



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



6. 1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}, \text{ тринадцатый член равен } 5-x, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{(13x-35)(x+1)}.$$

- [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

- [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 560$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.

$$\frac{12}{3}$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad 4 \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$$

$$\frac{4 \cdot 3^3}{4^3} + \frac{6 \cdot 2^2}{4^2} + 3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{-28}{16} + \frac{52}{16} - \frac{9}{4} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$$

$$52 - 2 \cdot 2 = 50 - 5 \cdot 25 = -$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5 - x = \sqrt{\frac{14x - 35}{(x+1)^2}} \cdot \sqrt{(x-1)^3} \quad (=)$$

$$5 - x = \sqrt{35 - 13x} \quad (=) \quad x^2 - 10x + 25 - 35 + 13x = 0 \quad (=)$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \quad (=) \quad (x+5)(x-2) = 0 \quad (=) \quad \begin{cases} x = -5 \\ x = 2 \end{cases}$$

~~45/13x~~ $x < -1 \Rightarrow x = 2$ - не решение.

Ответ: $\{-5; 3\}$.



1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

a_n - геом. прогрессия.

$$a_4 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}; a_{13} = 5-x;$$

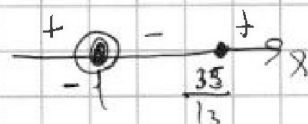
ограничения:
 $x \neq -1$

$$a_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$(13x-35)(x+1) \geq 0$$

q - ариф. прогрессия, тогда $a_{15} = a_4 \cdot q^8$

$$\sqrt{(13x-35)(x+1)} = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot q^8$$



$$\begin{cases} 13x-35=0 \quad (1); \quad (=) \quad x = \frac{35}{13} \Rightarrow a_4 = a_{15} = 0 \Rightarrow a_{13} = a_4 \cdot q^6 = 0, \\ \text{но } a_{13} = 5 - \frac{35}{13} \neq 0 \Rightarrow 13x-35 \neq 0. \end{cases}$$

~~Решение (2)~~ $13x-35 > 0$ и $x+1 > 0$. Тогда делим обе части на $\sqrt{13x-35} \neq 0$

и получаем: $\sqrt{x+1} = \frac{1}{\sqrt{(x+1)^3}} \cdot q^8 \Rightarrow q^8 = \sqrt{(x+1)^4} \Rightarrow q^8 = (x+1)^2$

$$q = \pm \sqrt[8]{(x+1)^2} \Rightarrow q = \pm \sqrt[4]{x+1} \quad + \frac{6}{2} = \pm \frac{3}{2}$$

$$a_{13} = a_4 \cdot q^6 \Rightarrow 5-x = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot \left(\sqrt[4]{x+1}\right)^6 \Rightarrow$$

$$5-x = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot \sqrt{(x+1)^3} \Rightarrow 5-x = \sqrt{13x-35} \quad (2)$$

$$\text{Возведем в квадрат: } x^2 - 10x + 25 - 13x + 35 = 0 \Rightarrow x^2 - 23x + 60 = 0 \Rightarrow$$

$$(x-20)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 20 - \text{не подходит. т.к. } 5-x > 0 \\ x = 3. \end{cases}$$

$$x=3: 13 \cdot 3 - 35 = 39 - 35 > 0. \quad \Rightarrow x=3 - \text{решение.}$$

(3): $13x-35 < 0 \Rightarrow x+1 < 0$ делим обе части на $\sqrt{35-13x} \neq 0$.

$$\sqrt{-x-1} = \frac{1}{\sqrt{(-x-1)^3}} \cdot q^8 \Rightarrow q^8 = \sqrt{(-x-1)^4} \Rightarrow q^8 = (-x-1)^2$$

$$q = \pm \sqrt[8]{-x-1} \quad a_{13} = a_4 \cdot q^6 \Rightarrow 5-x = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot \left(\sqrt[4]{-x-1}\right)^6$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☒3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{x+y-x^2+z} & (1) \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} & (2) \end{cases}$$

y=12

$$(2) |y+1| + |y-12| + |y+12| + |y-12| \geq |y+1+y-12-y+12-y+12|$$

11
13

Решение

$$x \geq -3$$

$$4-x-z \geq 0$$

$$x+y-x^2+z \geq 0$$

$$z^2 \leq 169$$

$$|z| \leq 13$$

левая часть больше или равна 13, правая часть меньше или равна 13, т.к. $z^2 \geq 0 \Rightarrow$ равенство достигается только тогда, когда обе части равны 13 $\Rightarrow$

