



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен

$\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$, десятый член равен $x+4$, а двенадцатый член равен $\sqrt{(15x+6)(x-3)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 820$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1 (страница 1 из 2)

$$b_4 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} = b_1 \cdot q^3 \quad * \quad x \neq 3$$

$$b_{10} = x+4 = b_1 \cdot q^9$$

$$b_{12} = \sqrt{(15x+6)(x-3)} = b_1 \cdot q^{14}$$

$$q^8 = \frac{b_{12}}{b_4} = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}} = \sqrt{\frac{(15x+6)(x-3)(x-3)^3}{(15x+6)}}$$

$$= \cancel{x-3} \sqrt{(x-3)^4} = |(x-3)^2| = (x-3)^2$$

$$q^2 = \frac{b_{12}}{b_{10}} = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4} \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \quad q^2 = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4}$$

$$q^8 = \frac{((15x+6)(x-3))^2}{(x+4)^4}$$

$$\cancel{(x-3)^2} = \frac{(15x+6)^2 \cancel{(x-3)^2}}{(x+4)^4} : (x-3)^2 \neq 0$$

$$(x+4)^4 = (15x+6)^2$$

$$((x+4)^2)^2 - (15x+6)^2 = 0$$

$$((x+4)^2 - (15x+6))((x+4)^2 + (15x+6)) = 0$$

$$(x^2 + 8x + 16 - 15x - 6)(x^2 + 8x + 16 + 15x + 6) = 0$$

$$(x^2 - 7x + 10)(x^2 + 23x + 22) = 0$$

$$\frac{15x+6}{(x-3)^3} \geq 0$$

$$(15x+6)(x-3) \geq 0$$

На $15x+6$ и $x-3$
нельзя сократить, ибо
если $15x+6=0$, то
 $b_4=0$
 $b_{10} \neq 0 = -\frac{6}{15} + 4 \neq 0$,
это неважно.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1 (страница 2 из 2)

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 10 = 0 \\ x^2 + 23x + 22 = 0 \end{cases}$$

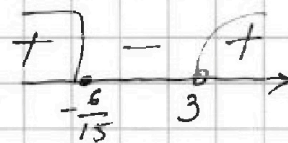
$$\begin{cases} (x-5)/(x-2) = 0 \\ (x+22)/(x+1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ x = 2 \\ x = -22 \\ x = -1 \end{cases}$$

Осталось учесть, что

$$\frac{15x+6}{(x-3)^3} \geq 0$$

$$(15x+6)(x-3) \geq 0$$



$x = 5$ - подх.

$x = 2$ - не подх.

$x = -22$ - подх.

$x = -1$ - подх.

Еще одно замечание:

$b_{10} = b_4 \cdot q$ даже если $q < 0$, то $q > 0$, то есть b_{10} и b_4 - одной знака. Но $b_4 > 0$, то есть $b_{10} > 0$.

Рв $b_{10} > 0$, то $x+4 > 0$. $x > -4$

Так отбрасывается $x = -22$.

Остаётся $x = 5$
 $x = -1$

Ответ: $\{-1; 5\}$



1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

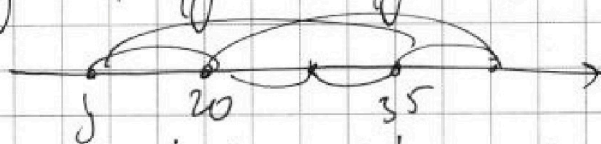
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ страницы 1 из 2

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2} + 2$$

$$\begin{cases} |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} \end{cases}$$

$$|y-20| + |y-35| + |y-35| = \sqrt{225-z^2}$$



$$|y-20| + |y-35| \geq 15 \Leftrightarrow |y-20| + 2|y-35| \geq 15.$$

$$0 \leq \sqrt{225-z^2} \leq 15.$$

Но тогда это возможно только если

$$\begin{cases} |y-20| + 2|y-35| \geq 15 \quad (1) \\ \sqrt{225-z^2} = 15 \end{cases}$$

$$(1) \text{ если } y \leq 20, \text{ то } |y-20| + 2|y-35| > 15$$

$$20 \leq y < 35, \text{ то } |y-20| + |y-35| \geq 15 \text{ и } |y-35| < 0 \text{ } \Rightarrow > 15.$$

$$y = 35: |y-20| + 2|y-35| = 15.$$

$$y > 35: |y-20| + 2|y-35| > 15.$$

$$(y = 35).$$

$$\sqrt{225-z^2} = 15 \Leftrightarrow z = 0.$$

Остаётся найти x .

