = a_{14} \cdot k^3 = a_{13} \cdot k^4 = a_{12} \cdot k^5 = a_{11} \cdot k^6 = a_{10} \cdot k^8 = k^8 \cdot \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$$

$$(25x+34)(3x+2) \geq 0, \Rightarrow \begin{cases} 25x+34 \geq 0 \\ 3x+2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{34}{25} \\ x \geq -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25x+34 \leq 0 \\ 3x+2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{34}{25} \\ x \leq -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{2}{3} \\ x \leq -\frac{34}{25} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{12} = 2-x \\ a_{18} = k^8 \cdot \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \end{cases} \text{ и } \begin{cases} k^2 \geq 0 \\ \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \geq 0, \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2-x \geq 0, \Rightarrow x \leq 2$$

$$\begin{cases} a_{18} = k^8 \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \\ a_{18} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k^8 \sqrt{(25x+34)(3x+2)} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 25x+34=0 \\ k^8 = \frac{1}{(3x+2)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{34}{25} \\ k = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{13x+21}} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Если } x = -\frac{34}{25}, \text{ то } a_{10} = \sqrt{(25 \cdot (-\frac{34}{25}) + 34)(3 \cdot (-\frac{34}{25}) + 2)} = \sqrt{0 \cdot (3 \cdot (-\frac{34}{25}) + 2)} =$$

$$= \sqrt{0} = 0, \text{ тогда } \begin{cases} a_{12} = a_{10} \cdot k^2 = 0 \cdot k^2 = 0 \\ a_{12} = 2 - (-\frac{34}{25}) = 2 + \frac{34}{25} = \frac{84}{25} \end{cases} \text{ — невозможно,}$$

значит, $k = \pm \sqrt{\frac{1}{13x+21}}; \quad x \neq -\frac{34}{25}$

$$a_{12} = k^2 \sqrt{(25x+34)(3x+2)} = \sqrt{\frac{1}{13x+21} \cdot (25x+34)(3x+2)} =$$

$$= \sqrt{|25x+34|}$$

$$a_{12} = 2 - x, \Rightarrow \quad 2 - x = \sqrt{|25x+34|}, \Rightarrow \quad 4 - 2x + x^2 = |25x+34|$$

$$\text{Если } x \in [-\frac{2}{3}; 2], \text{ то } 4 - 2x + x^2 = 25x + 34$$

$$\text{Если } x \in (-\infty; -\frac{34}{25}), \text{ то } 4 - 2x + x^2 = -25x - 34$$

$$\begin{cases} x^2 - 27x - 30 = 0 \\ x \in [-\frac{2}{3}; 2] \\ x^2 + 23x + 38 = 0 \\ x \in (-\infty; -\frac{34}{25}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{27 \pm \sqrt{729 + 120}}{2} = \frac{27 \pm \sqrt{849}}{2} \\ x \in [-\frac{2}{3}; 2] \\ x = \frac{-23 \pm \sqrt{529 - 152}}{2} = \frac{-23 \pm \sqrt{377}}{2} \\ x \in (-\infty; -\frac{34}{25}) \end{cases}$$

Получили, попали ли корни в диапазоны.

$$\frac{27 + \sqrt{849}}{2} = 13,5 + \frac{\sqrt{849}}{2} > 13 > 2 \text{ — не попал.}$$

$$\frac{27 - \sqrt{849}}{2} < \frac{27 - \sqrt{841}}{2} = \frac{27 - 29}{2} = -1 < -\frac{2}{3} \text{ — не попал.}$$

$$\frac{-23 - \sqrt{377}}{2} = -11,5 - \frac{\sqrt{377}}{2} < -11 < -\frac{34}{25} \text{ — попал}$$

$$\frac{-23 + \sqrt{377}}{2} < \frac{-23 + \sqrt{900}}{2} = \frac{-23 + 30}{2} = 1,5 \neq -\frac{150}{100} = -\frac{37,5}{25} < -\frac{34}{25} \text{ — не попал.}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{-23 + \sqrt{377}}{2}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1; \sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x =$$

$$= (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - 2\sin^2 x \cos x = \cos x (\cos^2 x - 3\sin^2 x) =$$

$$= \cos x (4\cos^2 x - 3) = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$(4p \cos^3 x - 3p \cos x) + 6(2\cos^2 x - 1) + 3p \cos x + 12 \cos x + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0$$

$$p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$$

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos x + 1)^3 = 0$$

Если $p=0$, то уравнение примет вид

$$3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$$

его дискриминант равен $9-12=-3 < 0$ - нет корней, а при $p \neq 0$ уравнение становится

кубическим, а у любого уравнения нечётной

степени либо нет корней, либо 1 корень, то есть

$p=0$ не подходит.

