



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен $6 - 9x$, шестой член равен $(x^2 - 2x)^2$, а десятый равен $9x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $3y + 6x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$ и $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$ равно $11p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q - простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 6$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 10×10 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 4$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4\text{-й член арифметической} = a+3b = 6-9x$$

$$6\text{-й член} \quad 6 \neq 0 \quad \Rightarrow a+5b = (x^2-2x)^2$$

$$10\text{-й} = a+9b = 9x^2$$

$$a+9b+2(a+3b) = 3(a+5b)$$

$$9x^2-18x+12 = 3(x^2-2x)^2$$

$$3x^2-6x+4 = x^4-4x^3+4x^2$$

$$x^4-4x^3+x^2-4x+6=0$$

$$x^4-4x^3+x^2-4x+6 = (x-1)^2(x^2-2x-4) = (x-1)^2(x-1-\sqrt{5})(x-1+\sqrt{5})$$

$$x = 1, 1-\sqrt{5}, 1+\sqrt{5}, \text{ и др.}$$

$$\text{Ответ: } x = 1, 1-\sqrt{5}, 1+\sqrt{5}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3y + 6x = 3 \cdot (2x - y) - 3|x - 2y| \leq 3 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) = 9$$

Пример на 9: $x, y = 1 \Rightarrow |x - 2y| = 1 \leq 2$ $6x + 3y = 9$
 $|2x - y| = 1 \leq 1$

Ответ: 9



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = (m+2n)^2 - 7(m+2n) = (m+2n)(m+2n-7)$$

$$B = m^2n + 2mn^2 + 9mn = mn(m+2n+9)$$

Заметим, что $(m+2n)$ и $(m+2n-7)$ — взаимно простые
Заметим, что A — четное $\Rightarrow A = 11 \cdot 4 = 44$ или $A = 300$

Докажем, что $A \neq 300$. $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$

$(m+2n)$ и $(m+2n-7)$ одновременно не могут делиться на 5
 $(m+2n)(m+2n-7) \geq 25 \cdot (25-7) > 300$

$\Downarrow$
 $A = 44$

$$(m+2n)(m+2n-7) = 44$$

$$m+2n = 11; m+2n-7 = 4$$

$$11 - 4 = 44$$

$\Downarrow$

$$B = mn(m+2n+9) = mn(11+9) = 20mn - \text{четное} \Rightarrow B = 300$$

$$m+2n < 11 \text{ и } mn = 15$$

$\Downarrow$
 $mn = 15 \quad 1, 3, 5, 15$

Из всех вариантов пары координат (m, n) подходит только $m=5, n=3$

Ответ: 5; 3

$5 \cdot 3 = 15, 3 \cdot 5 = 15$
 $m, n \in \mathbb{N}$

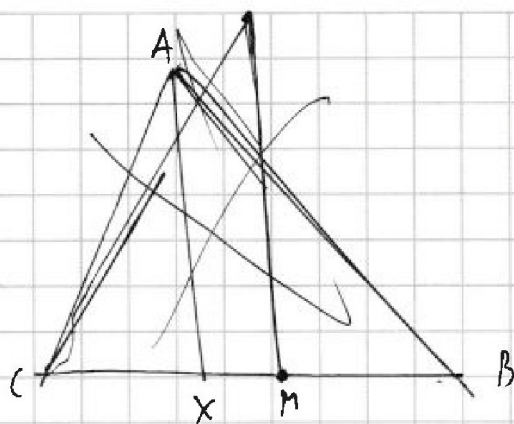


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

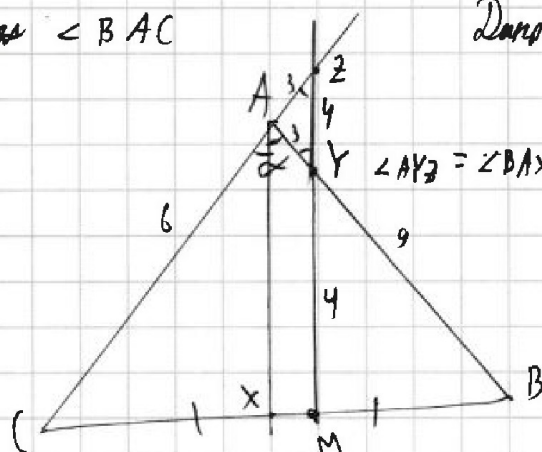
СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\alpha = \angle BAC$

Дано: $AC = 6$, $AZ = 3$, $YZ = 4$, $AX \perp BC$, $MY \parallel AX$

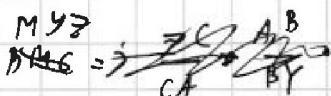


$\angle AYB = \angle BAX = \angle CAX = \angle AZY \Rightarrow \frac{AZ}{AC} \cdot \frac{CB}{BM} \cdot \frac{MY}{YZ} = 1$ (т.т.т. $\triangle CMZ$ и $\triangle AYB$)

$\frac{3}{6} \cdot \frac{12}{BM} \cdot \frac{MY}{4} = 1$

$\frac{3}{6} \cdot 2 \cdot \frac{MY}{4} = 1 \Rightarrow MY = YZ$

Т.т.т. $\triangle AYB$ и $\triangle CMZ$ и пр.