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = \sqrt{35-2x-x^2}$$

$$(x+7)(5-x) = 5x - x^2 + 35 - 7x = 35 - 2x - x^2.$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} = t \geq 0 \\ \sqrt{5-x} = 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$t - 2 + 6 = \sqrt{t^2 - 2^2}$$

$$t - 2 + 6 = |t-2|$$

$$t - 2 + 6 - 2 = 0$$

$$t = 2$$

$$t^2 - 2^2 = x+7+5-x = 12$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2 страница 2 из 2

$$t - v + 6 = tv$$

$$t(1-v) = v-6$$

$$t = \frac{v-6}{1-v} = -\frac{6-v}{1-v} = -\left(\frac{5}{1-v} + 1\right)$$

$$\sqrt{x+7} = -1 - \frac{5}{1-\sqrt{5-x}}$$

(если $1 - \sqrt{5-x} = 0$, то $x = -6$, $v = 1$, то $v-6 \neq 0$)

$$t - v + \frac{t^2 + v^2}{2} = tv \quad | \cdot 2$$

$$t - 2v + (t-v)^2 = 0$$

$$(t-v)(t-v+2) = 0$$

$$\begin{cases} t=v \\ t=v-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} = \sqrt{5-x} \\ \sqrt{x+7} = \sqrt{5-x} - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+7 = 5-x \\ \sqrt{x+7} + 2 = \sqrt{5-x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = -2 \\ x+7 + 4\sqrt{x+7} + 4 = 5-x \end{cases}$$

$$x = -1$$

$$(2) 2x+6 = 4\sqrt{x+7}$$

$$x+3 = \sqrt{x+7}$$

$$(x+3)^2 = x+7$$

$$x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 = 25 - 8 = 17$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x = -\frac{5 + \sqrt{17}}{2}$$

$$\sqrt{17} > \sqrt{16}$$

$$-\frac{5 + \sqrt{17}}{2} < -\frac{5 + \sqrt{16}}{2} < -3$$

$$-\frac{5 - \sqrt{17}}{2} < -\frac{5 - \sqrt{16}}{2}$$

Ответ: $\{(-1; 35; 0); (-\frac{5 + \sqrt{17}}{2}; 35; 0)\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

При $p \in [-10; 4]$:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



2



3



4



5



6



7



СТРАНИЦА

__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$\cos 3x - 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

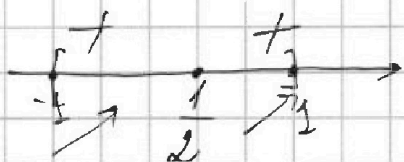
$$4 \cos^3 x - 3 \cos x - 3(2 \cos^2 x - 1) + 6 \cos x = p$$

$$4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 = p$$

Рассмотрим функцию $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x + 3$
и исследуем её на $[-1; 1]$

$$f'(x) = 12x^2 - 12x + 3 = 3(4x^2 - 4x + 1) = 3(2x - 1)^2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(2x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$



$$f(-1) = 4 \cdot (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 3 = -4 - 6 - 3 + 3 = -10$$

$$f(1) = 4 - 6 + 3 + 3 = 4.$$

Гало быть, при любой $p \in [-10; 4]$

$f(x) = p$ имеет 1 решение, при $x \in [-1; 1]$

А теперь $f(\cos x) = p$. Поскольку $\cos x \in [-1; 1]$,
то и ур-ие $f(\cos x) = p$ имеет хотя бы 1 решение,
при любом $p \in [-10; 4]$

$$\begin{aligned} TC^2 &= TB \cdot TA' \\ TD^2 &= TB \cdot TA \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} TC = TD$$