подходят все p , кроме 0.

Решим уравнение при ненулевом p

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos x + 1)^3 = 0$$

$$(\sqrt[p]{p-1} \cos x + \cos x + 1)(\sqrt[p]{p-1}^2 \cos^2 x + \sqrt[p]{p-1} \cos x (\cos x + 1) + (\cos x + 1)^2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt[p]{p-1} \cos x + \cos x + 1 = 0 \\ \sqrt[p]{p-1}^2 \cos^2 x + \sqrt[p]{p-1} \cos x (\cos x + 1) + (\cos x + 1)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sqrt[p]{p-1} \cos x + \cos x + 1 = 0 \\ \sqrt[p]{p-1}^2 \cos^2 x + \sqrt[p]{p-1} \cos x (\cos x + 1) + (\cos x + 1)^2 = 0 \end{cases}$$



1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \cos x &= -\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1} \\ \left(\sqrt[3]{p-1}^2 - \sqrt[3]{p-1} + 1 \right) \cos^2 x - \left(\sqrt[3]{p-1} - 2 \right) \cos x + 1 &= 0 \\ \cos x &= \frac{\sqrt[3]{p-1} - 2 \pm \sqrt{\sqrt[3]{p-1}^2 - 4\sqrt[3]{p-1} + 4 - 4\sqrt[3]{p-1}^2 + 4\sqrt[3]{p-1} - 4}}{2(\sqrt[3]{p-1}^2 - \sqrt[3]{p-1} + 1)} = \\ &= \frac{\sqrt[3]{p-1} - 2 \pm \sqrt{-3\sqrt[3]{p-1}^2}}{2(\sqrt[3]{p-1}^2 - \sqrt[3]{p-1} + 1)} \end{aligned}$$

Это есть дискриминант. Это такое уравнение равно

$$D = -3\sqrt[3]{p-1}^2, \text{ но } \sqrt[3]{p-1}^2 \geq 0, \Rightarrow -3\sqrt[3]{p-1}^2 \leq 0, \Rightarrow D \geq 0 \text{ только}$$

$$\begin{aligned} \text{при } p-1=0; \Rightarrow p=1, \Rightarrow \cos x &= \frac{\sqrt[3]{1-1} - 2 \pm \sqrt{-3\sqrt[3]{1-1}^2}}{2(\sqrt[3]{1-1}^2 - \sqrt[3]{1-1} + 1)} = \\ &= \frac{-2 \pm 0}{2} = -1 - \text{подходит} \end{aligned}$$

Но мы знаем, что есть квадратное уравнение будет иметь решение только при $p=1$

$$\begin{aligned} \text{Вспомогательное, что } \cos x \in [-1; 1], \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1} \in [-1; 1] \\ -\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1} \geq -1, \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{p-1}+1 \geq 0 \\ -1 \geq \sqrt[3]{p-1}+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{p-1}+1 \geq 0 \\ \sqrt[3]{p-1} \leq -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{p-1} \geq 0 \\ \sqrt[3]{p-1} \leq -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p-1 \geq 0 \\ p-1 \leq -8 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p-1 \geq 0 \\ p-1 \leq -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \geq 1 \\ p \leq -7 \end{cases}$$

Когда подходит $p \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$

$$-\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1} \leq 1, \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{p-1}+1 \geq 0 \\ \sqrt[3]{p-1}+1 \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{p-1} \geq 0-1 \Rightarrow \\ \sqrt[3]{p-1} \leq -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p-1 \geq -1 \\ p-1 \leq -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \geq 0 \\ p \leq -7 \end{cases}$$

Когда подходит $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$ и.к.
 $p=0$ не подходит.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

При всех $p \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$ будут

корни $\cos x = -\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1}$, а при $p=1$ будет ещё корень

$$\cos x = -1$$

Ответ: $p \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$

При $p \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$ корни уравнения будут

$\cos x = -\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1}$, а при $p=1$ корни уравнения

$$\begin{cases} \cos x = -\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1} = -1 \Rightarrow \cos x = -1, \text{ то есть} \\ \cos x = -1 \end{cases}$$

