



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен $\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}$, двенадцатый член равен $2 - x$, а восемнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 1

$\{a_i\}$ - это i -й член нашей прогрессии, а $b = \frac{a_2}{a_1}$

тогда $a_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$, $a_{18} = a_{10} \cdot b^8 = b^8 \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$;

из условия $a_{18} = \sqrt{\frac{(25x+34)}{(3x+2)^3}} \Rightarrow b^8 \cdot \sqrt{(25x+34)(3x+2)} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$, тогда

$$(25x+34)(3x+2) \geq 0$$

$$b^{16} \cdot (25x+34)(3x+2) = \frac{25x+34}{(3x+2)^3};$$

ОДЗ: $x \in (-\infty, -\frac{34}{25}] \cup (-\frac{2}{3}, \infty)$

* $b^{16} \cdot (25x+34)(3x+2) = \frac{25x+34}{(3x+2)^3}$; $(25x+34)(3x+2) \neq 0$, отдельно рассмотрим случай $(25x+34)(3x+2) = 0$; $3x+2 \neq 0$

$$b^{16} = \frac{1}{(3x+2)^4}$$

$$b^4 = \pm \frac{1}{3x+2}$$

тогда $(25x+34) = 0$; $x = -\frac{34}{25}$

тогда $a_{10} = 0$;

а $a_{12} = 2 + \frac{34}{25}$,

но мы не можем из 0 путём умножения получить ничего кроме 0.

$a_{12} = b^2 \cdot \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$; из условия $a_{12} = 2-x$

$$b^2 \cdot \sqrt{(25x+34)(3x+2)} = 2-x;$$

$$\begin{cases} 2-x \geq 0 & x \leq 2 \\ b^4(25x+34)(3x+2) = 4-4x+x^2 \end{cases}$$

* $b^4(25x+34)(3x+2) = 4-4x+x^2$

$$b^4 = \frac{1}{3x+2}$$

$$b^4 = -\frac{1}{3x+2}$$

$$25x+34 = 4-4x+x^2$$

$$-25x-34 = 4-4x+x^2$$

$$x^2 - 29x - 30 = 0;$$

$$x^2 + 21x + 38 = 0;$$

$$x_1 = -1; x_2 = 30$$

$$x_1 = -19; x_2 = -2$$

не подходит не подходит
но ОДЗ т.к. $x > 2$

Ответ: -19; -2



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} & \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2} \\ & \sqrt{y+2} + 2\sqrt{y-18} = \sqrt{400-z^2} \quad (1) \\ & 2\sqrt{y-18} = \sqrt{400-z^2} - \sqrt{y+2} \\ & 3y-34 = \sqrt{400-z^2} \\ & 3y-34 \geq 0 \\ & 9y^2 - 204y + 1156 = 400 - z^2 \\ & 9y^2 - 204y + 756 + z^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{y+2} + 2\sqrt{y-18} = \sqrt{400-z^2} \\ & 3t = y-2 \\ & |t+2| + 2|t-20| = \sqrt{400-z^2} \\ & \geq 20 \\ & \sqrt{400-z^2} = 20 \\ & z = 0 \end{aligned}$$

$$|y+2| + 2|y-18| = 20;$$

$$y \geq 18: \quad y \in [-2; 18)$$

$$3y-18=20$$

$$3y=38$$

$$y=12$$

не подходит!

$$3y-34=20$$

$$3y=54$$

$$y=18$$

$$z=0, y=18$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2}; \quad x=3 \text{ не подходит}$$

$$\sqrt{x+6} + 6 = 2\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} \quad x^2+3x-18=0;$$

$$x+6+7=2\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} \quad x_1=-6; x_2=3$$

$$2\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} = 2\sqrt{18-3x-x^2} - \sqrt{3-x} \quad x \in 30;$$

$$x+6 - 2\sqrt{18-3x-x^2} - 3+x = 4$$

$$\text{Ответ: } (-1,5; 18; 0); (6; 18; 0)$$

003:

