



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{(25x-9)(x-6)}$, девятый член равен $x+3$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}, \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $2 : 5$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 100×400 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 710$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть наши геом прогрессия: $b, bq, \dots$

Тогда $\begin{cases} b \cdot q^6 = \sqrt{(25x-9) \cdot (x-6)} \\ b \cdot q^8 = x+3 \\ b \cdot q^{14} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \end{cases}$

ОДЗ: $x \notin \left[\frac{9}{25}; 6\right]$

Если $x = \frac{9}{25}$, то $bq^6 = 0 \Rightarrow bq^8 = 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow$ против.

$$\begin{cases} b = \frac{\sqrt{(25x-9) \cdot (x-6)}}{q^6} \\ b \cdot q^8 = x+3 \\ b \cdot q^{14} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \frac{\sqrt{(25x-9) \cdot (x-6)}}{q^6} \\ \sqrt{(25x-9) \cdot (x-6)} \cdot q^2 = x+3 \\ \sqrt{(25x-9) \cdot (x-6)} \cdot q^8 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \frac{\sqrt{(25x-9) \cdot (x-6)}}{q^6} \\ q^2 = \frac{x+3}{\sqrt{(25x-9) \cdot (x-6)}} \\ (x+3)^4 = \left(\frac{\sqrt{(25x-9) \cdot (x-6)}}{q^6}\right)^4 \cdot \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \end{cases} \quad (*)$$

~~$x = \frac{9}{25}$~~ $(*) : (x+3)^4 = \frac{(\sqrt{(25x-9) \cdot (x-6)})^4}{\sqrt{(x-6)^4}}$

$$(x+3)^4 = \frac{((25x-9) \cdot (x-6))^2}{(x-6)^2}$$

$$x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81 = 125x^2 - 450x + 81$$

$$x^4 + 12x^3 - 71x^2 + 558x = 0 \quad \boxed{x_1 = 0}$$

$$x^3 + 12x^2 - 71x + 558 = 0$$

По формуле для корней кубич уравнения можно найти корни (некоторые могут не удове. ОДЗ).

Ответ: 0 и ~~еще~~ ^{возможно еще несколько корней.}

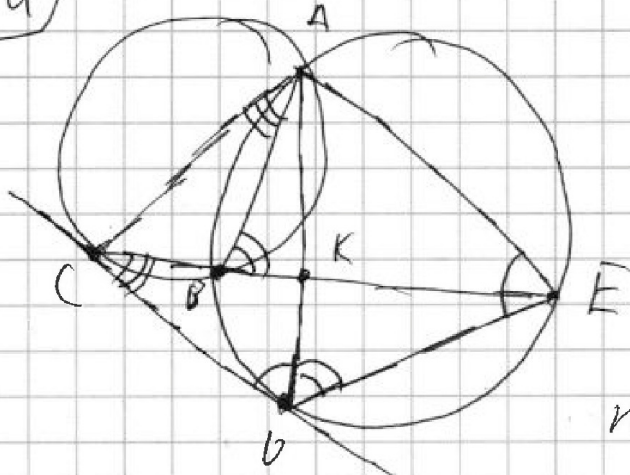


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☒5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(к4)



Пусть K - т. пересечения
 CE и AD .

~~Л~~ $\angle CAP = \angle BCD$ (углы
между кас. и хордой
равны $\frac{1}{2}$ дуге, которую
отсекает хорда и
+ т.к. не равен угол, опира-
ющийся на эту дугу) (1)

$\angle CDA = \angle AED$ (аналогично $\angle CAP$ и $\angle BCD$) (2)

$\angle ADE = \angle ABE$ (м.к. ~~и т.к.~~ ^{опир. на} ~~т.к.~~ AB $\frac{1}{2}$ дугу) (3)

$\angle ACB + \angle CAB = \angle ABE$ (внешн. угол Δ) $\Rightarrow \angle ACD =$
 $= \angle ADE$ (4)

(3) + (4) $\Rightarrow \Delta ACD \sim \Delta ADE$ (по 2 углам) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CAD = \angle DAE \Rightarrow AK$ - биссектр. $\Delta CAE \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{CK}{KE} = \frac{2}{5}$. Пусть $CA = 2x$, тогда $AE = 5x$.

