



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q - простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

a_1 - 1-й член арифм. прогрессии

$$a_3 = 3x + 3$$

$$a_5 = (x^2 + 2x)^2$$

$$a_9 = 3x^2$$

$$\Rightarrow a_5 - a_3 = (a_1 + 4d) - (a_1 + 2d) = 2d, \text{ где } d - \text{разность арифм. прогр.}$$

$$a_9 - a_5 = (a_1 + 8d) - (a_1 + 4d) = 4d.$$

"

$$2(a_9 - a_5) = a_9 - a_3$$

$$2((x^2 + 2x)^2 - 3x - 3) = 3x^2 - (x^2 + 2x)^2$$

$$2x^4 + 8x^3 + 8x^2 - 6x - 6 = 3x^2 - x^4 - 4x^3 - 4x^2$$

$$3x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 6x - 6 = 0$$

$$(x+1)(3x^3 + 9x^2 - 6) = 0$$

$$(x+1)(x+1)(3x^2 + 6x - 6) = 0$$

$$(x+1)^2(3x^2 + 6x - 6) \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+18}}{3} = \frac{-3 \pm \sqrt{27}}{3} = \frac{-3 \pm 3\sqrt{3}}{3} = -1 \pm \sqrt{3}$$

"

либо $x = 1$

$$\text{либо } x = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

$$x = \begin{cases} x = 1 - 1 \\ x = \sqrt{3} - 1 \\ x = -1 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Ответ: либо $x = -1$

либо $x = \sqrt{3} - 1$

либо $x = -1 - \sqrt{3}$



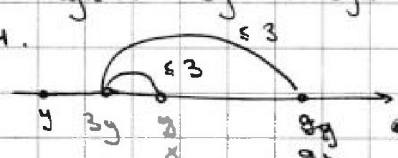
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow 3|3x-y| \leq 3 \Rightarrow |9x-3y| \leq 3.$$

1 случай. $3y$ находится не между x и $9x$ на числ. прямой
1.1.  без разницы, в какую сторону смотрит

$|9x-x| \leq 3$, т.е. смотрим на расстояние

$$|8x| \leq 3$$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

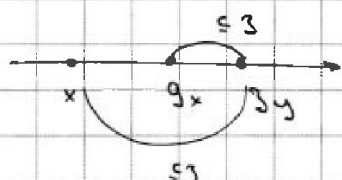
$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3y \leq 3 \\ 3y-x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 3+3y \\ y \leq \frac{3+x}{3} \end{cases}$$

1.2



Аналогично $|8x| \leq 3$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

В обоих случаях $x \leq \frac{3}{8} \Rightarrow 3x \leq \frac{9}{8} \Rightarrow |3x-y| \leq 1$

Однако $|x-3y| \leq 3 \Rightarrow 3y \leq 3+x \Rightarrow y \leq \frac{3+x}{3}$

$|x-3y| \leq 3 \Rightarrow x$ больше $3y$ ① т.е. при $x < 0$ $9x$ будет

① x больше $3y \Rightarrow 3x$ больше y

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$4y+8x \leq \frac{4}{8} + \frac{3}{8} \cdot 8 = \frac{7}{2}$$

② $4y+8x \leq$

$$\leq 4 \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \cdot 8 = \frac{15}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

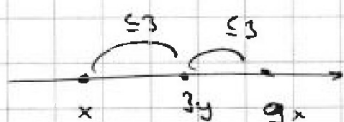
1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Однако если $3y$ между x и $9x$



$$\Rightarrow |9x - x| \leq 6$$

$$x \leq \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$3y - x \leq 3 \Rightarrow y \leq \frac{3+x}{3} = \frac{3+\frac{3}{4}}{3} = \frac{5}{4}$$

$$x \leq \frac{3}{4} \Rightarrow 4y + 8x \leq 4 \cdot \frac{5}{4} + 8 \cdot \frac{3}{4} = 5 + 6 = 11$$

$y \leq \frac{5}{4}$ — самая сильная оценка из всех полученных

Пример: $x = \frac{3}{4}$ $|x - 3y| = \left| \frac{3}{4} - \frac{15}{4} \right| = 3 \leq 3$ (+) подходит.

$y = \frac{5}{4}$ $|3x - y| = \left| \frac{9}{4} - \frac{5}{4} \right| = 1 \leq 1$ (+) подходит

max значение $4x + 4y = 11$, достигается при $x = \frac{3}{4}$ и $y = \frac{5}{4}$

Ответ: "



1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)(m+n-9)$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

Одно из чисел $= 13p^2$, а другое $75q^2$
 p, q - простые

1 случай.

$$A = 13p^2$$

$$B = 75q^2$$

$$1 \text{ вариант. } \begin{cases} m+n = 13 \\ m+n-9 = p^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 9 = 13 - p^2$$

$$p^2 = 4 \Rightarrow p = 2 \Rightarrow m+n-3 = 10$$

2 вариант.

$$\begin{cases} m+n = 13p \\ m+n-9 = p \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 = 13p - p \Rightarrow 9 = 12p \Rightarrow p = \frac{3}{4}$$

не подходит, м.к. $p \in \mathbb{N}$

3 вариант.

$$\begin{cases} m+n = 13p^2 \\ m+n-9 = 1 \end{cases}$$

"

$$m+n = 10 \Rightarrow 10 = 13p^2$$

$$p^2 = \frac{10}{13} \text{ (м.к.)}$$

$p \geq 1$

4 вариант.