$$x \leq -6;$$

$$x \leq 3$$

$$18 - 3x - x^2 \geq 0;$$

$$x^2+3x-18=0;$$

$$x_1=-6; x_2=3$$

$$-6 \quad 3 \quad -6$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x > -6$$

$$3x > 2z$$

$$x < 3 - 2z$$

$$x^2 + 3x < y + z$$

$$z^2 < 400$$

$$z \in [-20; 20]$$

$$2z < 3 - x$$

$$x < 3 - 2z$$

$$x > -6$$

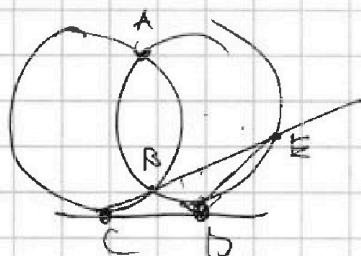
$$x < 3 - 2z$$

$$z < 3$$

$$z \in [-20; 3]$$

$$-18 \quad [-20; 3]$$

$$y > -21$$



$$x^2 + 3x + 2z + 4y + 12x + 6 = 7z$$

$$3y - 34 = \sqrt{400 - z^2}$$

$$(2y - 36)^2$$

$$3y - 34 = \sqrt{400 - z^2}$$

$$9y^2 + 4y + 4 + 4y^2 - 144y + 1296 = 400 - z^2$$

$$5y^2 + 140y + 900 = -z^2$$

$$D = 1600$$

$$\min: -14$$

$$\sqrt{D} = 40$$

$$y = \frac{-14 \pm 40}{10} = \frac{-54 \pm 40}{10}$$

$$-80$$

$$z \in (-\sqrt{80}; \sqrt{80})$$

$$x^2 + 3x < \sqrt{80} - 20$$

$$f = x^{14}$$

$$\frac{14}{58}$$

$$+ 14$$

$$13600 - 18000$$

$$-14^2 = -196$$

$$-80$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5

Заметим, что у нас есть случаи, когда одновременно выполняются 2 симметрии и при этом если мы знаем, что если 2 симметрии выполняются одновременно, то третья симметрия является следствием из них. Но есть ~~еще~~ более случаи (случаи в которых если хотя бы 2 симметрии будут включены в себя все 3 симметрии). Рассмотрим этот случай, для этого достаточно выбрать 2 клетки из левой верхней четверти, т.к. в остальных четвертях клетки будут выбраны автоматически из соображений симметрии, то есть нам нужно выбрать 2 клетки из $500 \cdot 120 : 4 = 15000$ клеток. Способов это сделать C_{15000}^2 .

Потом рассмотрим случай горизонтальной симметрии. Нам достаточно выбрать 4 точки из верхней половины, а остальные будут выбраны автоматически из соображений симметрии. Нам нужно 4 клетки из $500 \cdot 120 : 2 = 30000$ клеток. Способов C_{30000}^4 .

Почти так же можно поступить и с центральной симметрией, значит в ней тоже C_{30000}^4 способов.

Для вертикальной симметрии работает аналогичное соображение, только нужно повернуть доски. Также C_{30000}^4 способов.

Общие случаи мы уже 3 раза, значит нужно вычесть $2 \cdot C_{15000}^2$

Ответ: $3 \cdot C_{30000}^4 - 2 \cdot C_{15000}^2$



1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

У6

Рассмотрим 3 условия

$$(a-c)(b-c) = p^2, \quad \exists p \neq 3, \text{ тогда } p \equiv 1 \pmod{3} \text{ или } p \equiv 2 \pmod{3}, \text{ тогда } p^2 \equiv 1 \pmod{3}$$

т.к. числа целые

p^2 можно получить либо из $p \cdot p$ либо из $p^2 \cdot 1$
Если мы получаем из $p \cdot p$, то $(a-c) = (b-c)$, а так быть не может,
т.к. $a < b$. Тогда мы получаем из $p^2 \cdot 1$, но $p^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow (a-c) \equiv (b-c) \pmod{3}$

$a \equiv b \pmod{3}$, но тогда не выполняется 2 условие и $b-a \div 3$.