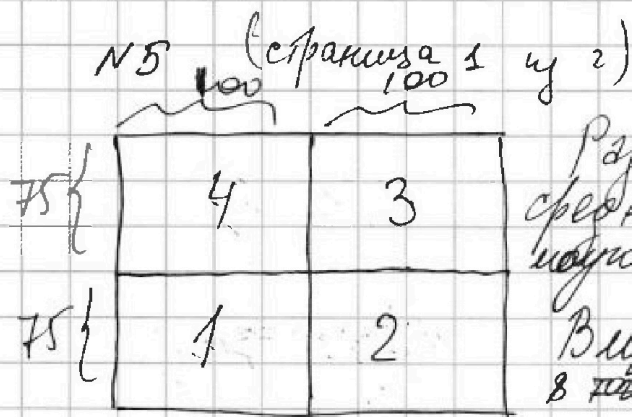


1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Разобьем прямоугольник средними линиями на 4 прямоугольника, как на рисунке.

Вместо того, чтобы закрашивать 8 клеток, закрашим 4, а дальше применим нужную симметрию.

Случай 1: все закрашенные клетки — в одном прямоугольнике (далее 2-й который 75×100)

И выбрать их C_{750}^4 . Далее есть 3 варианта, как их отразить: относительно вертик. ср. линии, горизонт. и отн. центра. То есть, $3 \cdot C_{750}^4$

Случай 2: Замечание: эти 4 клетки мы выбираем в 1-ом 75×100 прямоугольнике. Поскольку нас интересуют симм. расклады, то выбирая 4 клетки в 3 и 4 бессмысленно, ибо они уже есть в 1 и 2.

Аналогично для прямоугольника 2: тоже $3 \cdot C_{750}^4$. Только нужно вычесть случай отражения в 1-ый. То есть, $2 \cdot C_{750}^4$. Итого, для 1-го случая: $6 \cdot C_{750}^4$ *

Случай 2: 2.1) в 1-ом — 3, во 2-ом — 1. Тогда возможны только симм. от верт. и центра. Способов выбрать 4 клетки так: $C_{750}^3 C_{750}^1$. 2 симметрии $\rightarrow 2 \cdot C_{750}^3 C_{750}^1$

Аналогично во 1-ом — 1, во 2-ом — 3. Получаем те же $2 \cdot C_{750}^3 C_{750}^1$. Итого, суммарно — $4 \cdot C_{750}^3 C_{750}^1$

2.2) в 1-ом и 2-ом по 2 клетки. Способов их так выбрать: $C_{750}^2 C_{750}^2$. И можно отразить 2-мя способами. Но! При определенном раскладе эти симметрии могут совпасть когда 4 точки получившиеся симметричны. Таких случаев C_{750}^2 . Вычтем их и получим $(C_{750}^2 C_{750}^2 - C_{750}^2) \cdot 2 + C_{750}^2$

* + если все 4 точки — в 4-ом и симметричны в 3.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

NS (страница 2 из 2)

Итого: 1) все 4 клетки в одном-прямоуг.: $6 \cdot C_{7500}^4$

2) 1) 1 клетка в 1-ом, 3-во 2-ом: $2 \cdot C_{7500}^3 \cdot C_{7500}^1$

2) 3 клетки в 1-ом, 1-во 2-ом: $2 \cdot C_{7500}^3 \cdot C_{7500}^1$

3) 1 клетка в 1-ом, 3-во 4-ом: $2 \cdot C_{7500}^3 \cdot C_{7500}^1$

4) 3 клетки в 1-ом, 1-во 4-ом: $2 \cdot C_{7500}^3 \cdot C_{7500}^1$

но надо понимать, что при центр. симм. в

сл. 3) и 4) мы углы меньший, углы в сл. 1) и 2)

Итого, для 2) $6 \cdot C_{7500}^3 \cdot C_{7500}^1$

3) 1) 2 в 1-ом, 2-во 2-ом: $(C_{7500}^2 \cdot C_{7500}^2 - C_{7500}^2) \cdot 2 + C_{7500}^2$

2) 2 в 1-ом, 2-во 4-ом: $(C_{7500}^2 \cdot C_{7500}^2 - C_{7500}^2) \cdot 2$

(аналогично, как в 1), только слуга полой симметрии уже не учитываем).

Итого: $6 \cdot C_{7500}^4 + 6 \cdot C_{7500}^3 \cdot C_{7500}^1 + 4 \cdot (C_{7500}^2)^2 - 3C_{7500}^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 6

$$a-b \equiv 1 \pmod{3}:$$

$$(a-c)(b-c) = ab - ac - bc - c^2 =$$

$$= ab - c^2 - c(a+b)$$

Если $a < b$ $a > b$, то $a-c > b-c$.