$$\begin{cases} m+n = p^2 \\ m+n-9 = 13 \end{cases}$$

"

$$9 = p^2 - 13 \Rightarrow p^2 = 22 \Rightarrow p = \sqrt{22} \text{ (м.к.)}$$

5 вариант.

$$\begin{cases} m+n = p \\ m+n-9 = 13p \end{cases} \Rightarrow 9 = p - 13p$$

$$\Rightarrow 9 = p - 13p$$

$$p = -\frac{3}{4} \text{ (м.к.)}$$

6 вариант.

$$\begin{cases} m+n = 1 \\ m+n-9 = 13p^2 \end{cases}$$

$$9 = 1 - 13p^2$$

$$p^2 = -\frac{8}{13} \text{ (м.к.)}$$

$$mn = \frac{75 \cdot 4}{10} = 30$$

$$m+n = 13$$

мыо $m \geq n$.

$$\Rightarrow m-n = \sqrt{13^2 - 4 \cdot 30}$$

$$\sqrt{(m+n)^2 - 4mn}$$

$$m-n = 7 \Rightarrow \begin{cases} 2m = 20 \\ 2n = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 10 \\ n = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p = 2 \\ q = 2 \end{cases}$$

входят
и соотноши

подходит $(10, 3)$ и $(3, 10)$

простые $(+)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Больше вариантов в этом случае нет, т.к. мы можем распределить простое между двумя свободными только такими образом

2 случай

$$A = 75q^2$$

$$B = 13p^2$$

$$\Rightarrow mn(m+n-3) = 13p^2$$

1 вариант

$$m = n = p$$

$$m+n-3 = 13$$

$$\Rightarrow 2p-3=13$$

$$p = 8 \ominus, \text{ т.к. } p - \text{ простое}$$

2 вариант.

$$m \mid 13 \text{ (т.к. } m \mid n \text{ и } n \text{ делит } 13 \text{)}$$

$$m = m+n-3 = p$$

$$n = 13 \Rightarrow$$

$$p = 13-3 = p$$

$$10 = 0 \ominus$$

нет подходит

3 вариант:

Один множитель — это 1

Одно из mn равно 1

$$\Rightarrow n(n-2) = 13p^2 \Rightarrow$$

$$3.1. n = 13$$

$$n-2 = 13p^2 \Rightarrow$$

$$p^2 = 0$$

$$p = 3$$

$$3.2. n = p$$

$$n-2 = 13p$$

$$\Rightarrow 2 = p - 13p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = -\frac{1}{6} \ominus$$

$$p \in \mathbb{N}$$

$$3.3. n = 13p$$

$$n-2 = p$$

$$2 = 12p \Rightarrow p = \frac{1}{6}$$

$$\ominus \text{ т.к. } p \in \mathbb{N}$$

$$m = 1$$

$$n = 13$$

$$p = 3 \Rightarrow A = 14 \cdot 5 = 75q^2$$

$$14 = 15q^2 \ominus$$

$$\text{т.к. } 14 \neq 15$$

$$3.4. n = 13p^2$$

$$n-2 = 1$$

$$\Rightarrow 2 = 13p^2 - 1 \Rightarrow 13p^2 = 3 \Rightarrow p = \sqrt{\frac{3}{13}}$$

$$\ominus \text{ т.к. } p \in \mathbb{N}$$

$$3.5. n = p^2$$

$$n-2 = 13$$

$$\Rightarrow 2 = p^2 - 13$$

$$p^2 = 15 \ominus, \text{ т.к. } p = \sqrt{15}$$

$$p \in \mathbb{N} \text{ (?)}$$

$$3.6$$

$$n = 1$$

$$n-2 = 13p^2$$

$$\Rightarrow 2 = 1 - 13p^2 \Rightarrow 13p^2 = -1$$

$$\ominus \text{ т.к. } 13p^2 \geq 0$$

Аналогично если $n = 1$ подходящих случаев нет

4 вариант:

$$m+n-2 = 1 \Rightarrow$$

$$m+n-3 = -6$$

$$\Rightarrow A = -18 = 75q^2 \text{ (?)}$$

$$\text{если } 75q^2 \geq 0$$

$$\text{Ответ: } (10, 3); (3, 10)$$

$$\ominus \text{ не подходит}$$



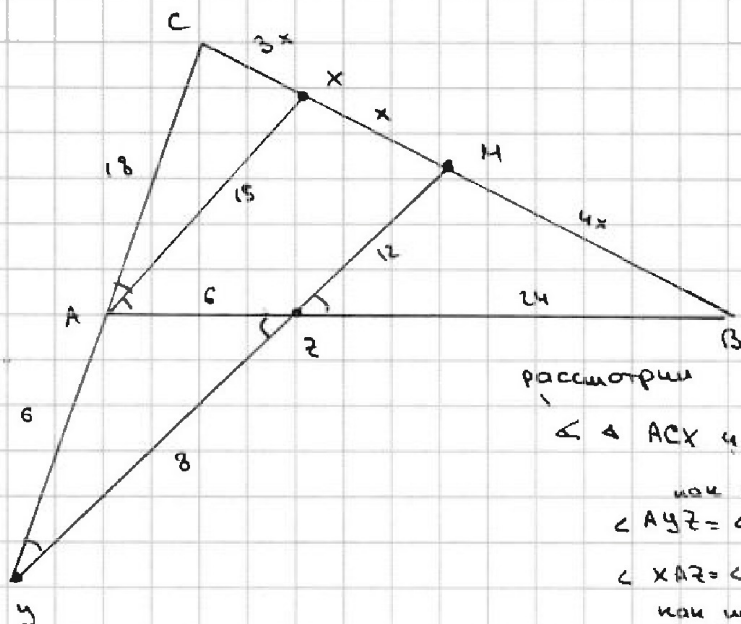
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$BC = ?$$

$$AC = 18$$

$$AZ = 6$$

$$YZ = 8$$

рассмотрим

$\triangle ACX$ и $\triangle AZY$:

или соотв.