$$\sqrt{169-z^2} = 13 \Rightarrow z = 0$$

$$\begin{aligned} 13-36+13 &= -2z \\ -13 &= -2z \\ z &= \frac{13}{2} \end{aligned}$$

$$|y+1| + 3|y-12| = 13 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4y+1-36=13 \\ y \geq 12 \end{cases}$$

$$y \geq 12$$

$$\begin{cases} y+1-3y+36=13 \\ -1 \leq y \leq 12 \end{cases}$$

$$-1 \leq y \leq 12$$

$$\begin{cases} -y-1-3y+36 \leq 13 \\ y \leq -1 \end{cases}$$

$$(1) \sqrt{y} = 12$$

$$y \geq 12$$

$$(2) \sqrt{y} = 12 \Rightarrow y = 144$$

$$y \leq 12$$

$$\begin{cases} y = \frac{22}{4} \\ y \leq -1 \end{cases}$$

$y=12$; $z=0$ - решение (2), подставляем их в (1):

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{x+12-x^2} \quad (2)$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{(x+3)(4-x)} \quad (2)$$

$$1+3+4-x-2\sqrt{x+3}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{(x+3)(4-x)} - 5 \quad (2)$$

$$x+3+4-x-2\sqrt{(x+3)(4-x)} = 4(x+3)(4-x)+25-20\sqrt{(x+3)(4-x)}$$

Решение

$$x \geq -3$$

$$x \leq 4$$

$$\sqrt{(x+3)(4-x)} = t$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$7-2t = 4t^2 + 25 - 20t \Leftrightarrow 4t^2 - 18t + 18 = 0 \Leftrightarrow$$

~~$$(4t-9)(t-2) \neq 0$$~~

~~$$(4t-9)(t-2) \neq 0$$~~

~~$$4t-9=13 \Rightarrow t=10$$~~

$$2t^2 - 9t + 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 8 \cdot 9}}{4} \Leftrightarrow t = \frac{9 \pm 3}{4}$$

$$\begin{cases} t = \frac{6}{4} \\ t = 3 \end{cases}$$

одн. замена: $\begin{cases} \sqrt{(x+3)(4-x)} = 3 \\ \sqrt{(x+3)(4-x)} = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow$

$$-x^2 + x + 12 = 9$$

$$-x^2 + x + 12 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 16 \cdot 39}}{8} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4x^2 - 4x - 48 + 9 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 39 = 0$$

$$\begin{cases} x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{40}}{2} \end{cases}$$

по заданию $-3 \leq x \leq 4$

$$x = \frac{1}{2} + \sqrt{10} < \frac{1}{2} + \sqrt{13,25} = 4 \quad (V)$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} - \text{случ. неинт.}, \text{ т.к. неинт. промежуток. и } \frac{105}{12,25}$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{10}}{2} - \sqrt{10} > \frac{1}{2} - \sqrt{13,25} = -3 \quad (V)$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} > \frac{1}{2} - \sqrt{10} - \text{случ. неинт.}$$

Ответ: $\left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}; 12; 0\right); \left(\frac{1 - \sqrt{13}}{2}; 12; 0\right); \left(\frac{1 + \sqrt{40}}{2}; 12; 0\right); \left(\frac{1 - \sqrt{40}}{2}; 12; 0\right)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4\left(t + \frac{1}{2}\right)^3 - p - 2 = 0 \quad (*)$$

$$\left(t + \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{p+2}{4} \quad (**) \quad t = \sqrt[3]{\frac{p+2}{4}} - \frac{1}{2} \quad (**)$$

$$\cos x = \sqrt[3]{\frac{p+2}{4}} - \frac{1}{2}$$

$$4\left(t + \frac{1}{2}\right)^3 - p - 3,5 = 0 \quad (***)$$

$$\left(t + \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{p+3,5}{4} \quad (***) \quad t = \sqrt[3]{\frac{p+3,5}{4}} - \frac{1}{2} \quad (***)$$

$$\cos x = \sqrt[3]{\frac{p+3,5}{4}} - \frac{1}{2} \quad (**) \quad x = \pm \arccos \sqrt[3]{\frac{p+3,5}{4}} - \frac{1}{2} + 2\pi k$$

$$\text{Ответ: } x = \pm \arccos \sqrt[3]{\frac{p+3,5}{4}} - \frac{1}{2} + 2\pi k, \quad p \in (-4; 10);$$

$$x = \pi + 2\pi k, \quad p = -4; \quad x = 2\pi k, \quad p = 10.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p \quad - \text{разрешимо.}$$

$$4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 6\cos x - 3\cos x - 3 - p = 0 \quad (\Rightarrow)$$

$$4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 - p = 0 \quad 36 = \cos x$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 - p = f(t) \quad -1 \leq t \leq 1$$

