



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .

2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q — простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть d - знаменатель арифм. прогрессии
Тогда:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3x - 3 = 6d \\ 3x^2 - (x^2 + 2x)^2 = 4d \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - x - 1 = 2d \\ 3x^2 - x^4 - 4x^3 - 4x^2 = 4d \end{cases}$$

$$3x^2 - x^4 - 4x^3 - 4x^2 = 2(x^2 - x - 1)$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x^2(x+3)(x+1) - 2(x+1) = 0$$

$$(x+1)(x^3 + 3x^2 + 2x - 2) = 0$$

$$(x+1)(x(x+1)(x+2) - 2(x+1)) = 0$$

$$(x+1)^2(x^2 + 2x - 2) = 0$$

$$\text{Отсюда } \begin{cases} (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ x^2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

Ответ: $x = -1$ или $x = -1 \pm \sqrt{3}$.

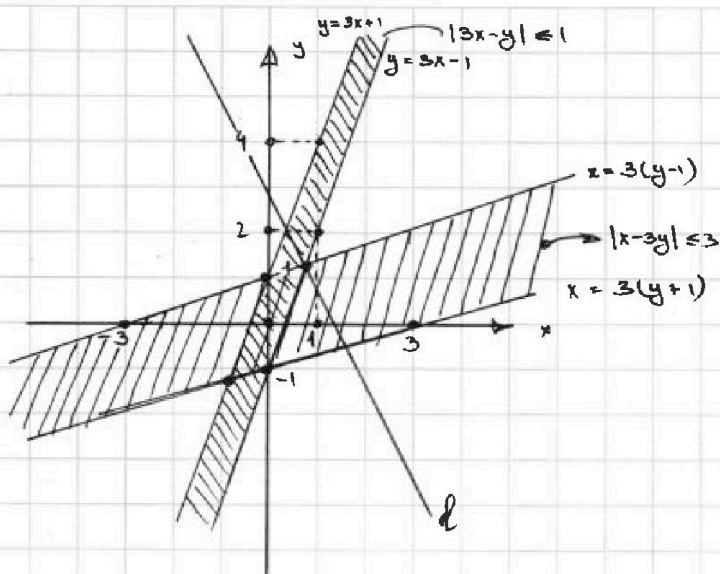


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Прямые вида $4x + 8y = a$, где $a = \text{const}$. Соответствуют на графике прямым с наклоном -2 .
 $y = \frac{a}{4} - 2x$

Найдём обл. выполнения системы нер-в:

$$|x-3y| \leq 3$$

$$\begin{cases} x \leq 3y \\ 3y - x \geq 3 \\ x \geq 3y \\ x - 3y \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(y-1) \leq x \leq 3y \\ 3(y+1) \geq x \geq 3y \end{cases}$$

$$3(y+1) \geq x \geq 3(y-1)$$

$$|3x-y| \leq 1$$

$$\begin{cases} 3x - y \leq 1 \\ y - 3x \leq 1 \\ x \geq 3y \\ x - 3y \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y - 1 \leq x \leq 3y \\ 3y + 1 \geq x \geq 3y \end{cases}$$

$$3y - 1 \leq x \leq 3y + 1$$

$$\begin{cases} 3x \leq y \\ y - 3x \leq 1 \\ 3x \geq y \\ 3x - y \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 1 \geq y \geq 3x \\ 3x - 1 \leq y \leq 3x \end{cases}$$

Каждое из 2х нер-в задаётся соотв. прямой, вместе они выполняются в области п/у прямых.

Откуда $|x-3y| \leq 3$ выполняется п/у прямыми $x=3(y+1)$ и $x=3(y-1)$ (на графике)

Откуда $|3x-y| \leq 1$ выполняется п/у прямыми $3x-1=y$ и $y=3x+1$ (на графике)

Таким образом область выполнения системы нер-в представляет собой парал-грамм, образованный вышеперечисл. прямыми.