$\angle AYX = \angle XAC$, т.к. $AX \parallel YM$,

$\angle XAZ = \angle AZY$, т.к. $AX \parallel ZM$

или покр.

углы.

"

$\angle AYX = \angle AZY \Rightarrow \triangle AZY$ - р/б.

"

$$AY = AZ = 6$$

$\triangle$ т. Меньшая для $\triangle ACB$ и прямой MY .

$$\frac{CA}{AY} \cdot \frac{YZ}{ZM} \cdot \frac{CM}{CB} = 1 \Rightarrow \frac{18}{6} \cdot \frac{8}{y} \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow y = 12$$

т.к. M - середина стороны

"

$$ZM = 12$$

По т. Фалеса для прямых $AX \parallel YM$:

$\triangle ACX$ и $\triangle CYM$

$$\frac{CX}{CM} = \frac{AY}{YM} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{AX}{YM} = \frac{AC}{CY}$$

$$\frac{AX}{12+8} = \frac{18}{18+6}$$

$$\Rightarrow AX = \frac{18}{24} \cdot 20$$

$$AX = 15$$

По т. Фалеса для прямых $AX \parallel ZM$:

$\triangle BAX$ и $\triangle BZM$

$$\frac{BX}{BZ} = \frac{XM}{AZ}$$

$$\frac{x}{x+6} = \frac{12}{15}$$

$$15x = 12x + 72$$

$$3x = 72$$

$$x = 24$$

$$ZB = 24$$

$\triangle$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \text{м. и. } \frac{CX}{\sin A} &= \frac{3}{\frac{1}{4}} = \frac{CX}{\sin C} = \frac{3}{\frac{3}{4}} \Rightarrow \frac{CX}{\sin A} = \frac{CX}{\sin C} = \frac{3}{\frac{3}{4}} = 4 \\ \Rightarrow \sin A &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\frac{CX}{\sin A} = \frac{3}{\frac{1}{4}} \Rightarrow \frac{CX}{\sin C} = \frac{CX}{\frac{3}{4}} = \frac{3}{\frac{3}{4}} = 4$$

$$\triangle ABC: \text{ по т. Косинусов: } 36 = 36 + 64 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cos \alpha$$

$$\triangle ABC: \angle C = 2$$

$$\cos \alpha = \frac{64}{2 \cdot 6 \cdot 8} = \frac{2}{3}$$

Применим т. Косинусов

$$\text{м. и. } \angle CAX = \angle CAZ$$

$$\cos(\angle CAX) = \cos \alpha$$

$$\text{для } \triangle ACX: \quad 9x^2 = 18^2 + 15^2 - 2 \cdot 18 \cdot 15 \cos \alpha$$

$$36 + 25 - 40 = 9x^2$$

$$x^2 = 18 \cdot 2 + 15^2 - 2 \cdot 18 \cdot 15 \cdot \frac{2}{3}$$

$$x^2 = 24 \Rightarrow x = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$\cos \alpha = \frac{64}{2 \cdot 6 \cdot 8} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Ответ: } BC = 8\sqrt{6}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \quad (1)$$

$$x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 + 5y^2 - \sqrt{x} \quad (2)$$

"

$$(2) \quad x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} = y^4 + 5y^2 + \sqrt{y}$$

Заметим, что $f(x) = x^4 + 5x^2 + \sqrt{x}$ строго возрастает.

$$\text{н.ч.} \quad f(x+\varepsilon) = (x+\varepsilon)^4 + 5(x+\varepsilon)^2 + \sqrt{x+\varepsilon}$$

$\varepsilon > 0$

$$(x+\varepsilon)^4 > x^4, \text{ н.ч. } x \geq 0 \text{ (}\sqrt{x} \text{ определен)} \\ \varepsilon > 0$$

$$(x+\varepsilon)^2 > x^2, \text{ н.ч. } x \geq 0 \text{ и } \varepsilon > 0 \\ \sqrt{x+\varepsilon} > \sqrt{x}$$

"

$f(x+\varepsilon) > f(x)$. Полагается, что $f(x) = f(y)$ только если $x=y$.