Следовательно $(a-c)$ и $(b-c)$ — 2 разных числа.
Но тогда, чтобы это был квадрат простого,
надо, чтобы один из них был квадратом простого,
а другой — 1.

$$\boxed{a-c=1: b-c=p^2}$$

$$a-c-(b-c) = 1-p^2$$

$$a-b = 1-p^2 < 0. \text{ противоречие.}$$

$$\boxed{b-c=1 \quad a-c=p^2}$$

$$p^2 - 1 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$p^2 - 1 \equiv 2 \pmod{3}$$

$$\begin{cases} p^2 = 3k+2 \\ p^2 = 3k+3 \end{cases}$$

$$p^2 = 3 \cdot (k+1) \Rightarrow k=2.$$

$$p=3 \quad \begin{cases} b-c=1 \\ a-c=9 \end{cases}$$

$$a-b=8$$

$$a+b^2=820 \dots$$

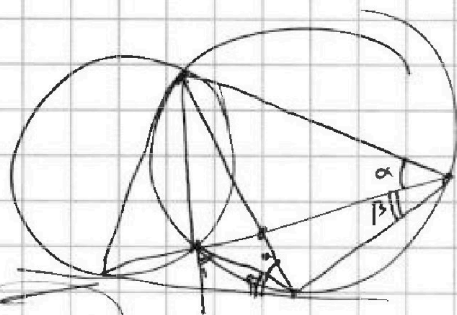


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





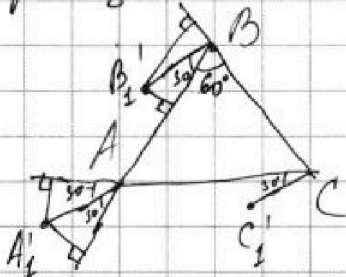
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 7
страница 2



$$h_{AA_1C_1C} = h_{AA_1B_1B} = \frac{5}{2} = 2,5 = \sqrt{h_{прямой}^2 + r^2(A_1; AC)}$$

$$h_{CC_1B_1B} = \frac{4}{2} = 2 = \sqrt{h_{прямой}^2 + r^2(B_1; BC)}$$

Заметим, что $BB_1 \perp BC$. Стало бы так, $r(B_1; BC) = BB_1$.

$AA_1 = BB_1$ как проекции равных отрезков.

Тогда $r(A_1; AB) = \frac{1}{2} AA_1 = \frac{1}{2} BB_1$.

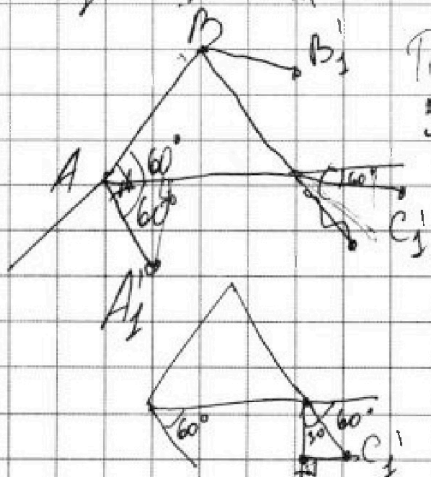
$$\begin{cases} 6,25 = h_{прямой}^2 + r^2(A_1; AB) = h_{прямой}^2 + \frac{1}{4} (BB_1)^2 \\ 4 = h_{прямой}^2 + (BB_1)^2 \end{cases}$$

$$2,25 =$$

по т. о пер. пер. $BB_1 \perp BC$

~~$r(B_1; BB_1) \parallel AA_1$~~ $r(B_1; BB_1) \perp BC$ а $r(B_1; BB_1, C_1)$ - проекция

Тогда $BB_1 \cdot BC (=4) \Rightarrow BB_1 = 2$. Но тогда в AA_1B_1B высота равна стороне, что невозможно. Значит, A_1 лежит на биссектрисе внешнего угла A_1CBAC .



Тогда BB_1 не $\perp BC$...