Ясно что выражение $4x + 8y = \text{const}$ достигает max, когда соотв. прямая имеет 1 точку пер-я с пар-м. Изобразим прямую в л. соотв. случаю max.

Координаты т. пер-я: $x = 3(y-1) = \frac{y+1}{2}$

$$8y = 10 \Rightarrow y = \frac{5}{4}, x = \frac{3}{4}$$

$$4x + 8y \rightarrow \max \text{ при } x = \frac{3}{4}, y = \frac{5}{4} \Rightarrow \max(4x + 8y) =$$

$$= 4 \cdot \frac{3}{4} + 8 \cdot \frac{5}{4} = 11$$

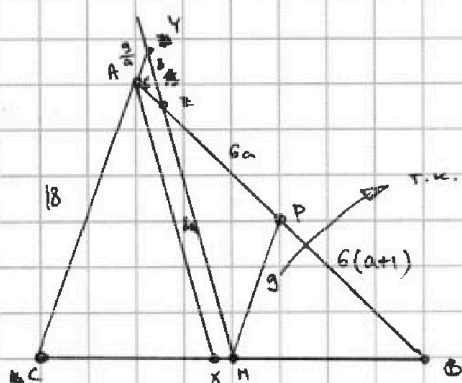
Ответ: 11

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1. Построим PH - ср. линию $\triangle ABC$, тогда $\triangle AYX \sim \triangle PHX$.
Пусть коэф. подобия a . Тогда $ZH = 2a$, $ZP = 6a$, $AY = \frac{3}{a}$.
Т.к. P - середина AB , то $BP = PZ + AZ = 6(a+1)$

2. Т.к. $\triangle AXB \sim \triangle ZHB$, то $BX = BH = \frac{2(a+1)}{2a+1}$. Отсюда $XH = BX - BH = BH = \frac{1}{2a+1}$, $CX = BH - XH = BH \cdot \frac{2a}{2a+1}$.

3. Т.к. AX - биссектриса:

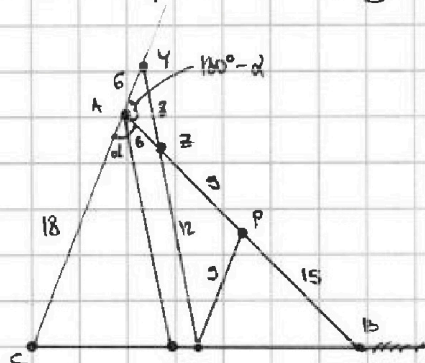
$$\frac{18^3}{8 \cdot 2(a+1)} = \frac{BH \cdot \frac{2a}{2a+1}}{BH \cdot \frac{2(a+1)}{2a+1}}$$

$$\frac{3}{2(a+1)} = \frac{a}{a+1} \Rightarrow 2a^2 + 2a = 3a + 3$$

$$2a^2 - a - 3 = 0$$

$$(a+1)(2a-3) = 0 \Rightarrow \text{т.к. } a > 0, \text{ то } a = \frac{3}{2}$$

Перерисуем чертеж с нов. данными.



Тогда по Th. cos для $\triangle AYX$:

$$8^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$$

$$8^2 = 2 \cdot 6^2 \cdot (\cos \alpha + 1)$$

$$\cos \alpha = \frac{8^2}{2 \cdot 6^2} - 1 = \frac{8}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$$

По Th. cos в $\triangle ABC$: $BC = \sqrt{18^2 + 30^2 + \frac{1}{9} \cdot 18 \cdot 30 \cdot 2} =$

$$= \sqrt{18^2 + 30^2 + 120} = \sqrt{1344}$$

Ответ: $\sqrt{1344}$



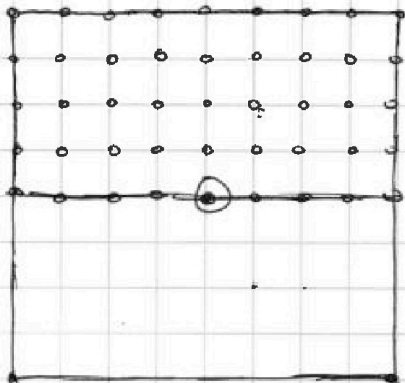
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6.