"

$x=y$. Подставим в (1)

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$\exists x+1=t \Rightarrow 6-x=7-t \Rightarrow 6+5x-x^2=t(7-t)$$

"

$$\sqrt{t} - \sqrt{7-t} + 5 = 2\sqrt{t(7-t)}$$

$$(\sqrt{t} - \sqrt{7-t})^2 = (2\sqrt{t(7-t)} - 5)^2$$

$$t + (7-t) - 2\sqrt{t(7-t)} = 4t(7-t) - 20\sqrt{t(7-t)} + 25$$

$$\exists \sqrt{t(7-t)}=a \Rightarrow 9-2a=4a^2-20a+25$$

$$4a^2-18a+16=0 \Rightarrow 2a^2-9a+8=0 \Rightarrow a_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-72}}{4}$$

$$a_{1,2} = \begin{cases} a=3 \\ a=\frac{8}{2} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1 случай $a=3 \Rightarrow \sqrt{t(7-t)} = 3$

$$t(7-t) = 9 \Rightarrow t^2 - 7t + 9 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-36}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}$$

если $t = \frac{7+\sqrt{13}}{2} \Rightarrow x = t-1 = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \quad (+) \quad x \geq 0$ подходит.

$t = \frac{7+\sqrt{13}}{2} \Rightarrow x = t-1 = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$ ~~не подходит~~ $t > 0$ $7-t < 0$ $t(7-t) < 0$ ~~не подходит~~

2 случай. $a = \frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{7(7-t)} = \frac{3}{2}$

$$4t^2 - 28t + 9 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{196-36}}{4} = \frac{14 \pm 4\sqrt{10}}{4} = \frac{7 \pm 2\sqrt{10}}{2}$$

если $t = \frac{7+2\sqrt{10}}{2} \Rightarrow x = t-1 = \frac{5+2\sqrt{10}}{2}$, $x \geq 0$ подходит $7-t = \frac{7-2\sqrt{10}}{2} \geq 0$

если $t = \frac{7-2\sqrt{10}}{2} \Rightarrow x = t-1 = \frac{5-2\sqrt{10}}{2}$, $x < 0$ не подходит ($25 < 40$)

Ответ: ~~$\frac{7+\sqrt{13}}{2}$~~ $\left\{ \frac{5+\sqrt{13}}{2}, \frac{5-2\sqrt{10}}{2}, \frac{5+2\sqrt{10}}{2} \right\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

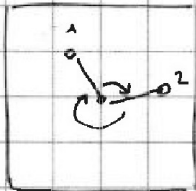
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач думеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Единственная точка, которая никуда не переходит при повороте (т.е. переходит в саму себя) - это центр поворота. (но обе точки ни быть не могут, $\Rightarrow$ $\exists$ 1 из них двигается)

Остальные же точки перейдут в себя после суммарного поворота на 360° (т.е. 4 раза)

Хотим доказать, что для каждого положения точек $\exists$ ^{не} $\frac{3}{4}$, с которыми он совпадает при повороте

Если это не так $\Rightarrow$ какие-то две точки перешли друг в друга за менее, чем 4 поворота $\Rightarrow$ точка $1 \rightarrow 2$
точка $2 \rightarrow 1$

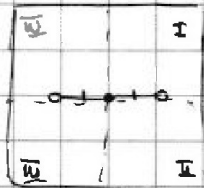


Однако угол поворота $\angle 12$ должен совпадать с углом поворота $2 \rightarrow 1$

В сумме они дают $360^\circ \Rightarrow \angle 12 = \angle 21 = 180^\circ$



Это было через 2 поворота $\Rightarrow$ 1, центр, 2



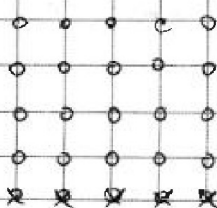
прямая на одинаковом расстоянии от центральной



Во всех случаях кроме того у положения есть ровно еще 3 ему подобных



кон-во случаев, когда точки лежат в I и III части компенсируют поворотом II и IV $\Rightarrow$ считаем только I и III



Выберем одну точку $\Rightarrow$ вторая автоматически задается

$\Rightarrow$ точек случаев 20



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☒☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Всего способов выбрать 2 монеты $\frac{81-80}{2} = 81-40$.

н.ч. по одной стороне
квадрата лежит 2 монеты

из таких способов

~~20~~ ~~24~~ ~~80~~ исключений.
~~80~~ 10-2

"

$$\frac{81-40-80}{10} = \frac{81-120}{80-100}$$

В каждом отсюда
случае каждый
учитывается в еще
3 подробных

"

$$\text{расстановки} \quad \frac{80-40}{4} + \frac{80}{10} =$$

$$= 800+20 = 820$$

Ответ: 820.



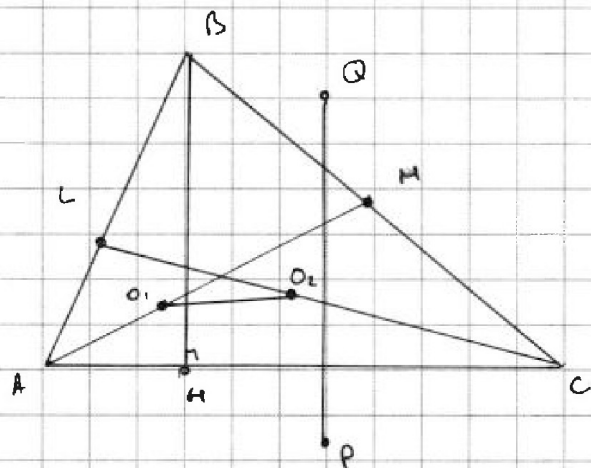
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



BH - высота из B.