это $AA_1 \perp AB$. — $BB_1 \parallel AA_1$ и $CC_1 \parallel AA_1$

и все, наконец, мы можем

$$\begin{aligned} h_{AA_1C_1C}^2 &= h_{прямой}^2 + \left(AA_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \\ h_{BB_1C_1C}^2 &= h_{прямой}^2 + \left(CC_1 \cdot \frac{1}{2} \right)^2 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N7 страница 3.

$$\begin{cases} 6,25 = h_{\text{прям}}^2 + (AA_1')^2 \cdot \frac{3}{4} \\ 4 = h_{\text{прям}}^2 + (AA_1')^2 \cdot \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$2,25 = \frac{1}{2} AA_1'^2$$

$$AA_1'^2 = 4,5$$

$$h_{\text{прям}}^2 = 6,25 - \frac{4,5 \cdot 3}{4} = \frac{6,25 \cdot 4 - 13,5}{4} =$$

$$= \frac{25 - 13,5}{4} = \frac{11,5}{4}$$

$$h = \sqrt{\frac{11,5}{4}} = \frac{\sqrt{11,5}}{2}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{11,5}}{2}$

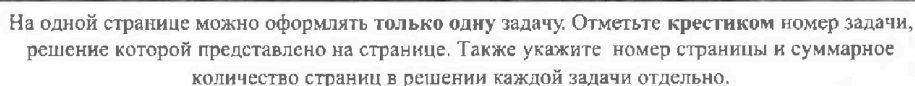
$(CC_1' = AA_1')$ как проекции
равных
отрезков)

$$\begin{array}{r} 1 \\ 4,5 \\ \times 3 \\ \hline 13,5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13,5 \\ - 12,3 \\ \hline 1,2 \end{array}$$

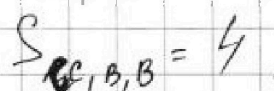
$$\begin{array}{r} 1,5 \\ \times 6,25 \\ \hline 9,375 \end{array}$$

$$(6 + 0,25) \cdot 4 = 25$$



СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть высота прыжка
 $K_0(A_1') = P_{\text{max}}(A_1)$.

Но тогда, поскольку $S_{AA_1C_1C} = S_{AA_1B_1B}$,
высоты параллелограмма равны, а
эти высоты равны $\sqrt{h^2 + \rho^2(A'_1, AB)}$
 $\sqrt{h^2 + \rho^2(A'_1, AC)}$,
то $\rho(A'_1, AB) = \rho(A'_1, AC)$.

Стало быть, A_1 лежит на прямой,
соединяющей биссектрису $\angle BAC$!

Но тогда AB лежит в плоскости α , такой, что α содержит бисс. $\angle A$ и $\alpha \perp ABC$.

$$C_1, AA_1, BB_1, AA_1, \dots \quad P(B_1) = P_{ABC}(B_1)$$

$$C_2 = P_{ABC}(C_2)$$

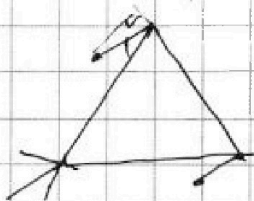
Пусть H_0 H_1 лежит внутри ΔABC . Тогда

Высота параллелограмма
Высота паралл. $A_1C_1B_1P \leq$ высоты AA_1, BB_1

стало бы, расстояние от B_1 до BC < расстояние от B_1 до AB .

Если A'_1 - вершина $\triangle ABC$, то $\rho(B'_1, AB) = BB'_1 \cdot \frac{1}{2}$ по теореме
 $\rho(B'_1, BC) = \frac{\sqrt{3}}{2} BB'_1$

Значит, A_1' вне $\triangle ABC$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$q^8 = (x-3)^2$$

$$\left(\frac{b_{12}}{b_{10}}\right)^4 = (q^2)^4$$

$$\left(\frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4}\right)^4 = \frac{(15x+6)(x-3)^2}{(x+4)^4}$$

$$q^8 (x-3)^2 = \frac{(15x+6)(x-3)^2}{(x+4)^4}$$

$$x=3$$

$$(x+4)^4 = 15x+6$$

$$\frac{b_{12}}{b_{10}} = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{\sqrt{(15x+6)(x-3)^3}} = \sqrt{\frac{(15x+6)(x-3) \cdot (x-3)^3}{(15x+6)^3}}$$