при всех $p \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$ корни уравнения

$$\text{будут } \cos x = -\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1};$$

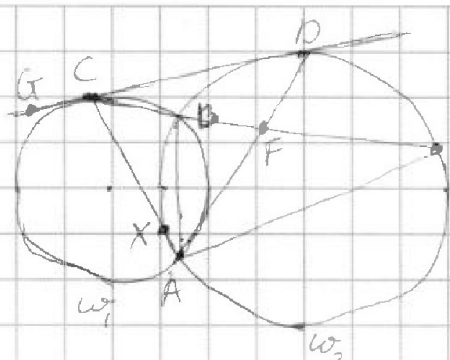
$$x = \pm \arccos \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1} \right) + 2\pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Задача 4

Пусть F — точка пересечения

AD и EC , тогда $\frac{CF}{FE} = \frac{7}{20}$

Проведём AB, AE, AC, AD .

$\angle CBA = \frac{1}{2} \widehat{CA} = \angle GCA$, где G — точка на дуге CD такая, что G и D лежат по разные стороны от точки C .

$\angle ABE = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \angle GCA = \angle ACD = \frac{1}{2}(\widehat{DE} + \widehat{AE} - \widehat{AD})$, где X — точка, симметричная C относительно

AC окружности ω_2 , тогда $\frac{1}{2} \widehat{XD} = \angle XAD = \angle CAD$,

$\frac{1}{2} \widehat{DE} = \angle DAE$; $\frac{1}{2} \widehat{AE} = \angle ABE$, $\Rightarrow \angle ABE = \frac{1}{2}(\widehat{DE} + \widehat{AE} - \widehat{XD}) =$
 $= \angle ABE + \angle DAE - \angle CAD, \Rightarrow \angle DAE - \angle CAD = \angle ABE - \angle ABE = 0, \Rightarrow$

AD — биссектриса $\angle CAE$, $\Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{CF}{FE} = \frac{7}{20}$; $AC = \frac{7}{20} AE$

$\angle CDA = \frac{1}{2} \widehat{CA} = \angle BEA, \Rightarrow \triangle CDA \sim \triangle AED$ ($\angle DAE = \angle DAC$,

$\angle CDA = \angle BEA$, т.к. CD — касательная, а $\angle BEA$ опирается на дугу $\widehat{DA}$), $\Rightarrow \frac{CD}{DE} = \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE}, \Rightarrow AD^2 = AE \cdot AC, \Rightarrow$

$\Rightarrow AD = \sqrt{AE \cdot AC} = \sqrt{AE^2 \cdot \frac{7}{20}} = AE \sqrt{\frac{7}{20}}, \Rightarrow$

$\frac{CD}{DE} = \frac{AD}{AE} = \frac{AE \sqrt{\frac{7}{20}}}{AE} = \sqrt{\frac{7}{20}}, \Rightarrow \frac{ED}{DC} = \sqrt{\frac{20}{7}}$

Ответ: $\frac{ED}{DC} = \sqrt{\frac{20}{7}}$.

$$(500, 120 - 6)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Посчитаем количество способов симметрично
горизонтальной срединной линии, ~~отражение~~
В данном случае мы можем выбрать первую
клетку 250·120 способами, ^{вторую} ~~следующую~~ 250·120-1 способами,
^{третью} ~~следующую~~ 250·120-2 способами, ^{четвертую} ~~следующую~~ 250·120-3
способами.

Ответ не получим в итоге!, так как не важен
порядок выбора клеток.

Получимся
$$\frac{250 \cdot 120 (250 \cdot 120 - 1) (250 \cdot 120 - 2) (250 \cdot 120 - 3)}{4!}$$

$$= \frac{500 \cdot 120 (500 \cdot 120 - 2) (500 \cdot 120 - 4) (500 \cdot 120 - 6)}{2^4 \cdot 4!}$$

Для симметричных относительно вертикали
аксиально получим количество способов
раскраски
$$\frac{500 \cdot 60 (500 \cdot 60 - 1) (500 \cdot 60 - 2) (500 \cdot 60 - 3)}{4!} = \frac{500 \cdot 60 \cdot 120 (500 \cdot 120 - 2) (500 \cdot 120 - 4) (500 \cdot 120 - 6)}{2^4 \cdot 4!}$$

~~Важно отметить~~
Однако мы не учли раскраски

Заметим, что если 8 клеток симметричны
по вертикали - то 2 из них могут быть симметричны
тогда они симметричны по первой симметрии