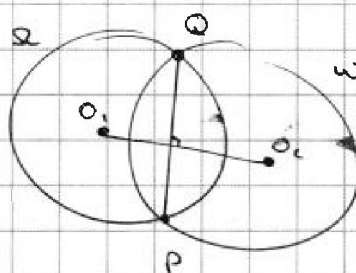
$QP \parallel BH$

$BH \perp AC$, т.к. высота

$\Rightarrow$

$QP \perp AC$

Примем Q и $P \in \Omega$ и ω



$\Rightarrow QP$ - рад ось

$\Rightarrow$

$QP \perp O_1O_2$

т.к. AM - диаметр Ω

Примем

O_1 - центр AM

O_2 - центр CL

т.к. CL - диаметр ω

$\Rightarrow$

$QP \perp O_1O_2$

$QP \perp AC$

$\Rightarrow$

$O_1O_2 \parallel AC$

$\Rightarrow$

O_1O_2 - часть средней линии $\triangle ALC$ и $\triangle AMC$, которые совпадают

т.к. сер. линия $\triangle ALC \parallel AC$ и проходит через O_2

Аналогично с сер. линией $\triangle AMC$, которая $\parallel AC$ и проходит через O_1



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x=6$$

$$y=3$$

$$6-9 \leq 3 \quad \ominus$$

$$\textcircled{\emptyset}$$

$$4y+8x > 0$$

$$4(y+2x) > 0$$

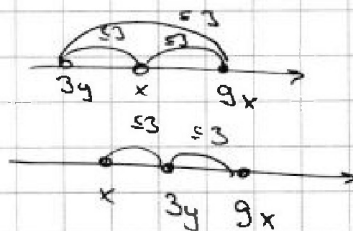
$$|x-3y| \leq 3$$

$$|3x-y| \leq 1$$

$$(x-3y)^2 \leq 9$$

$$(3x-y)^2 \leq 1$$

$$3x-19x-3y \leq 3$$



$$8x \leq 6$$

$$x \leq \frac{3}{4}$$

$$3y-x \leq 3$$

$$y \leq \frac{3+x}{3} \leq \frac{3+\frac{3}{4}}{3} = \frac{3+\frac{3}{4}}{3} = \frac{12+\frac{3}{4}}{12} = \frac{49}{48}$$

$$x = \frac{3}{8}$$

$$|x-3y| \leq 3$$

$$|\frac{3}{8}-\frac{15}{4}| \leq 3 \quad \oplus$$

$$x = \frac{3}{8}$$

$$y = \frac{5}{4}$$

$$8x+4y = 6+5=11$$

$$y = \frac{17}{8}$$

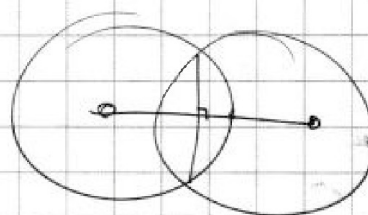
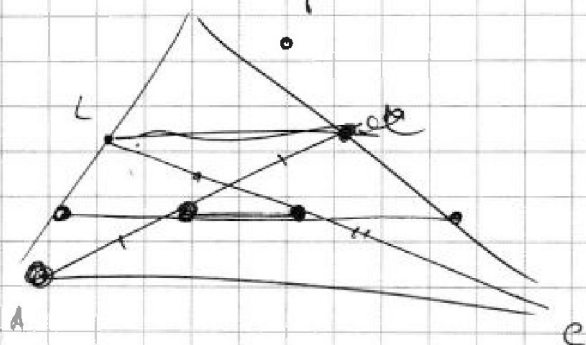
$$\Rightarrow 3y$$