Пусть $AD = y$.

Из подобия $\Delta ACD \sim \Delta ADE$: ~~CE~~ $\frac{ED}{DC} = \frac{AE}{AD} = \frac{AD}{AC}$

$\Rightarrow \frac{5x}{y} = \frac{y}{2x} \Rightarrow y = x\sqrt{10} \Rightarrow \frac{ED}{DC} = \frac{AE}{AD} =$

$= \frac{5x}{x\sqrt{10}} = \frac{5x}{x\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

Ответ: $\frac{ED}{DC} = \frac{\sqrt{10}}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

[5] Посчитаем кол-во вариантов, удовл. хотя бы 1 сантиметру. Каждый такой вариант однозначно задается и клетками, стоящими в 1 из половин прямоугольника. Понимаем вариантов $\{C_{10000}^4\}$. Но некоторые варианты удовлетворяют хотя бы 2 сантиметрам и их мы посчитали несколько раз.

Легко проверить, что еще вариантов удовл. 2^м ^{полюсу} сантиметру, то от удовл. всем трем (посчитав количество по вертикали и горизонтали о центральных захватах клеток до центра прямоугольника).

Вариант, удовл. 2-м ^{полюсам} и ^{одному} сечению ^{закрашен} однозначно задается 2^м ^{закрашен} клеткой, ^{закрашен}

В итоге из 4 прямоугол, на которые разбивают исходный 2 средние линии. Понимаем вариантов C_{10000}^2 и каждый мы уже посчитали 3 раза вместо 1.

Итого ответ: $3C_{20000}^4 - 2C_{10000}^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(ab)(a-c) \cdot (b-c) = p^2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a-c=p \\ b-c=p \end{cases} \Rightarrow a=b \quad \times$$

$$\begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=1 \end{cases} \Rightarrow b-a=1-p^2 < 0 \quad \times$$

$$\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \Rightarrow b-a=p^2-1 \quad \checkmark$$

$$\begin{cases} a-c=-1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \Rightarrow b-a=1+p^2 > 0 \quad \times$$

$$\begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=-1 \end{cases} \Rightarrow b-a=p^2-1 \quad \checkmark$$

$$\begin{cases} a-c=-p^2 \\ b-c=-1 \end{cases} \Rightarrow b-a=1-p^2 < 0 \quad \times$$

$$\begin{cases} a^2 + b = 710 \\ a < b \end{cases} \Rightarrow a \in [-27; 710] \Rightarrow p \leq 27, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b-a=3 \Rightarrow \times \\ b-a=8 \checkmark \\ b-a=24 \Rightarrow \times \\ b-a=48 \Rightarrow \times \\ b-a=120 \Rightarrow \times \\ b-a=168 \Rightarrow \times \\ b-a=270 \Rightarrow \times \\ b-a=528 \Rightarrow \times \end{cases}$$

$$\Rightarrow b = a + 8 \Rightarrow$$

$$b-a=8$$

$$\Rightarrow a^2 + a + 8 = 710$$

$$a^2 + a = 702$$

$$a^2 + a - 702 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+702 \cdot 4}}{2} \Rightarrow$$

$$a_1 = 26 \Rightarrow$$

$$a_2 = -27 \Rightarrow$$

$$b_1 = 34$$

$$b_2 = -19$$

$$b_2 = -18$$

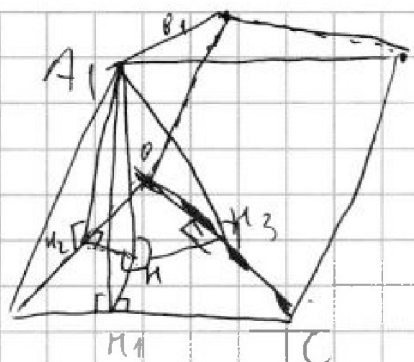
$$\text{Answer: } (26, 34, 25) \text{ и } (-27, -19, -18)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☒СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть наш призму
ABCA₁B₁C₁ и плоскости
γ₁ и γ₂ и AA₁B₁B и AA₁C₁C
навы.