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

5 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Когда при симметрии ^{количества} путей путей способов
мы учитываем симметрию глазомера случая, когда
конфигурация симметрична по всем путям
симметрично, тогда вычитаем это число.

$$3 \cdot \frac{500 \cdot 120 \cdot (500 \cdot 120 - 2) \cdot (500 \cdot 120 - 4) \cdot (500 \cdot 120 - 6)}{2^4 \cdot 4!} - \frac{500 \cdot 120 \cdot (500 \cdot 120 - 4)}{2^4 \cdot 2} =$$

$$= \frac{500 \cdot 120 \cdot (500 \cdot 120 - 4)}{2^4} \left(\frac{3 \cdot (500 \cdot 120 - 2) \cdot (500 \cdot 120 - 4)}{4!} - 1 \right) =$$

$$= 3 \cdot \frac{500 \cdot 60 \cdot (500 \cdot 60 - 1) \cdot (500 \cdot 60 - 2) \cdot (500 \cdot 60 - 4)}{4!} - \frac{4! \cdot 500 \cdot 60 \cdot (500 \cdot 60 - 1)}{4!} =$$

$$\frac{(500 \cdot 60 - 2) \cdot (500 \cdot 60 - 3)}{(500 \cdot 60 - 1) \cdot (500 \cdot 60 - 3)} = 3 \cdot C_{30000}^4 - \frac{4!}{(500 \cdot 60 - 1) \cdot (500 \cdot 60 - 3)} \cdot C_{30000}^4 =$$

$$= 3 \cdot C_{30000}^4 \left(\frac{500 \cdot 60 \cdot 29998^2 - 1 - 8}{29998^2 - 1} \right) = 3 \cdot C_{30000}^4 \frac{(30000 + 3)(30000 - 3)}{(30000 - 3)(30000 - 1)} =$$

$$= 3 \cdot C_{30000}^4 \frac{30000 \cdot 3}{29999} = C_{30000}^4 \cdot \frac{90009}{29999}$$

$$\text{Ответ: } C_{30000}^4 \cdot \frac{90009}{29999}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

$$a, b, c, p \in \mathbb{Z}$$

$$(a-c)(b-c) = p^2, \text{ где } p - \text{ простое число, } \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \\ a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a+c = p \\ b-c = p \end{cases} - \text{невозможно, т.к. } b \neq a, \text{ т.к. } b > a$$

$$\begin{cases} a-c = -p \\ b-c = -p \end{cases} - \text{невозможно, т.к. } b \neq a, \text{ т.к. } b > a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \\ a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = a-1 \\ c = p^2 b \cdot p^2 \\ c = a+1 \\ c = b+p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b-p^2 = a-1 \\ c = a-1 \\ b+p^2 = a+1 \\ c = a+1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b-a = p^2-1 = (p-1)(p+1) \\ c = a-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b-a = p^2-1 = -(p-1)(p+1) \\ c = a+1 \end{cases}, \text{ но } b-a \not\equiv 3, \Rightarrow \begin{cases} p-1 \not\equiv 3 \\ p+1 \not\equiv 3, \Rightarrow p \not\equiv 3, \text{ т.к.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p \equiv 1 \\ p \equiv 2 \end{cases}$$

$$, \text{ а при делении на 3 есть все 3 остатка } \{0, 1, 2\}, \Rightarrow$$

$$p \equiv 0, \Rightarrow p \equiv 3, \text{ но } p - \text{ простое число, } \Rightarrow p = 3, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b-a = 8 \quad (p^2-1=8) \\ c = a-1 \\ b-a = 1-9 = -8 \\ c = a+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = a+8 \\ c = a-1 \\ b = a-8 \\ c = a+1 \end{cases}$$

$$\text{Но } a^2 + b = 1000, \Rightarrow \begin{cases} a^2 + a + 8 = 1000 \\ b = a+8 \\ c = a-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4 \cdot 992}}{2} \\ b = a+8 \\ c = a-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + a - 8 = 1000 \\ b = a-8 \\ c = a+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4 \cdot 1008+1}}{2} \\ b = a-8 \\ c = a+1 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a = \frac{-1 \pm \sqrt{63}}{2} \end{cases}$$

$$b = a + 8$$

$$c = a - 1$$

$$\begin{cases} a = \frac{-1 \pm \sqrt{63}}{2} \end{cases}$$

$$b = a + 8$$

$$c = a - 1$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} a = \frac{-1 + \sqrt{63}}{2} = 31 \end{cases}$$

$$b = a + 8 = 31 + 8 = 39$$

$$c = a - 1 = 30$$

$$\begin{cases} a = \frac{-1 - \sqrt{63}}{2} = -32 \end{cases}$$

$$b = a + 8 = -32 + 8 = -24$$

$$c = a - 1 = -32 - 1 = -33$$

Ответ: $\begin{cases} a = 31; b = 39; c = 30 \\ a = -32; b = -24; c = -33. \end{cases}$