$$|3x-y| \leq 1 \quad | \frac{9}{4} - \frac{5}{4} | \leq 1 \quad \oplus$$

$$\frac{17}{8} = 4 + 3$$

$$\frac{17}{2} = 3 = \frac{23}{2}$$

LMHAC $\Rightarrow$ L - середина $\Rightarrow$

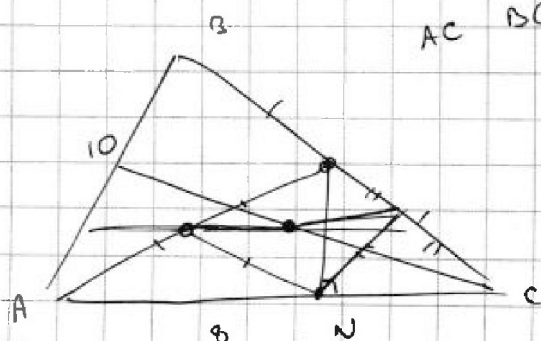


$$\frac{3}{8} + 3$$

$$\frac{24+3}{8}$$

$$\frac{27}{8}$$

$$AC = BC = 1$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

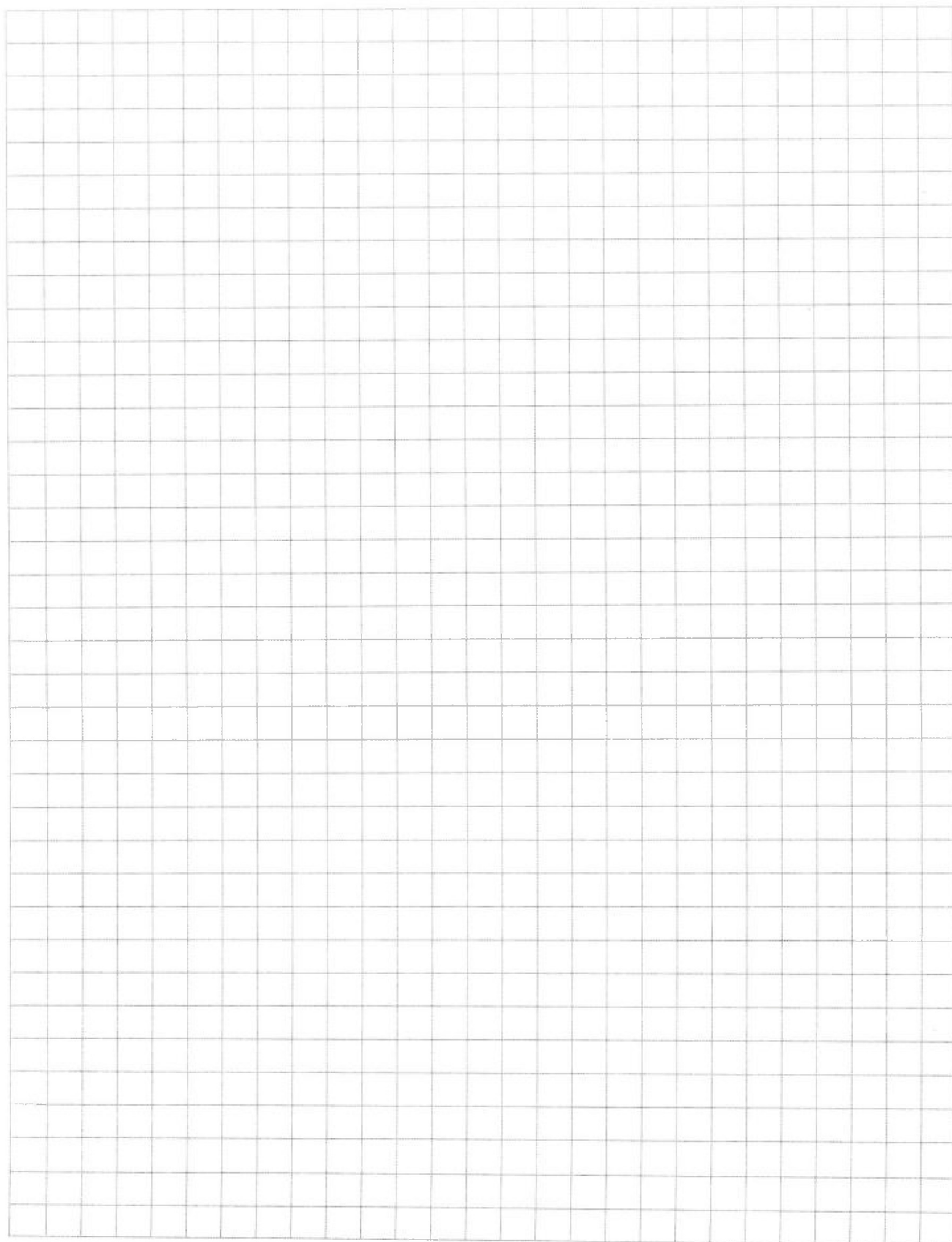
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) m+n=p \Rightarrow m+n+g=p+g=13p$$

$$g = -12p \quad (!)$$

$$3) m+n+g=13 \Rightarrow m+n+22=p \quad (!)$$

$$4) m+n+g=p \Rightarrow m+n=13p \Rightarrow 13p+g=p$$

$$12p=g$$

$$p = \frac{g}{12} \quad (!)$$

2 шаг.

$$mn(m+n-3)=13p^2$$

1)

$$m=n=p$$

$$m+n-3=13$$

$$2p-3 \Rightarrow p=8 \quad (!)$$

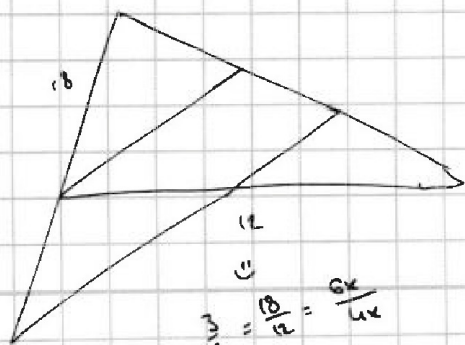
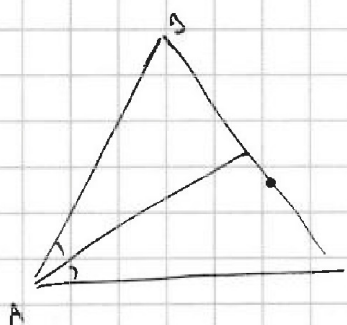
$$2) m=13 \Rightarrow 10+p=p$$

$$10=p \quad (!)$$

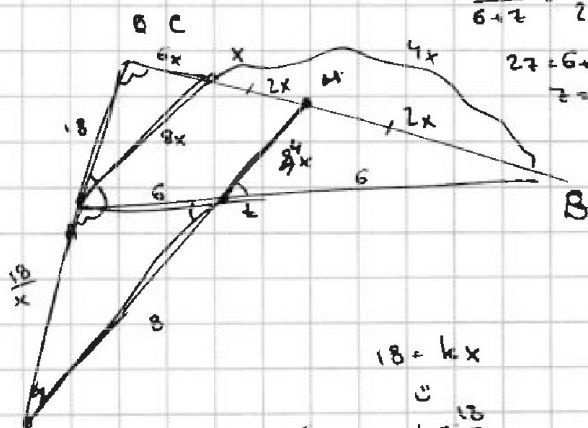
таких нет

$$\begin{aligned} & 18^2 + 25^2 = 2 \cdot 2 \cdot 15^2 \cdot \frac{1}{2} \\ & 36 + 25 = 40 \\ & 61 \end{aligned}$$