Пусть AB = BC = CA = a ⇒

по Герону
⇒

$$S_{ABC} = \sqrt{\frac{a+a+a}{2} \cdot \frac{a+a-a}{2} \cdot \frac{a+a-a}{2} \cdot \frac{a+a-a}{2}} = 1$$

$$\frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} = 1 \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Пусть A₁H — высота ~~призмы~~ из
т. A₁. Опустим H₁ ⊥ AC, H₂ ⊥ AB, H₃ ⊥ BC

т. к. AB = AC и S_{AA₁CC₁} = S_{AA₁BB₁} ⇒ A₁H₁ = A₁H₂

(т. к. по теор. о 3 ⊥ A₁H₁ и A₁H₂ — высоты
в равных паралл. — лок AA₁B₁B и AA₁C₁C)

$$HH_1 = \sqrt{A_1H + A_1H_1} = \sqrt{A_1H + A_1H_2} = HH_2$$

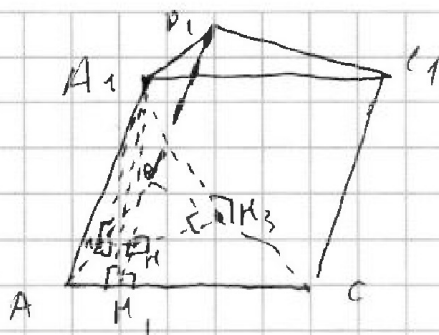


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть падающая плоскость $ABC A_1 B_1 C_1$ и плоскости $AA_1 H_1$, $BB_1 H_2$ и $CC_1 H_3$ равны.
 $A_1 H$ - высота призмы.

Допустим $HH_1 \perp AC$, $HH_2 \perp BC$, $HH_3 \perp AB$.

$$\text{т.к. } AC = AB \Rightarrow S_{AA_1 H_1} = S_{BB_1 H_2} \Rightarrow A_1 H_1 =$$

$= A_1 H_2$ (т.к. по теор. о 3 $A_1 H_1$ - высота перпендикулярная $AA_1 C_1 C$ и $A_1 H_2$ - высота перпендикулярная $AA_1 B_1 B$)

Пусть $A_1 H = L$, $A_1 H_1 = A_1 H_2 = h$,

$$A_1 H_3 = h_2, \quad \sqrt{h_1^2 + L^2} = h = \sqrt{h_2^2 + L^2} \Rightarrow h_1 = h_2 = x$$

$$\sqrt{h_1^2 + L^2} = h = \sqrt{h_2^2 + L^2} \Rightarrow h_1 = h_2 = x$$

Пусть $AB = AC = BC = a$

$$\Rightarrow 1) = \sqrt{\frac{a+a-a}{2} \cdot \frac{a+a-a}{2} \cdot \frac{a+a-a}{2} \cdot \frac{a+a-a}{2}} = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

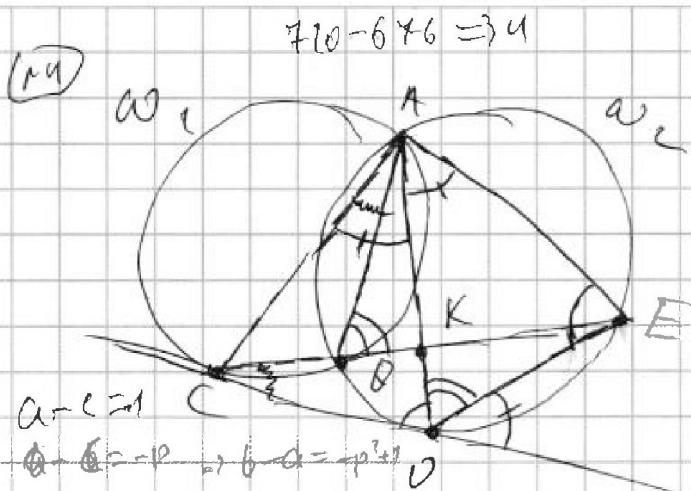


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

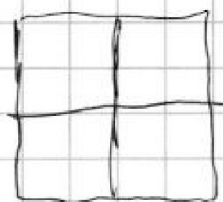
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