$$= \sqrt{(x-3)^4} = (x-3)^2 = q^8$$

$$\frac{b_{12}}{b_{10}} = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4} = q^2$$

$$\frac{(15x+6)^2 (x-3)^2}{(x+4)^4} = q^8$$

$$(x-3)^2 = \frac{(15x+6)^2 (x-3)^2}{(x+4)^4}$$

$$(x+4)^4 = (15x+6)$$

$$((x+4)^2 - (15x+6))((x+4)^2 + (15x+6)) = 0$$

$$15x = -6$$

$$x = -\frac{6}{15}$$

$$\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin x \cos x = 2\cos^3 x - \cos x - 2(1-\cos^2 x)\cos x = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x = \cos x$$

$$4\cos^3 x - 4\cos x = 0$$

$$4\cos x(\cos^2 x - 1) = 0$$

$$4x^3 - 6x^2 + 3x + 3 = p$$

$$4x^3 - 4x^2 + x + 1 - 2x^2 + 2x + 2 = p$$

$$x(2x-1)^2 - 2(x^2 - x - 1) = p$$

$$-1 \leq \leq 1$$

$$4\cos^3 x + 3\cos x = 6\cos^3 x - 3 + p$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

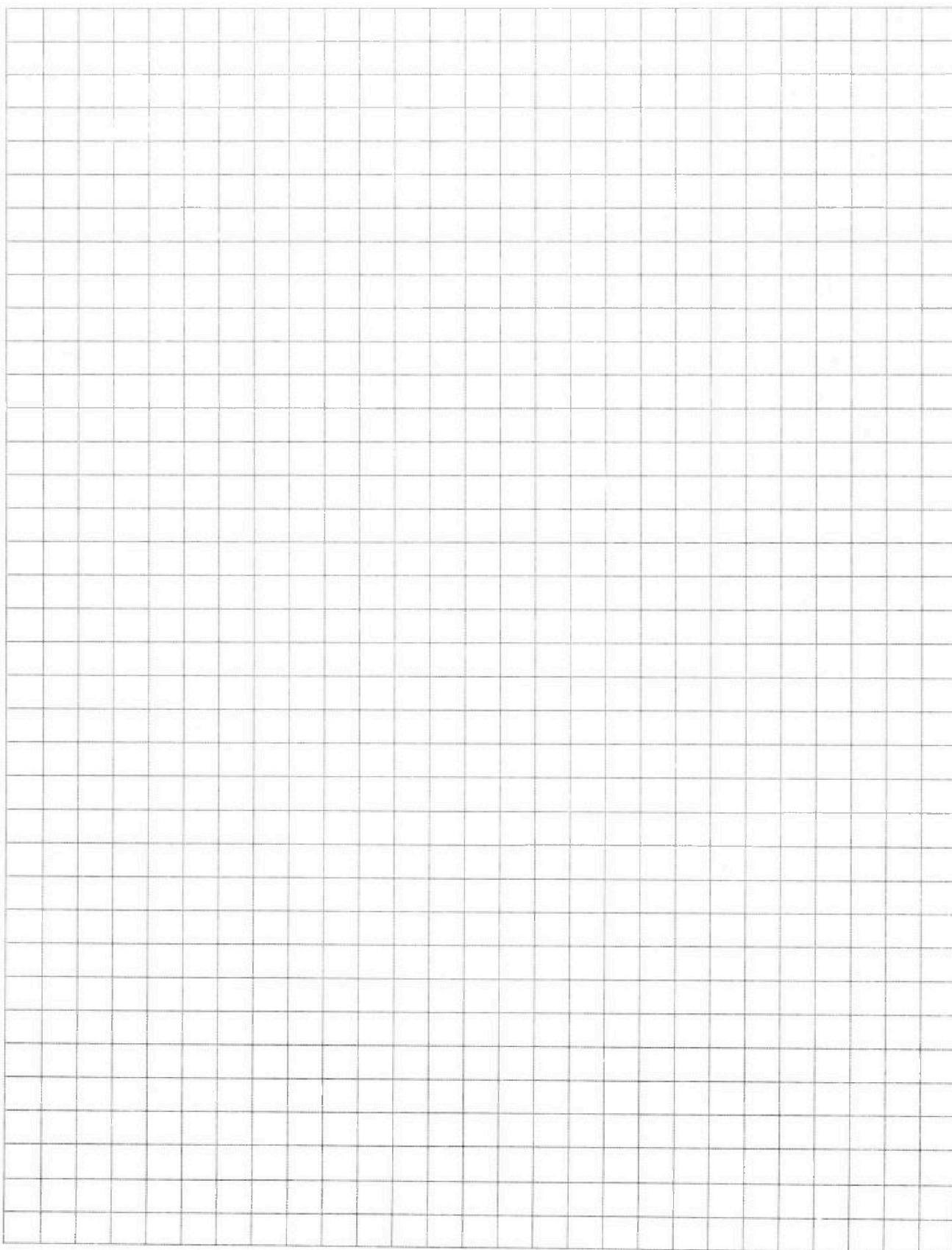
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 1