21



$$2 = \frac{18}{2} = \frac{9}{1}$$



$$\begin{aligned} \frac{z}{6+z} &= \frac{1}{2} \\ 2z &= 6+z \\ z &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 18 &= kx \\ 18 &= 5 \cdot 2 \\ 72 + 25 &= 40 = 47 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \\ x^4 + 5x^2 - 6y = y^4 - 6x + 5y^2 \end{cases}$$

$$(x+1)(6-y) = 5(x+1) \quad , \quad x$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - \sqrt{y} &= x^4 - y^4 + 5x^2 - 5y^2 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2 + 5) \\ (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2 + y^2 + 5) &\Rightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2 + y^2 + 5) = 1 \end{aligned}$$

1. сущ. $x = y$.

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$(3-x)(2-x)$$

$$x^2 - 5x + 6$$

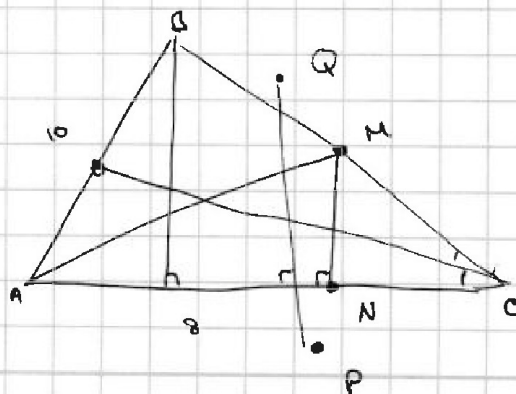
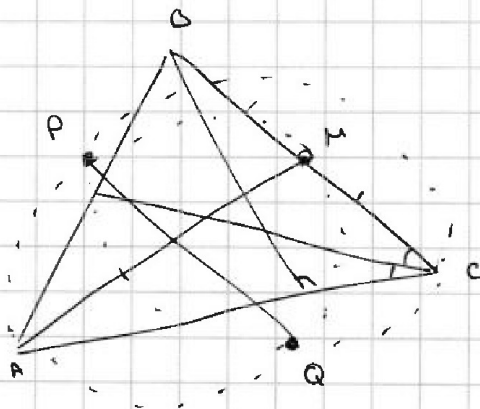
$$(x-6)(x+1)$$

$$(6-x)(x+1)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sqrt{x-1} - \sqrt{6-x} + 5 &= 2\sqrt{\dots} \\ 5 - 2\sqrt{\dots} &+ 10\sqrt{x-1} - 10\sqrt{6-x} \\ &+ 25 \end{aligned}$$

$$2(x+1)(6-x)$$

$$2\sqrt{\dots} =$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

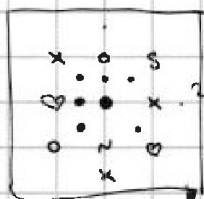
$$3x+3$$

а) 3

$$3x+3+2d = (x^2+2x)^2$$

б)

$$2((x^2+2x)^2 - 3x - 3) = 3x^2 - (x^2+2x)^2$$



$$2(x^4+4x^3+4x^2-3x-3) = -x^4-4x^3-4x^2+3x^2$$

$$3x^4+12x^3+9x^2-6x-6=0$$

$$2y+3 \geq 3y$$

$$(x+1)(3x^3+9x^2-6)=0$$

$$(x+1)^2(3x^2+6x-6)=0$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+18}}{3} = \frac{-3 \pm \sqrt{27}}{3}$$

$$y \leq 3 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} &4y+8x < 4(y+2x) \\ &4 \cdot 15 = 60 \\ &x = 6 \end{aligned}$$

$$x < 2y$$

$$x \geq 3y-3 \quad y=3$$

$$\begin{cases} 3y-x \leq 3 \\ 3x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3 \geq 3y \\ 2y+3-1+2 \end{cases}$$

$$0, 1, 1, 1, 1, 1, 3$$

$$4y+8x = \max?$$

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases}$$

1 случай $x, y > 0$.

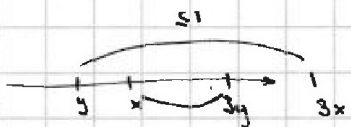
$$x-3y \leq 3$$

$$x \leq 3+3y$$

$$x, y \quad y+2x > 0$$

$$3x-y < y+2x$$

$$x < 2y$$



$$4y+8x =$$

$$\begin{aligned} x^2-4x+4 &= (x-2)^2 \\ x_{1,2} &= \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{1} = 2 \end{aligned}$$

$$6, 1, 9, 1, 1, 1$$

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n =$$

$$= (m+n)(m+n-9)$$

$$B = mn(m+n-3)$$

$$1 \text{ случай. } (m+n)(m+n-9) = 13p^2 \Rightarrow$$

$$\text{одно } 13p^2 \quad p, q - \text{простые}$$

$$25q^2 =$$

$$\begin{aligned} 1) m+n=13 \Rightarrow m+n-9 &= 4 = 2^2 \\ m+n-3=10 \Rightarrow q &= 2 \end{aligned}$$

$$\text{одно } 13 \text{ умножить } \Rightarrow mn = 300$$

$$75 \cdot 4 = 300 \quad \text{одно } 13 \text{ умножить } \Rightarrow 13$$

12	1
	2
2	
1	
	2 1



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2 слуг. $x \neq y$.