№

Раскраски из 2-х точек, могут приходить в себя либо поворотом на 180° , либо поворотом на 360° , либо поворотом на 360° .

Чтобы найти кол-во всех возможных раскрасок с точностью до поворота надо сложить $\frac{1}{2}$ - приходящих в себя при повороте на 180° и $\frac{1}{4}$ всех остальных.

Вычислим количество раскрасок, приходящих в себя при повороте на 180° . Чтобы получить такую раскраску надо выбрать т. в верхней половине и сопоставить ей точку в нижней. В верхней половине можно выбрать любую точку, кроме центральной. Также необходимо аккуратно учесть точки на границе половин (их мы считаем дважды). Итого исконых раскрасок: $9 + 4 + 4 = 40$

Тогда различных раскрасок:

$$\frac{1}{2} \cdot 40 + \frac{1}{4} (9 \cdot 9 - 40)$$

Тогда разн. раскрасок:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot 40 + \frac{1}{4} (9 \cdot 9 (9 \cdot 9 - 1) - 40) &= \frac{1}{4} (80 \cdot 81 + 40) = \\ &= 10 (162 + 1) = 1630 \end{aligned}$$

Ответ: 1630



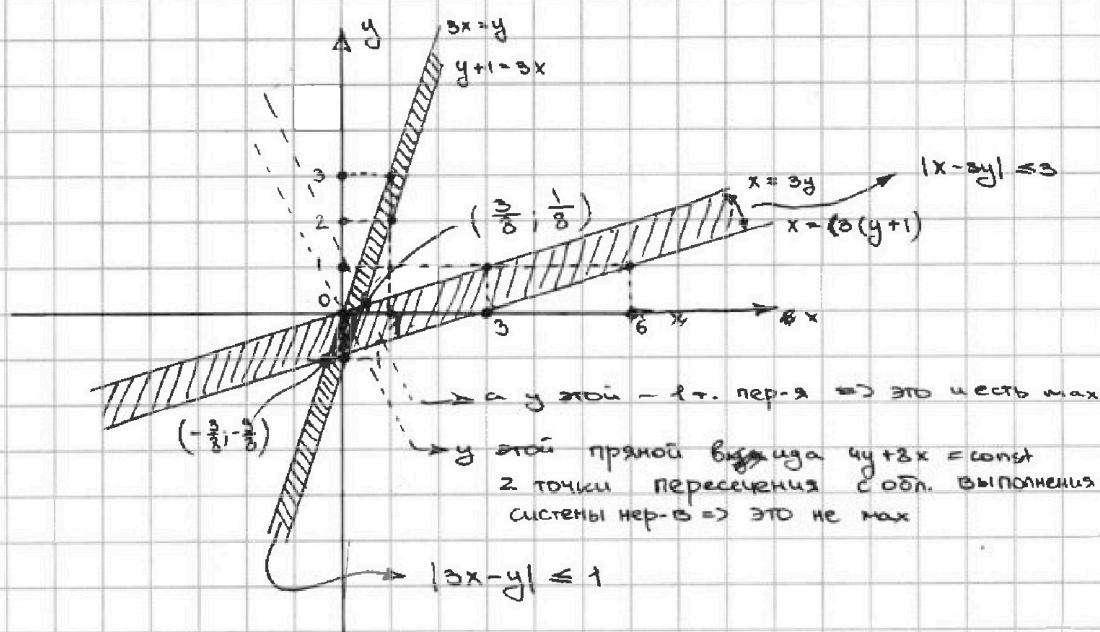
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА

1 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Для начала найдем область выполнения системы нер-в:

$$|x-3y| \leq 3$$

$$\begin{cases} x \leq 3y \\ 3y - x \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3y \\ x - 3y \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(y+1) \leq x \leq 3y \\ 3(y+1) \geq x \geq 3y \end{cases} \rightarrow \text{реш-ий нет}$$

$$3(y+1) \geq x \geq 3y$$

Каждое из двух нер-в задаётся ~~пр~~ соотв.