$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3$$

$$12t^2 + 12t + 3 = 0 \quad (\Rightarrow) \quad \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(t) \geq 0 \quad \Rightarrow$$

$f(t) \nearrow \Rightarrow$ по т. о прм. значениям $f(t)$, где $f(t)$ - непрерывна.

Корней неабитуально и глобально, чтобы $f(-1) \leq 0$ и

$f(1) \geq 0$, т.к. $f(t) \nearrow$ монотонно и непрерывно. $\Rightarrow$

$$f(-1) \leq 0 \quad (\Rightarrow) \quad -4 + 6 - 3 - 3 - p \leq 0 \quad \Rightarrow \quad p \geq -4$$

$$f(1) \geq 0 \quad (\Rightarrow) \quad 4 + 6 + 3 - 3 - p \geq 0 \quad \Rightarrow \quad p \leq 10.$$

$$\begin{cases} p \geq -4 \\ p \leq 10 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{при } p \in [-4; 10] - \text{ур-е разрешимо.}$$

Решим экв., кб при $p = -4$ $f = -1$ - корень
 $p = 10$ $f = 1$ - корень $\Rightarrow$

$$\cos x = -1 \quad (\Rightarrow) \quad x = \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad p = -4$$

$$\cos x = 1 \quad (\Rightarrow) \quad x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad p = 10.$$

при $p \in (-4; 10)$: - одно решение имеет. т.к. $f(t) \nearrow$

можно решить на $(0; \pi) \cup (\pi; 2\pi)$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 - p = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

AAAAA

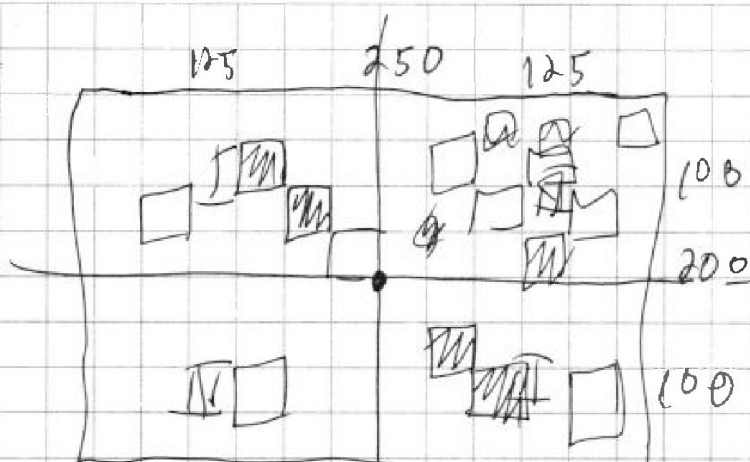


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



См. 94. чертёж:

Выбираем клетку из I четверти $\rightarrow$ автоматически получаем
меху, см. ей из II четверти.

Формально

с II и IV четвертей.

т.е. мы можем выбрать 4 клетки из одной четверти;

$$\begin{aligned} & \sqrt{x+5} - \sqrt{4-x} = 1 \\ & \sqrt{x+5} + \sqrt{4-x} = 2 \\ & \sqrt{x+5} - \sqrt{4-x} = 1 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4t^3 + 6t^2 + 3t = 3 + p \quad p \in [-4, 10]$$