K - м. пересеч. CE и AD.

$$\frac{CK}{KE} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{CD}{DE} = \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE}$$



$$\frac{4x}{y} = \frac{y}{5x} \Rightarrow$$

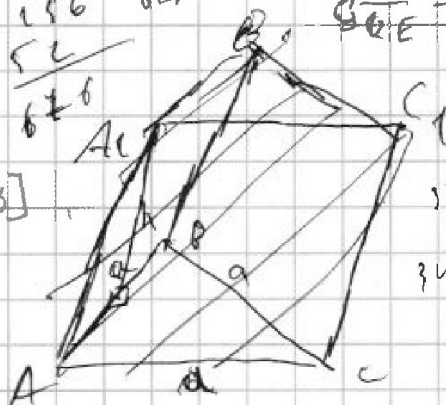
$$\Rightarrow y = x \cdot \sqrt{10} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 24 \\ \hline 189 \end{array}$$

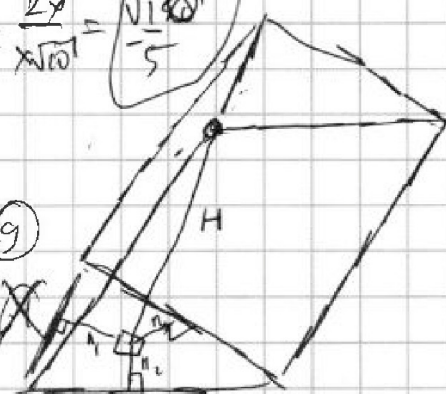
$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 25 \\ \hline 156 \\ 650 \\ \hline 656 \end{array}$$

$$\frac{CD}{DE} = \frac{AC}{AD} = \frac{2x}{x\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$a \in [1; 26]$
 $a \neq 1, 2$



$14-15 \neq 9$
 $34+24 =$



$(a-c) \cdot (b-c) = p^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow a-c=1$
 $b-c=p^2$

$$S = \sqrt{\frac{3a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$b-a=p^2-1$$

$$b-a=(p-1) \cdot (p+1)$$

$(15) \{ C_{2000}^4 - C_{1000}^2$

карм. уловы либо 1 либо 3
символов.

26 24 25 22 20 18 17

$p \leq 17$
 $b-a=3$
 $a-b=3$

$$C^2 - (a+b) \cdot C + ab = p^2$$

$$C = \frac{a+b \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4ab + 4p^2}}{2} = \frac{a+b \pm \sqrt{(a-b)^2 + 4p^2}}{2}$$

2 3 5 7 9 11 13 17 19 23

$p=2 \Rightarrow b-a=4 \quad a-c=1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} b \cdot q^6 = \sqrt{(25x-9) \cdot (x-6)^3} & (1) \\ b \cdot q^8 = x+3 & (2) \\ b \cdot q^{14} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} & (3) \end{cases} \quad \text{ОДЗ: } x \notin \left[\frac{9}{25}; 6\right]$$

$$(1) \cdot (2) = (3) \cdot b \Rightarrow \sqrt{x-6} \cdot (x+3) = \sqrt{\frac{1}{(x-6)^3} \cdot b}$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{(x-6)^4 \cdot (x+3)} = (x-6)^2 \cdot \sqrt{x+3}$$

$$q = \sqrt[8]{\frac{x+3}{b}} = \sqrt[8]{\frac{1}{(x-6)^2}} = \sqrt[4]{\frac{1}{x-6}}$$