прямой, вместе они выполняются в области π/y прямыми

Отсюда $|x-3y| \leq 3$ соответствует области π/y

прямыми $x=3y$ и $x=3(y+1)$

(на рисунке выше вот такой вид штриховки)

$$|3x-y| \leq 1$$

$$\begin{cases} 3x \leq y \\ 3x - y \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x \geq y \\ y - 3x \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+1 \geq 3x \geq y \\ 3x < y \leq 3x+1 \end{cases} \rightarrow \text{нет решений}$$

$$y+1 \geq 3x \geq y$$

Каждое из двух нер-в задаётся соотв. прямой, вместе они выполняются в области π/y прямыми.

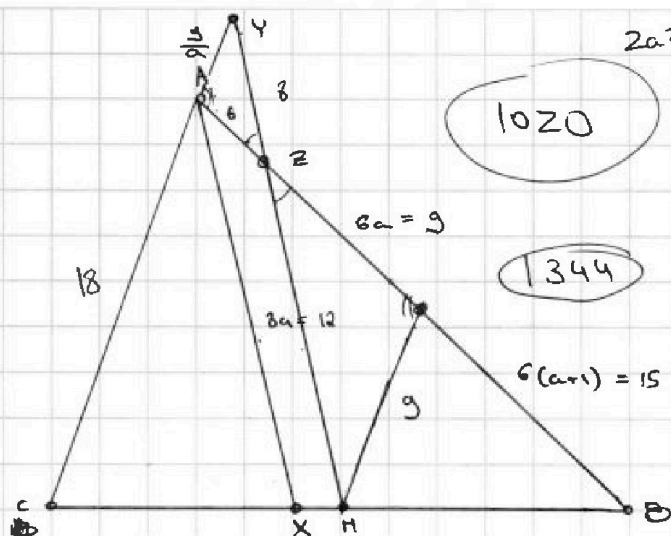
Отсюда $|3x-y| \leq 1$ выполняется в области π/y прямыми $x=3y$ и $x=3(y+1)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1020

1344

$2a^2$

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 18 \\ \hline 18 \\ 144 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 18 \\ \hline 18 \\ 144 \\ \hline 324 \\ 6 \cdot 2(a+1) \\ 6(2a+1) \end{array}$$

$$8^2 = 6^2 + 6^2 + \dots$$

$$8^2 = 6^2 + 6^2 + 2 \cos \alpha \cdot 6^2$$

$$\cos \alpha =$$

$$2 \cdot 6^2 (\cos \alpha + 1) = 8^2$$

$$\frac{AC}{AY} = \frac{CX}{XM}$$

$$\frac{AC+AY}{AY} = \frac{CX+XM}{XM}$$

$$\frac{8^2}{2 \cdot 6^2} - 1 = \cos \alpha$$

$$\frac{42}{2 \cdot 3^2} - 1$$

$$\frac{8}{9} - 1 = -\cos \alpha$$

$$\frac{1}{9}$$

$$\frac{AC}{AY} = \frac{CX}{XM} \Rightarrow \frac{18}{6} = \frac{CX}{XM} \Rightarrow CX = 3XM$$

$$\frac{AZ}{BZ} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CY}{AY} = 1$$

$$\frac{AZ}{BZ} \cdot \frac{CY}{AY} = 1$$

$$\frac{CY}{AY} = \frac{BM}{XM}$$

$$\frac{6}{BZ} \cdot \frac{18+AY}{AY} = 1$$

$$\frac{18+AY}{AY} = \frac{BM}{XM}$$

$$\frac{18}{BZ+6} = \frac{BM-XM}{BM+XM}$$

$$\frac{1}{2a+1} \cdot \frac{18+\frac{9}{2}}{\frac{9}{2}} = 1$$

$$\frac{9}{2a+1} \cdot \frac{18a+9}{9} = 1$$

$$\frac{18}{12(a+1)} = \frac{BM \cdot \frac{2a}{2a+1}}{BM \cdot \frac{2(a+1)}{2a+1}}$$

$$\frac{18}{12(a+1)} = \frac{BM \cdot \frac{2a}{2a+1}}{BM \cdot \frac{2(a+1)}{2a+1}}$$