ЧНА ЧНА

$$a, b, c \in \mathbb{Z}$$

$$a > b$$

$$a - b \not\equiv 3$$

$$(a - c)(b - c) = p^2$$

$$a + b^2 = 560$$

$$\begin{aligned} a - c &= d_1^{d_1} \cdot d_2^{d_2} \cdot \dots \cdot d_n^{d_n} \\ b - c &= e_1^{e_1} \cdot e_2^{e_2} \cdot \dots \cdot e_m^{e_m} \end{aligned} \Rightarrow (a - c)(b - c) = d_1^{d_1} \cdot d_2^{d_2} \cdot \dots \cdot d_n^{d_n} \cdot e_1^{e_1} \cdot e_2^{e_2} \cdot \dots \cdot e_m^{e_m}$$

||
 $p^2 \in \mathbb{Z}$
пробачили

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{cases} a - c = \pm 1 \\ b - c = \pm p^2 \\ a - c = \pm p^2 \\ b - c = \pm 1 \end{cases} & \text{— знаки у всех сгруппировать} \\ \begin{cases} a - c = \pm p \\ b - c = \pm p \end{cases} & \text{— ил } +, \text{ ил } - \end{aligned}$$

(1) $a - c = 1 \Rightarrow b - c = p^2$
 $c = 1 - a$
 $b + a - 1 = p^2$
 $a + b^2 = 560 \Rightarrow a = 560 - b^2$
 $b + 560 - b^2 - 1 = p^2 \Rightarrow$

$$b - b^2 + 559 = p^2$$

$$b(1 - b) = p^2 - 559$$

$$p^2 = 1, 4, 9, 25, 49, 121, 169, \dots$$

$$a > b \Rightarrow a - c > b - c \Rightarrow \text{при } a - c = \pm 1 \text{ — нет решений}$$

Всего 7 вариантов не проверяет. аналогично:

$$a - c = p^2, b - c = -1 \quad a - c = b - c = \text{тоже но подвеш. ф.к.}$$

$$a > b, \quad a - c = \pm p$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a - c = -p^2; \quad b - c = -1 \text{ — тоже не подходит вер.}$$

$$-p^2 \leq -1; \quad a - c > b - c, \text{ т.е. } a > b \Rightarrow$$

Остается только один вариант, когда

$$\begin{cases} a - c = p^2 \\ b - c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + 1 = p^2 \\ c = b - 1 \end{cases} \Rightarrow a - b = (p - 1)(p + 1)$$

$$a - b \text{ д. } 3. \Rightarrow \text{ДА}$$

$$a + b^2 = 560 \Rightarrow a = 560 - b^2, \text{ т.е. } (p - 1)(p + 1) \text{ д. } 3.$$

$$561 - b^2 - b = p^2 \quad p^2 \neq 1$$

~~ДА~~

$$b^2 + b = 1$$

$$b(b + 1) = 561 - p^2$$

$$b(b + 1) = 21^2 + 11^2 - p^2$$

$$p^2 \text{ д. } 3$$

$$p^2 = 561 - b(b + 1)$$

$$p^2 = 21^2 + 11^2 - b(b + 1)$$

~~ДА~~ ~~б.д.м. б.д.м.~~

$$p \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow p \text{ д. } 3, \text{ но}$$

p — простое число,

$$\text{значит } p^2 = 9.$$

$$\begin{aligned} b(b + 1) &= 21^2 \\ b(b + 1) &= 11^2 \end{aligned}$$

b и $b + 1$ — взаимно простые.

$$a - b + 1 = 9 \Rightarrow \begin{cases} a - b = 8 \\ a = b + 8 \end{cases} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\begin{cases} a + b^2 = 560 \\ b^2 + b + 8 = 560 \end{cases}$$

$$b^2 + b - 552 = 0 \Rightarrow b = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 552}}{2} \Rightarrow b = \frac{1 + 47}{2} \quad (\Leftrightarrow)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} b = 24 \\ b = -23. \end{cases}$$

$$a = 8 + b \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = 32 \\ a = -15. \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = b - 1 \\ c = -24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 23 \\ c = -24 \end{cases}$$

Ans.

Ответ: $(32; 24; 23); (-23; -15; -24)$.