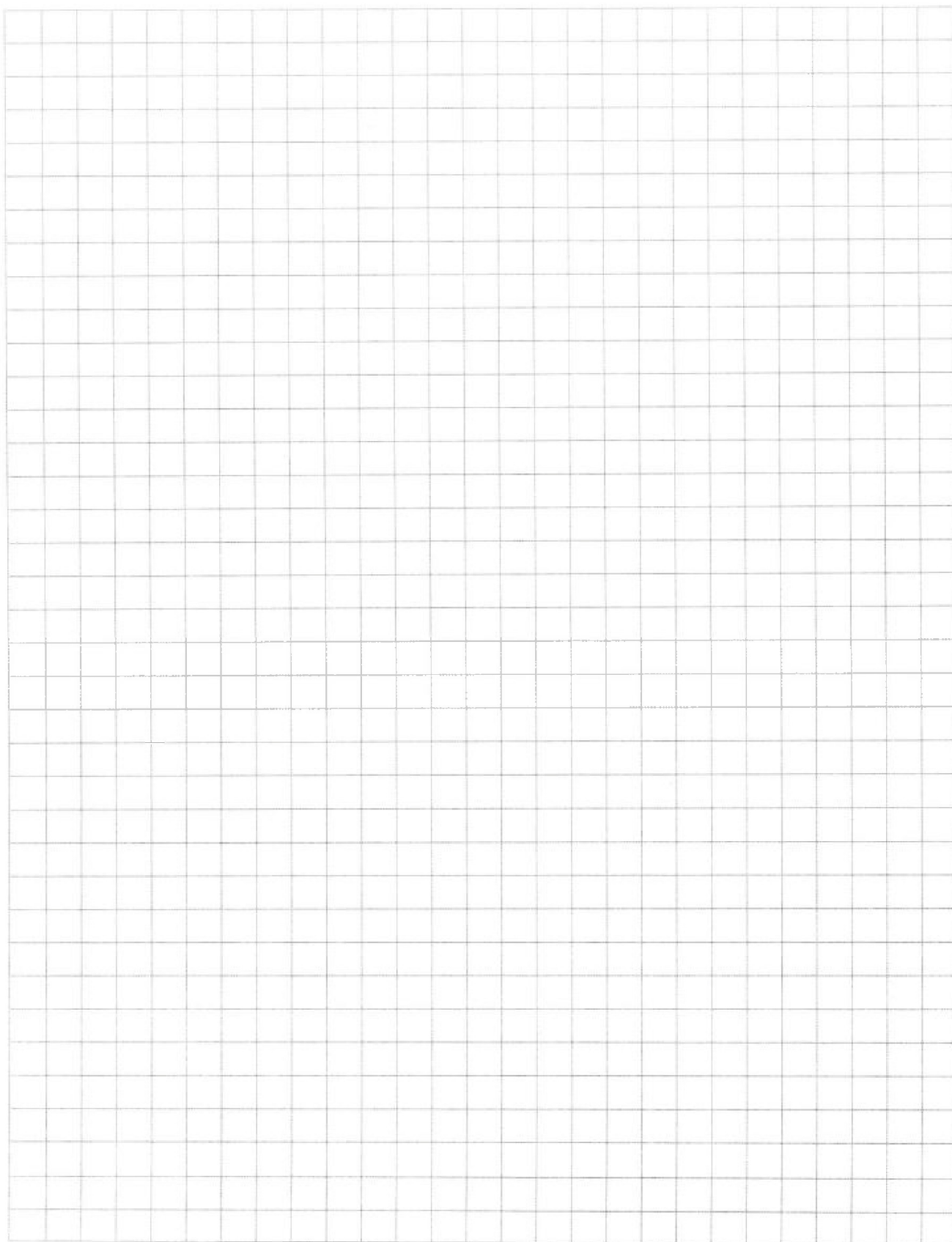


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



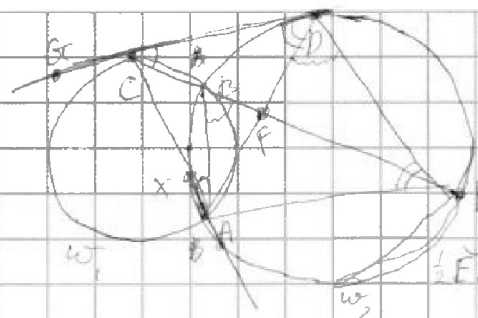


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{CAF}{FDE} = \frac{7}{20}$$

$$3969 + 4 \cdot 16$$

$$\begin{array}{r} 39 \\ \times 39 \\ \hline 136 \\ 1156 \\ \hline 1556 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \angle CBA &= \frac{1}{2} \widehat{CA} = \angle BCA = 180^\circ - \angle DCA \\ \frac{1}{2} \widehat{EA} &= \angle ABE = 180^\circ - \angle CBA = 180^\circ - (180^\circ - \angle PCA) = \\ &= \angle PCA = \frac{1}{2} (\widehat{DE} + \widehat{AE} - \widehat{DA}) = \\ &= \frac{1}{2} \widehat{AE} + \angle DAE - \angle DAC \\ \angle DAE - \angle DAC &= \frac{1}{2} \widehat{EA} - \frac{1}{2} \widehat{EA} = 0, \Rightarrow \end{aligned}$$

$$AD - \text{сис. } \angle A. \quad \frac{CD}{DE} = \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE}$$

$$\frac{AC}{AE} = \frac{CF}{FE} = \frac{7}{20}; AC = \frac{7}{20} AE$$

$$AD = \sqrt{AC \cdot AE} = AE \cdot \sqrt{\frac{7}{20}} \quad \frac{CD}{DE} = \frac{AD}{AE} = \frac{AE \cdot \sqrt{\frac{7}{20}}}{AE} = \sqrt{\frac{7}{20}}$$

$$\text{умнож.} \quad \frac{(500-120) \cdot (500-120-1) \cdot (500-120-2) \cdot (500-120-3) \cdot (500-120-4) \cdot (500-120-5) \cdot (500-120-6)}{2^4}$$

$$60 \cdot 500 \cdot (60-500-1) \cdot (60-500-2) \cdot (60-500-3) = \frac{f}{2^4}$$

$$120 \cdot 250 \cdot (120-250-1) \cdot (120-250-2) \cdot (120-250-3) = \frac{f}{2^4}$$