*

$$\frac{6}{BZ+6-6}$$

Страница

из

$$BX = BM \cdot \frac{2(a+1)}{2a+1}$$

$$XM = BM \left(\frac{2(a+1)}{2a+1} - 1 \right) =$$

$$= 1 \cdot \frac{BM}{2a+1}$$

$$\frac{BM}{XM} = \frac{18+9}{\frac{9}{2}} = \frac{27}{4.5} = 6$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

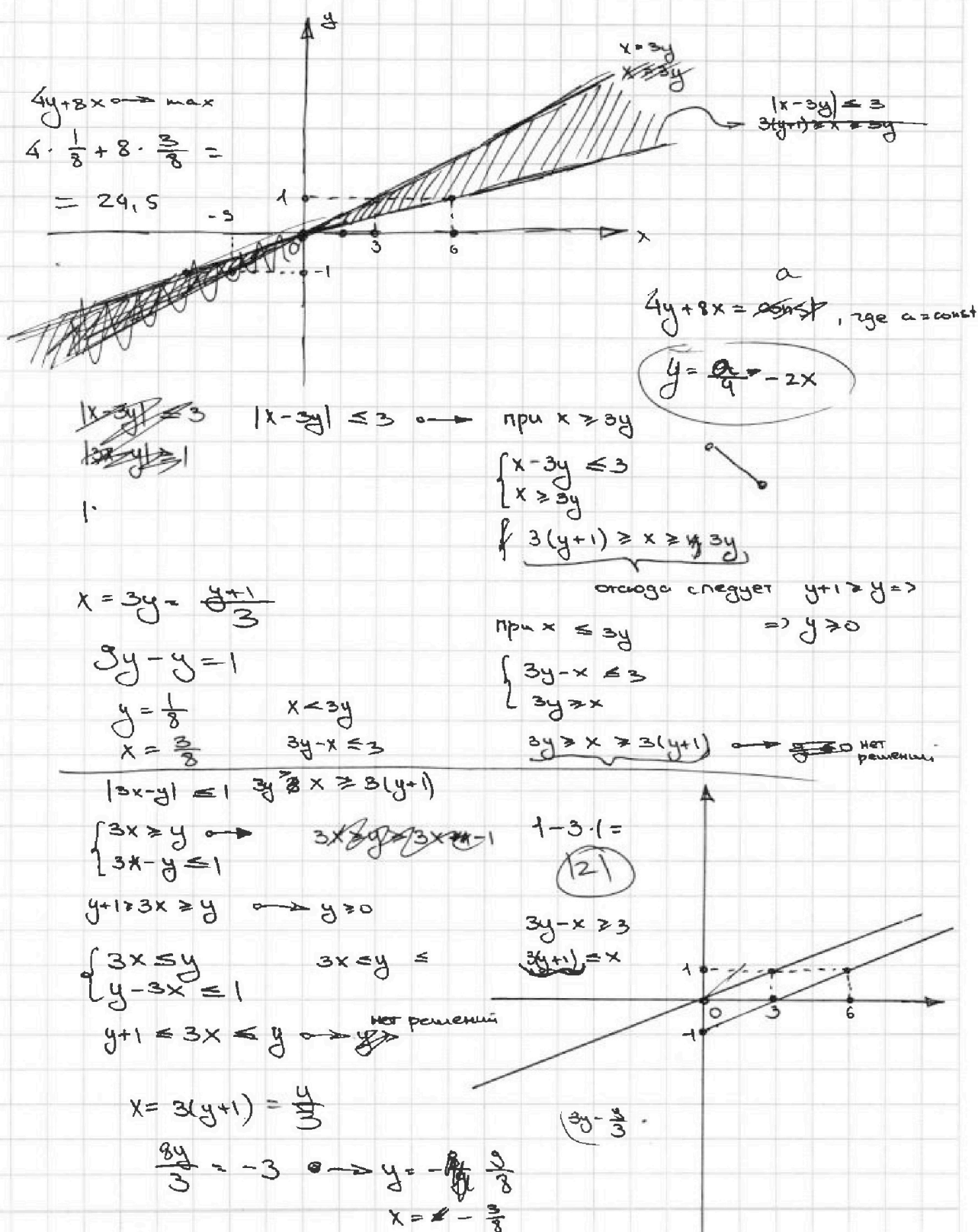
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