Вывод: $(a-c)(b-c) = 3^2 = 9$

$(a-c)(b-c) = 9$, при этом если $(a-c) \div 3$, то $(b-c) \div 3$ и наоборот =? либо
 $a-c \div 9$; либо $b-c \div 9$. $\Rightarrow$ либо $a-c = 9 \cdot b-c \leq 1$ либо $b-c = 9 \cdot a-c = 1$
(не бывает т.к. $b < a$) либо $b-c = 1$; $a-c = 9$

$$\begin{cases} a-c=9 \\ a^2+b=1000 \end{cases} \quad \text{I} \quad \begin{cases} b-c=9 \\ a^2+b=1000 \end{cases} \quad \text{II} \quad \begin{cases} a-c=1 \\ a^2+b=1000 \end{cases} \quad \text{I-II} \Rightarrow \begin{cases} b-a=8 \\ a^2+b=1000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+b=1000 \\ a^2+a-8=1000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b=1000 \\ a^2+a-1008=0 \end{cases} \quad \text{I} \quad \begin{cases} b-c=-1 \\ a-c=-9 \\ a^2+b=1000 \end{cases}$$

$$\text{I-II} \Rightarrow \begin{cases} a=31; b=39 \\ (31-c)(39-c)=9 \\ c_1=30; c_2=40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1=31; b_1=39 \\ (31-c)(39-c)=9 \\ c_1=30; c_2=40 \end{cases} \text{ (решений не более 2 т.к. уравн. квадратное)}$$

$$\text{II} \quad \begin{cases} a_1=-32; b_1=-24 \\ (-32-c)(-24-c)=9 \\ c_1=-23; c_2=-33 \end{cases} \text{ (решений не более 2 т.к. квадратн.)}$$

Ответ: $(31; 39; 30); (31; 39; 40); (-32; -24; -23); (-32; -24; -33)$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x+6 > 0$$

$$3-x-2z > 2z$$

$$y-3x-x^2+z > 0$$

$$y-x^2z+z > 0$$

$$y-(x+1)z > 0$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 3 \ 4 \\ 3 \ 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 3 \ 6 \\ 1 \ 0 \ 2 \\ \hline 1 \ 1 \ 5 \ 6 \end{array}$$