$$b_4 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} = b_1 \cdot q^3$$

$$b_{10} = x+4 = b_1 \cdot q^9$$

$$b_{12} = \sqrt{(15x+6)(x-3)} = b_1 \cdot q^{11}$$

$$b_{10} \cdot b_{12} = b_1^2 \cdot q^{20} = (b_1 \cdot q^{10})^2 = (b_{11})^2$$

$$b_4 \cdot b_{12} = b_1^2 \cdot q^{14} = (b_1 \cdot q^7)^2 = (b_8)^2 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \cdot \sqrt{(15x+6)(x-3)}$$

$$b_4 \cdot b_{10} = b_1^2 \cdot q^{12} = (b_1 \cdot q^6)^2 = (b_7)^2 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \cdot (x+4)$$

$$q^2 = \left(\frac{b_8}{b_7}\right)^2 = \frac{\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \cdot \sqrt{(15x+6)(x-3)}}{\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \cdot (x+4)}$$

$$b_4 \cdot b_{10} = (b_7)^2$$

$$b_4 \cdot b_{12} = (b_8)^2$$

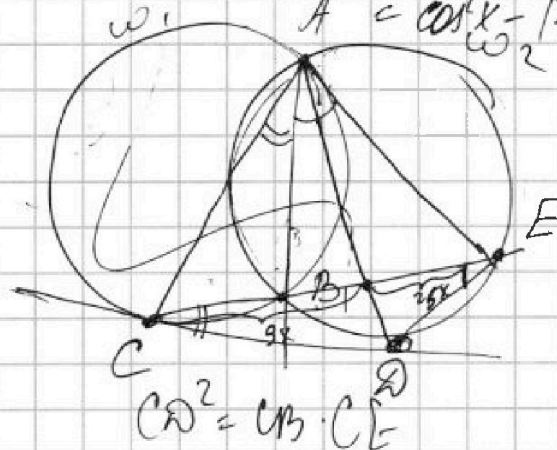
$$b_{10} \cdot b_{12} = (b_{11})^2$$

$$\frac{b_{12}}{b_4} = \frac{b_1 \cdot q^{11}}{b_1 \cdot q^3} = q^8$$

$$\frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}} = \sqrt{\frac{(15x+6)(x-3)(x-3)^3}{(15x+6)}} = \sqrt{(x-3)^4} = (x-3)^2$$

$$\begin{aligned} (\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 &= \cos^3 \varphi + 3 \cos^2 \varphi \cdot i \sin \varphi + 3 \cos \varphi \cdot (i \sin \varphi)^2 + (i \sin \varphi)^3 \\ &= \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi + i(3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi) \\ &= \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi (1 - \cos^2 \varphi) + i(3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi) \\ &= 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi + i(3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 2x &= 2 \cos^2 x - 1 \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ A &= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) \end{aligned}$$