~~d - значение~~

~~$$(x^2 - 2x)^2 = (3x + 3)^2$$~~

$$3x^2 - (3x + 3) = 6d$$

~~$$(3x + 3)^2 =$$~~

~~$$3x^2 - (3x + 3)^2 =$$~~

$$3x^2 - (x^2 + 2x)^2 = 4d$$

$$x^2 - x + 1 = 2d$$

$$3x^2 - x^2(x + 2)^2 = 4d$$

$$3x^2 - x^2(x^2 + 4x + 4) = 2x^2 - 2x + 2$$

$$3x^2 - x^4 - 4x^3 - 4x^2 = 2x^2 - 2x + 2$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

~~$$(x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x - 2) = 0$$~~

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x^2(x^2 + 4x + 3) - 2(x + 1) = 0$$

$$x^2(x + 1)(x + 3) - 2(x + 1) = 0$$

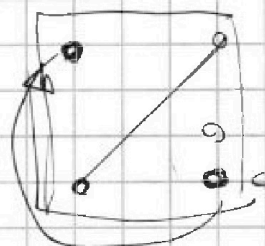
$$(x + 1)(x^2(x + 3) - 2) = 0$$

$$(x + 1)(x^3 + 3x^2 + 2x - 2) = 0$$

$$(x + 1)(x(x^2 + 3x + 2) - 2(x + 1)) = 0$$

$$(x + 1)^2(x^2 + 2x - 2) = 0$$

$$x = -1 \text{ или } x = -1 \pm \sqrt{3}$$



~~$$x^3 + 3x^2 - 2$$~~

~~$$x^3 + 3x^2 - 2$$~~

$$(x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x - 2) =$$

$$= x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x^3 +$$

$$+ 4x^2 + 2x - 2x^2 - 4x - 2$$

$$= x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2$$

(-2)

$$4y + 3x \rightarrow \max$$

$$|x - 3y| \leq 3$$

$$|3x - y| \leq 1$$

$$2a^2 + 2a = 3a + 3$$

$$2a^2 - a - 3 = 0$$

$$(a + 1)(2a - 3) = 0$$

$$a = \frac{3}{2}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{3}{1}$$

$$\frac{3}{1} - 1 = 2$$

$$1 > 3 \cdot 1$$

$$(1, 1)$$

$$p_3 > (1 + p_3) \leq 3y$$

$$p_3 > x \leq (1 + p_3) \leq 3y$$

$$p_3 > x$$

$$x - p_3 \leq 3y$$

$$p_3 > x$$

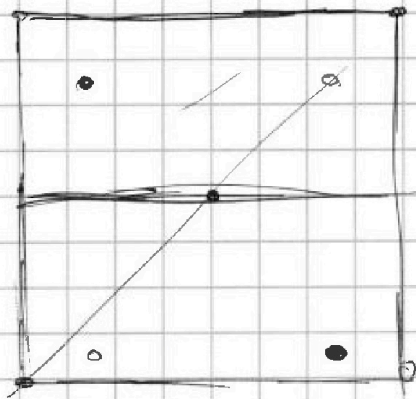


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



~~Если в седа по в м~~
~~Все центральные сати.~~

$\frac{1}{2}$ в седа на 180°

$\frac{1}{4}$ всех остальных

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 63 \\ \hline 16 \\ 378 \\ 63 \\ \hline 1008 \end{array}$$