$$(-4,5; 20)$$

$$z \in (-20; 20)$$

$$x > -6$$

$$z-x \leq 6$$

$$3-x \leq 9$$

$$2z \geq -4,5$$

$$z \geq -2,25$$

$$-3x \leq 18 \quad x^2 < 0$$

$$x < -20$$

$$y \geq 38$$

$$a-b+z = 2ab$$

$$a-2ab = b-z$$

$$a(1-2b) = b-z$$

$$a = \frac{b-z}{1-2b}$$

$$\sqrt{3x-7} = \frac{2\sqrt{3x-7}}{1-2\sqrt{3x-7}}$$

$$\sqrt{3x-7}$$

$$6+7$$

$$\frac{7}{\sqrt{3x-7}}$$

$$\sqrt{3x-7} = \frac{7}{\sqrt{3x-7}}$$

$$\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$x^2+3x-18$$

$$-15$$

$$2,25 - 4,5$$

$$2,2$$

$$-20,25$$

$$\times 3,5$$

$$3,5$$

$$17,5$$

$$10,5$$

$$1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

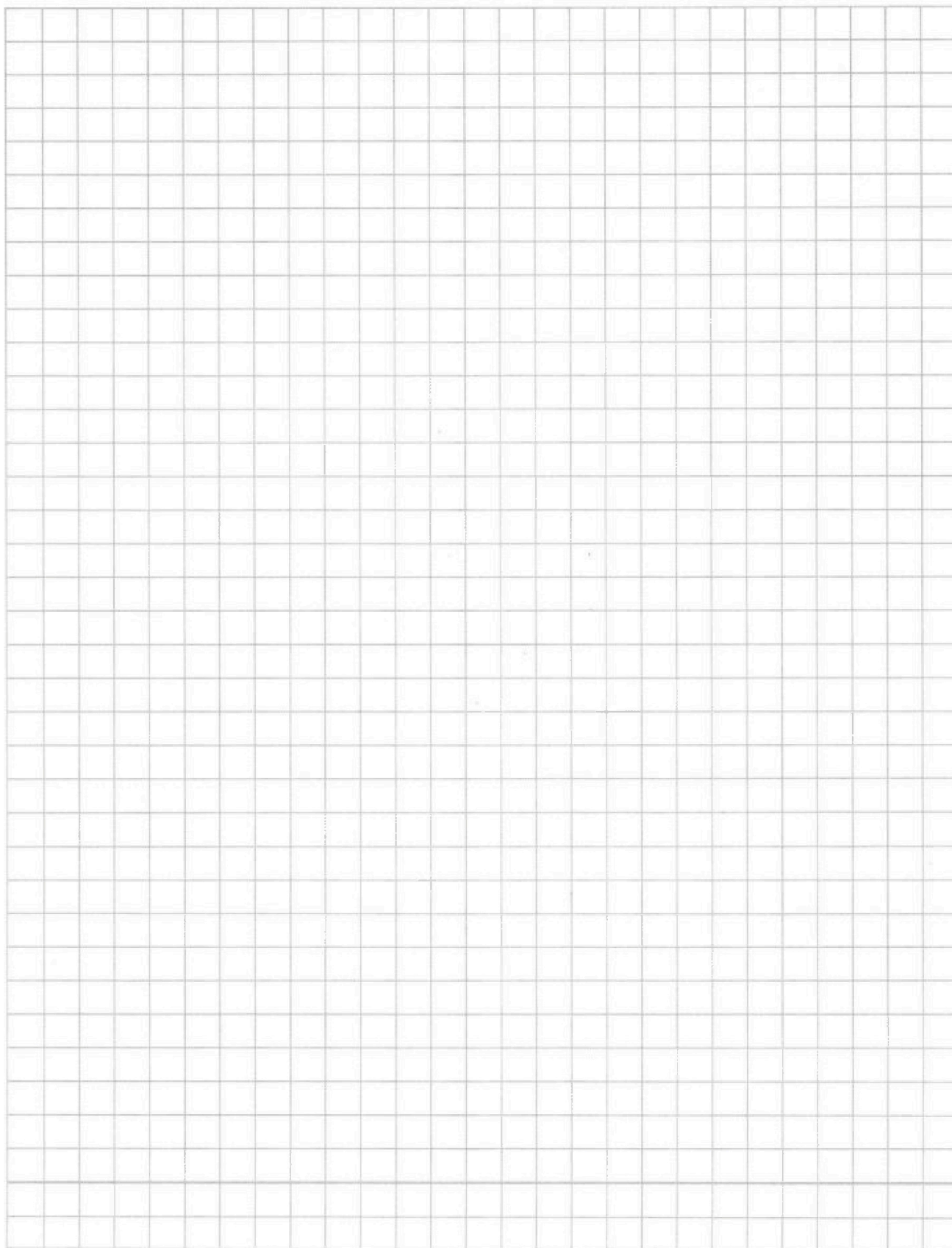
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p \cos^3 x - 3p + 12 \cos^2 x - 6 + 3(p+4) \cos x + 10 = 0; \quad t = \cos x$$

$$4pt^3 + 12t^2 + 3(p+4)t = 3p-4; \quad 4pt^3 + 12t^2 + 3(p+4)t$$

$$4pt^3 + 12t^2 + 3(p+4)t - 3p + 4 = 0;$$

$$-27.4$$

$$t(4pt^2 + 12t + 3p + 12) = 3p - 4;$$

$$4pt^3 + 3pt + 12t^2$$

$$4pt^3 + 3pt + 12t^2$$

$$(4 \cos^3 x - 3)p + 3 \cos x p$$

$$(4 \cos^3 x - 3 + 3 \cos x)p + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0$$