$$500 \cdot 250 \cdot 20 \cdot (250-120-1)$$

$$\begin{array}{r} 3969 \\ 1323 \\ \times 3 \\ \hline 1156 \end{array}$$

$$3f = 250 \cdot 120 \cdot (250-60-1) =$$

$$= 3 \cdot 500 \cdot 120 \cdot (500-120-2) \cdot (500-120-4) \cdot (500-120-6)$$

$$= \frac{500 \cdot 120 \cdot (500-120-4)^2 \cdot 500 \cdot 120 \cdot (500-120-4)}{2^4} \cdot (3(500-120-2) \cdot (500-120-6-1))$$

$$\begin{aligned} a < b, \quad b-a &\neq 3, \quad (a-c)(b-c) = p^2, \quad p - \text{простое} \Rightarrow \begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \\ a-c=p \\ b-c=p^2 \end{cases} \\ c &= a-1, \quad b-a \\ c &= b-p^2 = a-1 \\ b-a &= p^2-1 = (p-1)(p+1) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} p-1 \neq 3 \\ p+1 \neq 3 \end{cases} \Rightarrow p=3, \quad p=3 \Rightarrow (a-c)(b-c)=9$$

$$c = a-1, \quad c = b-9; \quad b-a = 9-1 = 8; \quad b = a+8$$

$$a^2 + 6 = 1000, \quad a^2 + 2a + 8 = 1000, \quad a^2 + a - 992 = 0, \quad a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4 \cdot 992}}{2}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{3969}}{2} = \frac{-1 \pm 63}{2} = \begin{cases} 31 \\ -32 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 39 \\ b = -24 \end{cases} \quad \begin{cases} c = 30 \\ c = -33 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$S = 4; \quad \frac{\sqrt{3} a^2}{4} = 4; \quad a = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4$$