На $180^\circ \rightarrow 8 \cdot 4$

Всех остальных — $64 \cdot 63 - 32 = 384$

$$\begin{aligned} \text{Итого разл. раскрасок} & \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 + \frac{1}{4} \cdot 64 \cdot 63 - \frac{1}{4} \cdot 32 = \\ & = 16 \cdot 63 + 8 = 1016 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

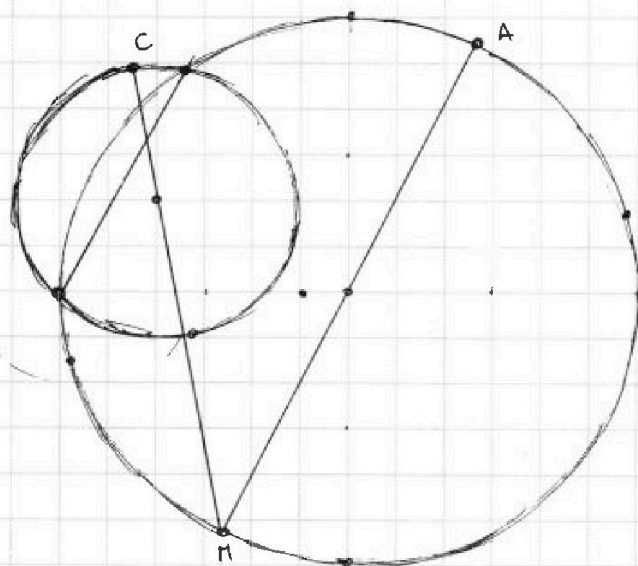
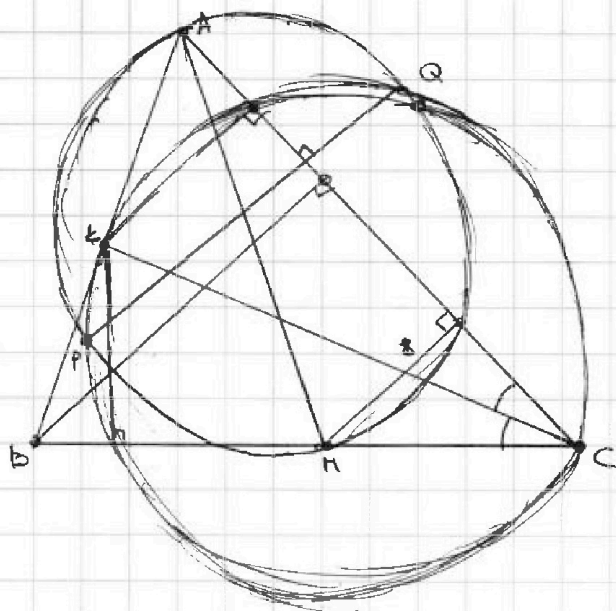
6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

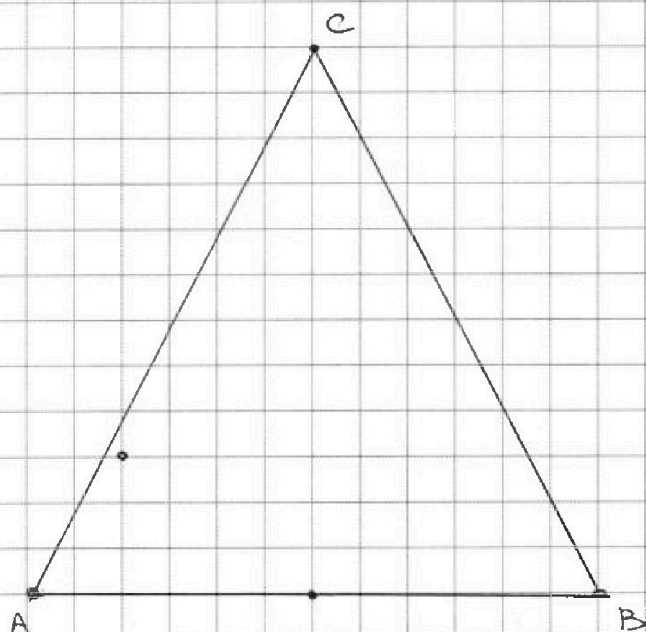
7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}$$