"

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2+5)=1$$

$a, b > 0$.

$$(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4+5)=1$$

$$\Rightarrow a+b < 1 \text{ и } a, b < 1 \Rightarrow a^2+b^2 < 1$$

$$x^4 + 5x^2 + \sqrt{x}$$

$$\sqrt{x}$$

$$a^8 + 5a^4 + a$$

$$a^8 + 5a^4 + a$$

$$a^8 + 5a^4 + a$$

$$a^8 + 5a^4 + a$$

$$a^8 + 5a^4 + a$$

$$\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{256} \cdot \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{2}$$

$$8a^3 + 10a^3 + 1$$

корни от 0 до 1?

$$8 \cdot \frac{1}{128} - 20 \cdot \frac{1}{8} + 1$$

$$-\frac{1}{16} - \frac{5}{4} + 1$$

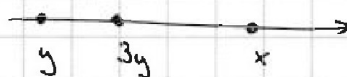
$$x^4 + 5x^2 + \sqrt{x}$$

$$x \uparrow \Rightarrow x^4 \uparrow$$

$$5x^2 \uparrow$$

$$\sqrt{x} \uparrow$$

$$+$$



1 слуг. $x \geq 3y$ $3x \geq y$.

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x-3y \leq 3 \\ 3x-y \leq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4x-4y \leq 4$$

$$x-y \leq 1$$

$$x \leq 1+y \Rightarrow 4y+8x \leq 8+12y$$

$$x \leq 1+y \leq 1+3x$$

2 слуг. $x \geq 3y$ $3x \leq y$ (-)

3 слуг. $x \leq 3y$ $3x \leq y$

$$\begin{cases} 3y-x \leq 3 \\ 3x-y \leq 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3y-4x \leq 4 \\ y-x \leq 1 \end{cases}$$

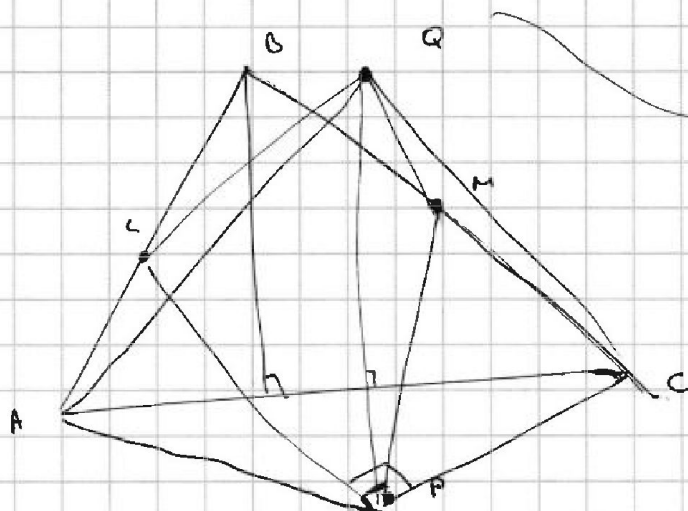


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} 9x - 3y &\leq 3 \\ x - 3y &\leq 3 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 10x - 6y &\leq 6 \\ 5x - 3y &\leq 3. \end{aligned}$$

$PQ \perp AC$

$$\begin{aligned} |x - 3y| &\leq 3 \\ 3|x - y| &\leq 9 \end{aligned}$$

$$3|3x - y| \leq 3$$

$$\begin{aligned} |9x - 3y| &\leq 3 \\ |x - 3y| &\leq 1 \end{aligned}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x}$$

$$x+1 + 6-x = 7$$

$$\begin{aligned} x &\leq 3y \leq 9x \\ |9x - y| &\leq 6 \\ |8x| &\leq 6 \\ x &\leq \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$y \leq 3y \leq x \leq 9x$$

$$\sqrt{t} - \sqrt{7-t} = 5 = 2\sqrt{t(7-t)}$$

$$7 - 2\sqrt{t(7-t)} = 4t(7-t) = 4t(7-t)$$

$$\sqrt{t(7-t)} = a \Rightarrow 7 - 2a = 4a^2 - 20a + 25$$

$$4a^2 - 18a + 18 = 0$$

$$2a^2 - 9a + 9 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 184}}{4}$$

$$\frac{9+3}{4} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ a=\frac{3}{2} \end{cases}$$

1 шаг. $\sqrt{t(7-t)} = 3$

$$t^2 - 7t + 9 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 36}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$t_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 36}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$1) t = \frac{7 - \sqrt{13}}{2} \Rightarrow (-)$$

$$2) t = \frac{7 + \sqrt{13}}{2} \Rightarrow x = y = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} (+)$$

$$= \frac{14 \pm \sqrt{160}}{4} = \frac{14 \pm 4\sqrt{10}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{10}}{2} \Rightarrow 1) \frac{7 - 2\sqrt{10}}{2} (-)$$

$$2) \frac{7 + 2\sqrt{10}}{2} (+)$$

2 шаг.

$$\sqrt{t(7-t)} = \frac{3}{2}$$

$$4t^2 - 28t + 9 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 4 \cdot 9}}{4} =$$