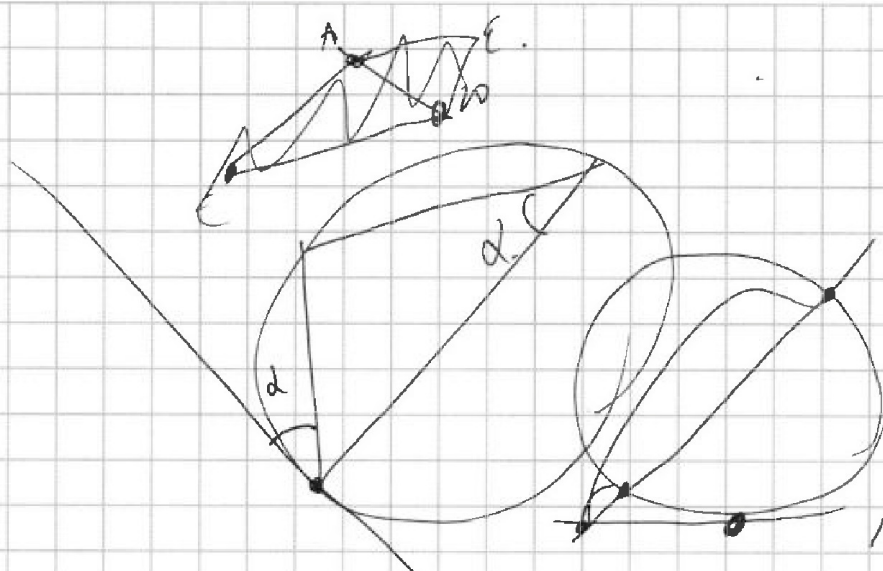


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

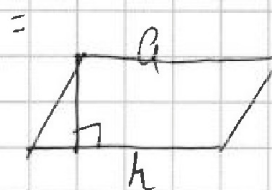
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



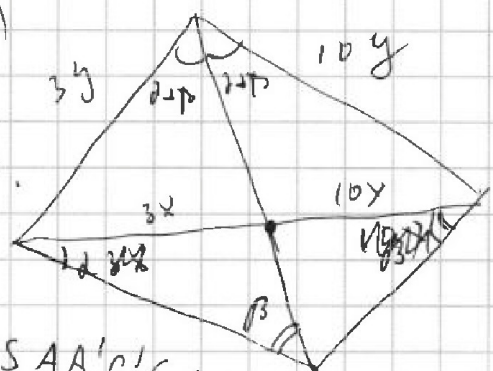
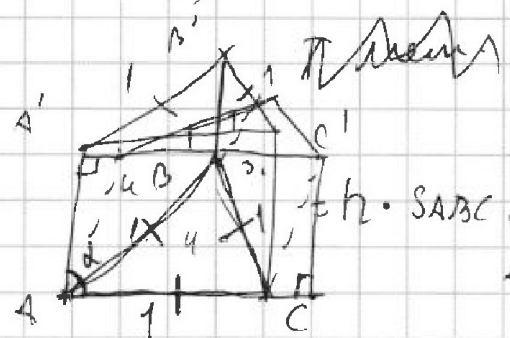
$$\frac{CD}{\sin \alpha} =$$

$$BD \cdot DE = AD \cdot DP.$$



$$ah = 180^\circ - \alpha - 2\beta + 2\alpha + 2\beta$$

$$IE - IC = CM^2 + BM^2 = CM^2 + BM^2 + DE^2 + EM^2 - 2CM \cdot BD \cos \alpha - 2BM \cdot EM \cos \beta$$



$$\angle CAQ = 2(\alpha - \beta)$$

$$S_{AA'C'C} = 4$$

$$AE \cdot AA' \sin \alpha = 4$$

$$\angle CDE = 180^\circ - \alpha - \beta.$$

$$CM^2 =$$

$$AD^2 = CM^2 + CD^2 - 2CM \cdot CD \cos \alpha$$

$$BM^2 = DE^2 + EM^2 - 2DE \cdot EM \cos \beta.$$



$$180^\circ - \alpha - \beta + 2\alpha + 2\beta = 180^\circ + \alpha.$$

$$\begin{cases} CB^2 = CM^2 + BM^2 - 2CM \cdot BM \cos \alpha & I \\ BM^2 = DE^2 + EM^2 - 2DE \cdot EM \cos \beta & II \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a > b$$

$$a, b, c \in \mathbb{Z}$$

$$a - b + 5 = 0$$

$$a - b \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow \begin{cases} a - b \equiv 1 \\ a - b \equiv 2 \end{cases}$$

$$a - b - 2ab = 15$$

$$a(1 - 2b) - b = 15$$

$$(a - c)(b - c) = d^{2m} \text{ — квадрат нечетного или четного числа.}$$

$$a + b^2 = 560$$

$$a + b^2 = 5 \cdot 2 \cdot 56 = 5 \cdot 2^2 \cdot 28 = 5 \cdot 2^3 \cdot 14 = 5 \cdot 2^4 \cdot 7$$

$$b^2 = 560 - a$$

$$(a - c)(b - c) = d^{2m}, d \in \mathbb{N}$$

d — простое.