~~$\sqrt{x+1}$~~ ~~$\sqrt{6-y}$~~



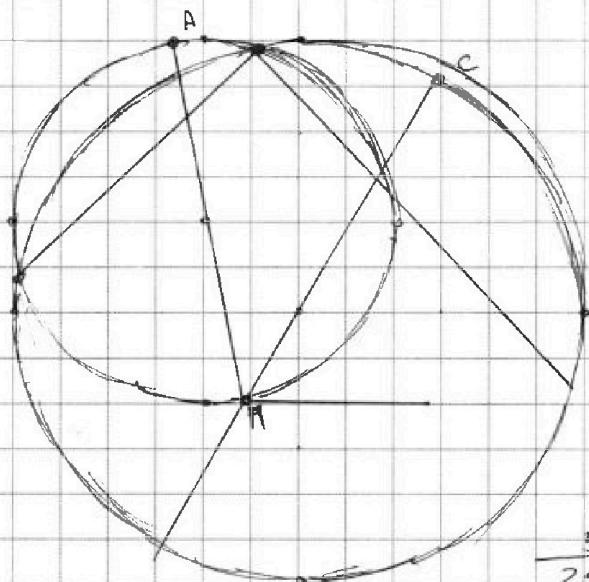


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$BC = b$$

$$\frac{BL}{AC} = \frac{b}{a}$$

AM

$$AC = \frac{5}{\sin \alpha}$$

$$NC = \frac{5}{\sin \alpha} - 8$$

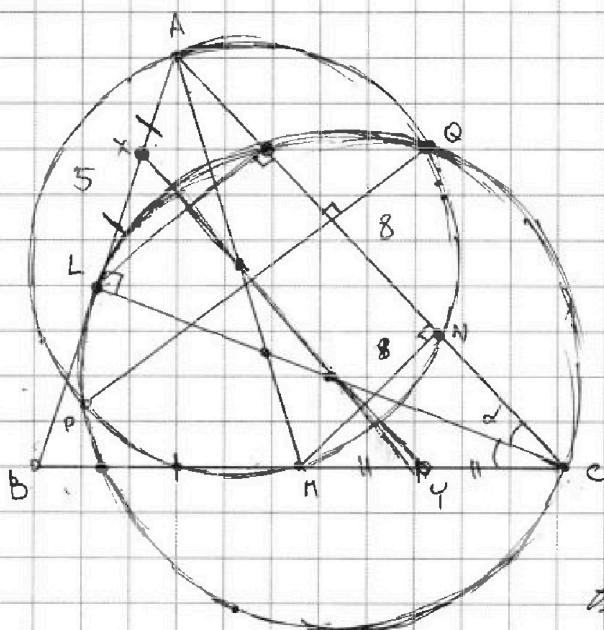
$$\frac{5}{2 \sin \alpha} = \frac{5}{\sin \alpha} - 8$$

$$\frac{BX}{AP} = \frac{BM}{BC} = \frac{3}{4}$$

$$BX = \frac{3}{4} AB$$

$$10. \frac{\sin \alpha}{a+b}$$

$$10. \frac{b}{a+b}$$



$$CL = \frac{1}{2} AB$$

$$\frac{5}{\sin \alpha} = 2 \frac{8}{\sin 2\alpha}$$

$$5 = \frac{16}{\cos \alpha}$$

$$AC = BC$$

$$\frac{5}{2 \sin \alpha}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