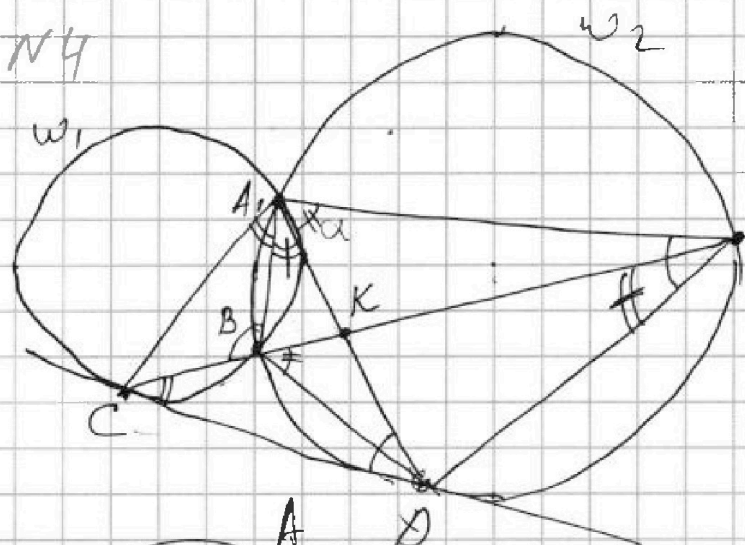


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle AED = \angle ADC$$

$$\frac{ED}{\sin \alpha} = 2R_{\omega_2}$$

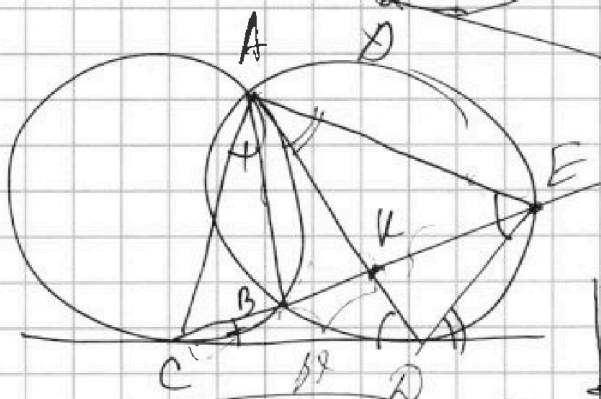
$$CD^2 = CB \cdot CE$$

$$CE = 34x$$

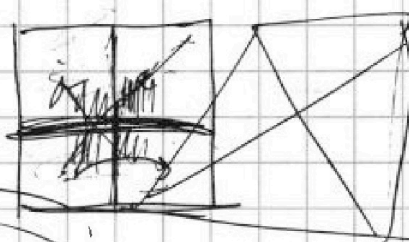
$$CK = 9x$$

$$KE = 15x$$

$$AK \cdot KD = BK \cdot KE$$



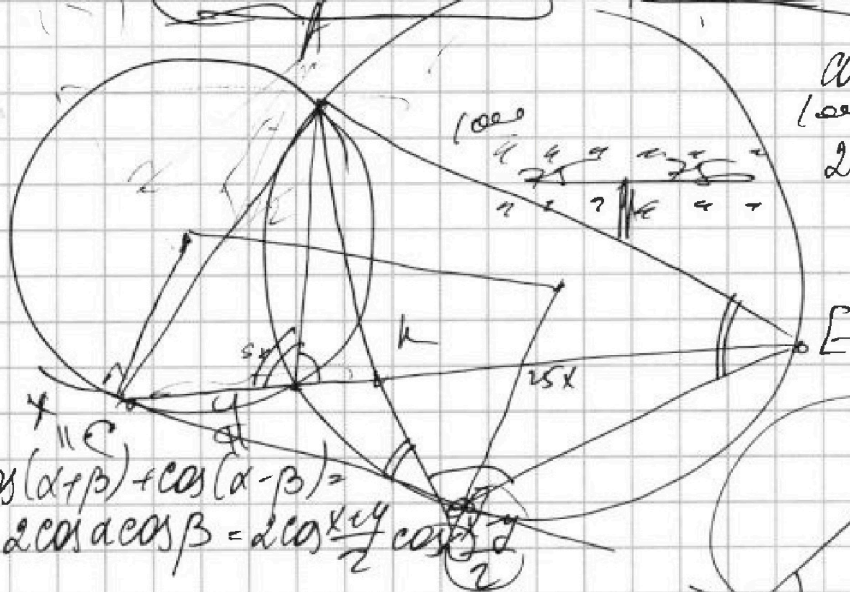
$$\cos 3x = \cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x$$



$$\cos 3x + \cos x = 2 \cos 2x \cos x$$

$$2 \cos 2x \cos x + \cos x =$$

$$= 3 \cos 2x + p$$



$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) =$$

$$= 2 \cos \alpha \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