(или)

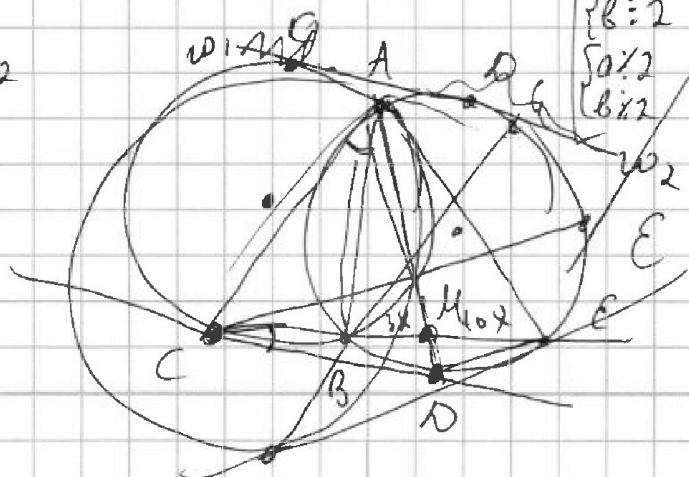
$$(a - c) = p_1^{d_1} \cdot p_2^{d_2} \cdot \dots \cdot p_k^{d_k} \text{ — согласно теореме арифметики.}$$

$$(b - c) = p_1^{d'_1} \cdot p_2^{d'_2} \cdot p_3^{d'_3} \cdot \dots \cdot p_e^{d'_e} \Rightarrow (a - c)(b - c) = p_1^{d_1} \cdot p_2^{d_2} \cdot \dots \cdot p_k^{d_k} \cdot p_1^{d'_1} \cdot p_2^{d'_2} \cdot \dots \cdot p_e^{d'_e} \text{ — простое число } (e)$$

$$\begin{cases} a - c = \pm 1 \\ b - c = \pm 2^{2m} \\ a - c = \pm d^{2m} \\ a - c = \pm 1 \\ a - c = \pm d^{2m} \\ a - c = \pm d^2 \end{cases}$$

$$a + b + c = 560$$

$$a + b^2 = 5 \cdot 2^4 \cdot 7 \Rightarrow \begin{cases} a: 2 \\ b: 2 \\ 50: 2 \\ 6: 2 \end{cases}$$