$$-7 \cdot 2^8 \cdot \frac{1}{2^6} = \sqrt{-259 \cdot (-16)}$$

$$x = -2$$

$$b = 2^6$$

$$q = \sqrt[8]{\frac{1}{2^6}}$$

$$b - a = 3 \quad \text{X}$$

$$b - a = 8$$

$$b - a = 24 \quad \text{X}$$

$$b - a = 48 \quad \text{X}$$

$$b - a = 120 \quad \text{X}$$

$$b - a = 168 \quad \text{X}$$

$$b - a = 288 \quad \text{X}$$

$$b - a = 528 \quad \text{X}$$

$$2^8 \cdot \sqrt[8]{\frac{1}{2^6}} = \sqrt{-59 \cdot (-8)} \leq \sqrt{472}$$

$$2^5 \cdot \sqrt[5]{2} = 2 \sqrt{2} \cdot \sqrt{59} < 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 2^3$$

$$2 \cdot \sqrt{2} > \sqrt{2}$$

$$\begin{array}{r} \times 702 \\ 4 \\ \hline 2808 \end{array}$$

$$2808 + 1 = 2809 = 53^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

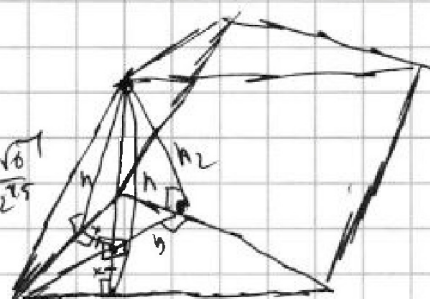
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$458 = 2 \cdot 279 = 2 \cdot 9 \cdot 31$$

$$x=0$$

$$q = \frac{1}{4\pi r^2}$$

$$b = \frac{4\sqrt{6}}{4 \cdot 2^5} = \frac{\sqrt{6}}{2^5}$$



$$h = \sqrt{M^2 + x^2}$$

$$a \cdot h = 3$$

$$a \cdot h_2 = 2$$

$$h_2 = \sqrt{M^2 + y^2}$$

$$\begin{array}{r} \times 31 \\ 31 \\ \hline 93 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 31 \\ 93 \\ \hline 561 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 31 \\ 93 \\ \hline 2883 \\ \hline 24791 \end{array}$$

$$\begin{cases} a \cdot \sqrt{M^2 + x^2} = 3 \\ a \cdot \sqrt{M^2 + y^2} = 2 \\ \frac{1}{2} \cdot a \cdot (2x + y) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \times 27 \\ 4 \\ \hline 108 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 18 \\ 25 \\ \hline 5.50 = 450 \end{array}$$

$$7 \cdot 10 = 8$$

$$\begin{array}{r} \times 71 \\ 9 \\ \hline 639 \\ \hline 358 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 71 \\ 31 \\ \hline 218 \\ \hline 2201 \end{array}$$

$$OD3: x \notin \left[\frac{9}{25}; 6 \right]$$

$$ODP: x > 3$$

$$\begin{cases} b \cdot q^6 = \sqrt{(25x-9) \cdot (x-6)} \\ b \cdot q^8 = x+3 \quad (1) \\ b \cdot q^{14} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^5}} \quad (3) \end{cases}$$

$$(1) : (3): q^8 = \sqrt{\frac{1}{(x-6)^4}} \Rightarrow q = \sqrt[4]{\frac{1}{(x-6)^4}}$$

$$(1) \cdot (2) : (x+3) \cdot \sqrt{(25x-9) \cdot (x-6)} = b^2 \cdot q^{14} = b \cdot (b \cdot q^{14})$$

$$= \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \cdot b \Rightarrow b = (x+3) \cdot \sqrt{(x-6)^4} = (x+3)(x-6)^2$$

$$ODP: x > -3$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ 180 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 324 \\ \times 18 \\ \hline \end{array}$$

$$- 2 + 4 + 8 + 8$$