$$a^2 + b = 1000$$

$$c < a < b < c$$

$$0 \quad 1 \quad 0 \quad 1$$

$$a^2 + b = 1000$$

$$1 \quad 0 \quad 1 \quad 0$$

$$b - a$$

$$2 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

$$c^2 + ab - c(a+b)$$

$$c(c-a-b) + a + b$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} =$$

$$3-2z$$

$$b-a/3 \quad 0 \quad a/3$$

$$(a-c)(b-c)$$

$$4225$$

$$1.4$$

$$381$$

$$32$$

$$682$$

$$93$$

$$992$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{(25x+34)(3x+2)} \cdot b^2 = 24x \sqrt{(25x+34)(3x+2)} = b^8 \cdot \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$$

$$\sqrt{(25x+34)(3x+2)} = \sqrt{\frac{b^8 \cdot (25x+34)}{(3x+2)^3}}$$

$$(25x+34)(3x+2) = b^{16} \cdot \frac{25x+34}{(3x+2)^3}$$

$$(3x+2)^4 = b^{16} \quad b^4 = \pm(3x+2) \quad \cos(x) = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}$$

$$|y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}$$

$$y^2 + 2y + 4 + 4|y+2||y-18| + 2y^2 - 72y + 648 = 400 - z^2$$

$$\begin{array}{r} \times 18 \\ 18 \\ \hline 144 \\ + 18 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$3y^2 - 70y + 248 + 4|y+2||y-18| = -z^2$$

$$3y^2 - 70y + 248 + 4y^2 + 8y - 72y - 144 = -z^2$$

$$7y^2 - 64y + 104 = -z^2$$

$$\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1 - 4\sin^2 x$$

$$p \cdot \cos 3x + 6 \cos 2x + (3p+12) \cos x = -10$$

$$\cos 3x = \cos(2x+x)$$

$$\cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \sin x = (1-2\sin^2 x) \cdot \cos x - 2\sin^2 x \cdot \cos x = (1-4\sin^2 x) \cdot \cos x$$

$$-11p + 4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x - 6 + 2 \cos x + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 2 \cos x = 12p - 4$$

$$\cos x (4p \cos^2 x + 12 \cos x + 2) = 12p - 4$$

$$144 - 12p^2 - 16p$$

$$\Delta < 0: -12p^2 - 16p + 144 = 0$$

$$-3p^2 - 4p + 36 > 0$$

$$-4\sin^2 x = -4 + 4\cos^2 x$$

$$-3 + 4\cos^3 x$$

$$4\cos^3 x - 3$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

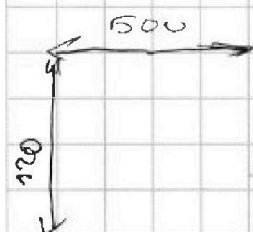


$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3$$

$$4p\cos^3 x - 3p + 12\cos^2 x - 6 + 3(p+4)\cos x + 10 = 0;$$

$$\cos x (4p\cos^2 x + 12\cos x + 3p + 12) = 3(p+4)$$

$$\begin{aligned} 144 - 12p^2 - 48p^3 \\ 12p^2 + 48p - 144 = 0 \\ 3p^2 + 12p - 36 = 0 \\ p^2 + 4p - 12 = 0; \end{aligned}$$



$$60 \cdot 250 = 15000$$

$$y^2 + 2y + 4 + \frac{y}{2} = \frac{36}{4}$$

$$(2y-36)^2 = 4y^2 - 288y + 1296$$

$$5y^2 - 286y + 1320 + 11 \cdot 11 = 400 - z^2$$

$$286 \cdot 286 =$$

$$x + 6z + 3 + x + 2z + 4y = 4y + 2z - 4z + \frac{1}{2}$$

$$0 \rightarrow 0$$

$$1 \rightarrow 1$$

$$2 \rightarrow 1$$

$$a \equiv 3 \quad b \equiv 1 \pmod{3}$$

$$a \equiv 1 \quad b \equiv 3$$

$$a \equiv 2$$

$$0 \text{ или } 3$$

$$ab + c^2 = c(a+b)$$

$$0:1$$

$$1:0$$

$$2:0$$

$$1$$

$$1$$

$$2$$