ЕХ
СХ

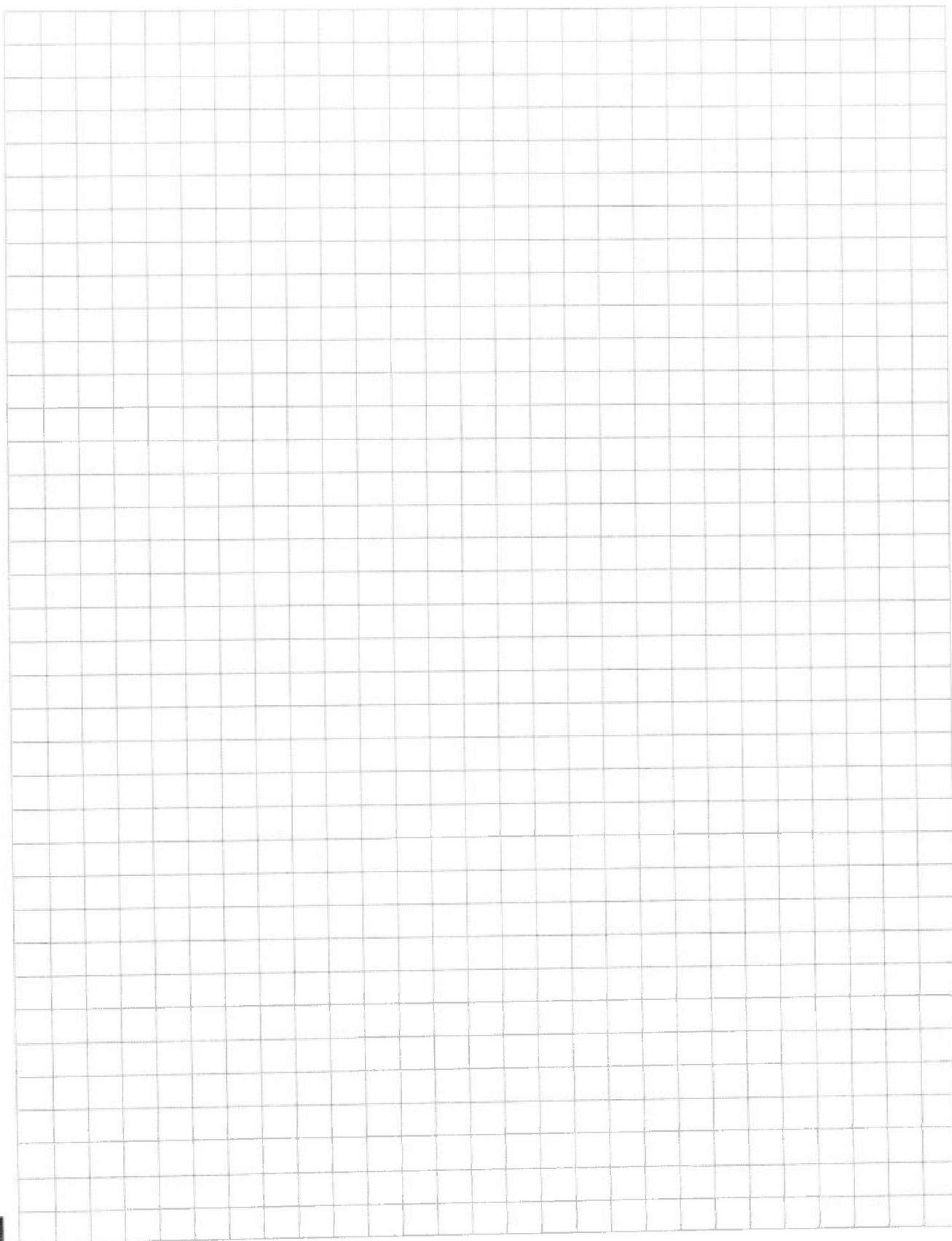


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☒4
☒5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p \quad (- \text{решилим}).$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 3 \cdot (2\cos^2 x - 1) + 6\cos x = p \quad (\Rightarrow)$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos^2 x - 3 + 6\cos x = p \quad (\Rightarrow)$$

$$4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 = p. \quad 3\cos x = 6.$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p \quad \text{решилим при } -|2t| \leq 1 \Rightarrow$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 - p = f(t)$$

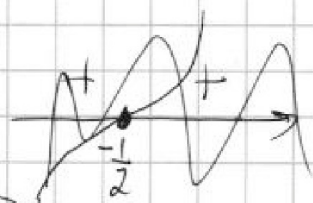
$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3$$

$$12t^2 + 12t + 3 = 0 \quad (\Rightarrow) \quad 4t^2 + 4t + 1 = 0 \quad \Delta = 16 - 16 = 0$$

$$t = -\frac{1}{2}$$

$$(t + \frac{1}{2})^2 = 0$$

$f(t)$ — кубическая
ф-ция $\Rightarrow$



$$(t + \frac{1}{2})^2 = f(t)$$

$$(t + \frac{1}{2})^2 \geq 0.$$

имеет макс. один корень. $\Rightarrow$

$$f(-\frac{1}{2}) = 0$$

$$f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8} + \frac{6}{4} - \frac{3}{2} - 3 - p = -5 - p + \frac{3}{2}$$

из теоремы о промежуточной функции. должны выполняться следующие неравенства:

$$f(-1) \leq 0 \quad (1)$$

$$f(1) \geq 0 \quad (2) \quad \text{— условие наличия решений у кубического уравнения.}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

реш (1):

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 - p \leq 0$$

$$t=1: -4 + 6 - 3 - 3 - p \leq 0 (=)$$

$$p \geq -4.$$

реш (2):

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 - p \geq 0; t=1 \Rightarrow$$

$$4 + 6 + 3 - 3 - p \geq 0 (=)$$

$$p \leq 10. \Rightarrow$$

$$\text{Ответ: } [-4; 10].$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p \geq -4 \\ p \leq 10 \end{cases} \Rightarrow p \in [-4; 10].$$