$$S_1 = 6 = \frac{1}{2} b \cdot h - x \cdot a = \frac{1}{2} b \cdot h - x \cdot a$$

$$S_2 = 5 = (b - x) \cdot a = (b - x) \cdot 4$$
$$b = \frac{2S_1}{S_2} - \frac{12}{5} = 2,4$$

$$S_1 = 5 = (2,4 - x) \cdot 4 \cdot \sqrt{3} = 9,6\sqrt{3}$$

$$V = b \cdot S - \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a \cdot x = 2,4 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 14,4 - 4\sqrt{3}$$

$$S = \frac{ab}{2} + \frac{S_2}{2} = \frac{2,4 \cdot 6}{2} + 2,5 = 7,4$$

$$S = \left(\frac{2,4\sqrt{3}}{4} - x \right) \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = 7 - x \cdot \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$x \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = 2; \quad x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$V = b \cdot S - \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot x = \frac{2,4\sqrt{3}}{4} \cdot 4 - \frac{1}{3} \cdot \frac{16}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2,4\sqrt{3} - \frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{10}{3}\sqrt{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1; \sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos 3x = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x = (\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot \cos x - 2\sin^2 x \cos x = \\ = \cos x (\cos^2 x - 3\sin^2 x) = \cos x (4\cos^2 x - 3) = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 12 \cos^2 x - 6 + 3p \cos x + 12 \cos x + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0$$

$$p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$$

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos x + 1)^3 = 0$$

$$\left(\sqrt[3]{p-1} \cos x + \cos x + 1 \right) \left(\sqrt[3]{p-1} \cos^2 x + \sqrt[3]{p-1} \cos x (\cos x + 1) + (\cos x + 1)^2 \right) = 0$$

$$\left(\sqrt[3]{p-1} \cos x + 1 \right) \cos x = -1$$

$$\left(\sqrt[3]{p-1}^2 - \sqrt[3]{p-1} \right) + 1 \cos^2 x - \left(\sqrt[3]{p-1} + 2 \right) \cos x + 1 = 0$$

$$\begin{cases} \cos x = -\frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \\ \sqrt[3]{p-1} \pm 1 \neq 0 \Rightarrow p \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} +3969 \\ 61 \\ \hline 9039 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +84 \\ \times 1024 \\ \hline 4096 \end{array}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1}$$

Подставим $p=0$ в исходное урав.

$$\left(\sqrt[3]{0-1}^2 - \sqrt[3]{0-1} + 1 \right) \cos^2 x - \left(\sqrt[3]{0-1} + 2 \right) \cos x + 1 = 0$$

$$(1 + 1 + 1) \cos^2 x - (-2 - 1) \cos x + 1 = 0$$

$$3 \cos^2 x - \cos x + 1 = 0$$

$$\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1-12}}{6} \quad D = 9 - 4 \cdot 3 = -9 < 0 \text{ - нет корней, } \Rightarrow$$

$$p \neq 0$$

$$\left(\sqrt[3]{p-1}^2 - \sqrt[3]{p-1} + 1 \right) \cos^2 x - \left(\sqrt[3]{p-1} + 2 \right) \cos x + 1 = 0$$

$$\cos x = \frac{\sqrt[3]{p-1} + 2 \pm \sqrt{\left(\sqrt[3]{p-1} + 2 \right)^2 - 4 \left(\sqrt[3]{p-1}^2 - \sqrt[3]{p-1} + 1 \right)}}{2 \left(\sqrt[3]{p-1}^2 - \sqrt[3]{p-1} + 1 \right)}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{p-1} + 2 \pm \sqrt{-3\sqrt[3]{p-1}^2 + 5\sqrt[3]{p-1}}}{2(\sqrt[3]{p-1}^2 - \sqrt[3]{p-1} + 1)}$$

$$D = \sqrt[3]{p-1}^2 (8 - 3\sqrt[3]{p-1}) \geq 0$$

$$\begin{cases} p=1 \\ \sqrt[3]{p-1} \leq \frac{256}{27} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=1 \\ p \leq \frac{283}{27} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p < 1 \\ p-1 \geq \frac{256}{27} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p < 1 \\ p \geq \frac{283}{27} > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p=1 \\ 1 < p \leq \frac{283}{27} \end{cases} \Rightarrow 1 \leq p \leq \frac{283}{27}$$