$\frac{AZ}{AC} \cdot \frac{CM}{BM} \cdot \frac{BY}{YZ} = 1 \Rightarrow \frac{3}{6} \cdot 1 \cdot \frac{BY}{3} = 1 \Rightarrow BY = 9$

по т. косинусов $\sqrt{AZ^2 + AY^2 - 2 \cos(180 - \alpha) \cdot AZ \cdot AY} = YZ$

$\sqrt{9 + 9 - 2 \cos(180 - \alpha) \cdot 3 \cdot 9} = 4 \Rightarrow 18 - 2 \cos(180 - \alpha) \cdot 9 = 16 \Rightarrow \cos(180 - \alpha) = \frac{1}{9}$

$BC = \sqrt{12^2 + 6^2 + 2 \cdot \frac{1}{9} \cdot 6 \cdot 12} = 14$

$\cos \alpha = -\frac{1}{9}$

Ответ: 14



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^3 + 3x\sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2}x + 3y$$

$$x^3 + 3x\sqrt{2y} = y^3 + 3y + \sqrt{2}y \quad \text{Зам.}$$

$$f(x) = x^3 + 3x\sqrt{2y} - \text{монотонно возрастающая}$$

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{24+5x-y^2}$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{(x+2)(7-x)}$$



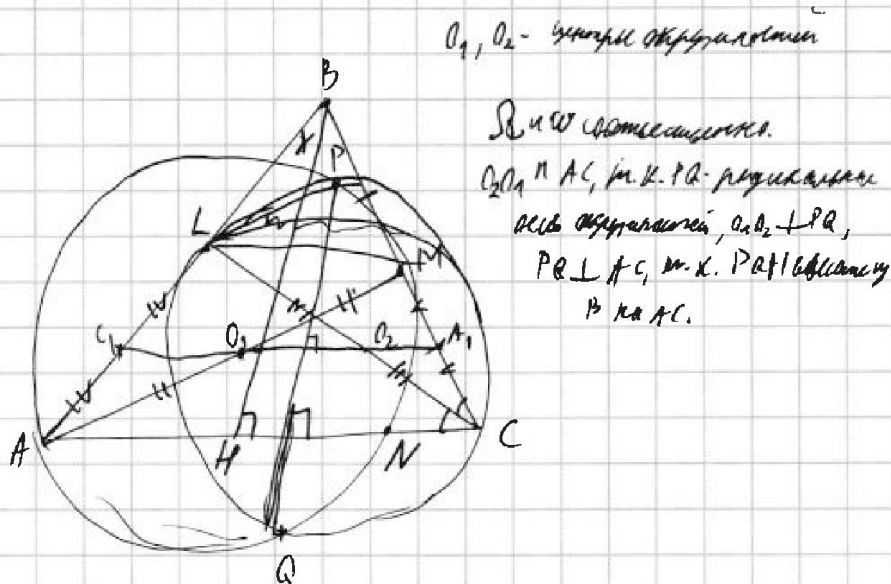
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



O_1, O_2 - центры окружностей

BC и AC - диаметры.

$O_1 O_2 \perp AC$, т.к. PA - радиусы

осей окружностей, $O_1 O_2 \perp PA$,

$PA \perp AC$, т.к. $PA \perp$ плоскости P на AC .

Прямые $O_1 O_2$ до пересечения $O_1 O_2 \cap AB = C_1$
 $O_1 O_2 \cap BC = A_1$

$C_1 O_2 \parallel AC$, $\angle O_2 = \angle C$, т.к. O_2 - центр окр. и AC - диаметр.

$\parallel$
 $AC_1 = C_1 L$, следовательно $\angle A_1 = \angle M A_1$

BH - высота

$BC = AC \Leftrightarrow \angle C = 2\gamma \Leftrightarrow \angle M A_1 = \angle M A_1$
 $\angle C = 2\gamma$
 $\angle C$ - вкл. угла. $\angle M A_1$ - вкл. угла.

Найдём $\frac{AN}{NC}$ $BL = 2 \cdot \sin \gamma \cdot a \Rightarrow AB = 2 \sin \gamma \cdot a$

$MN \perp AC$, т.к. $\angle MNB$ - опущен на диаметр.

$CM = MB$ $\Rightarrow CN = \frac{a \cdot \cos 2\gamma}{2}$

$AN = AH + HN = AH + \frac{a \cdot \cos 2\gamma}{2}$
 $AH = \frac{AB \cdot \cos(90 - \gamma)}{2}$
 $\Rightarrow \frac{AN}{CN} = 1 + \frac{AH}{CN} = \frac{AB \cdot \cos(90 - \gamma)}{a \cdot \cos 2\gamma} + 1$
 $= \frac{2 \sin \gamma \cdot a \cdot \cos(90 - \gamma)}{a \cdot \cos 2\gamma} + 1 = \frac{2 \sin \gamma \cdot \cos \gamma}{\cos 2\gamma} + 1 = \frac{\sin 2\gamma}{\cos 2\gamma} + 1 = \frac{1}{\cos 2\gamma} + 1$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

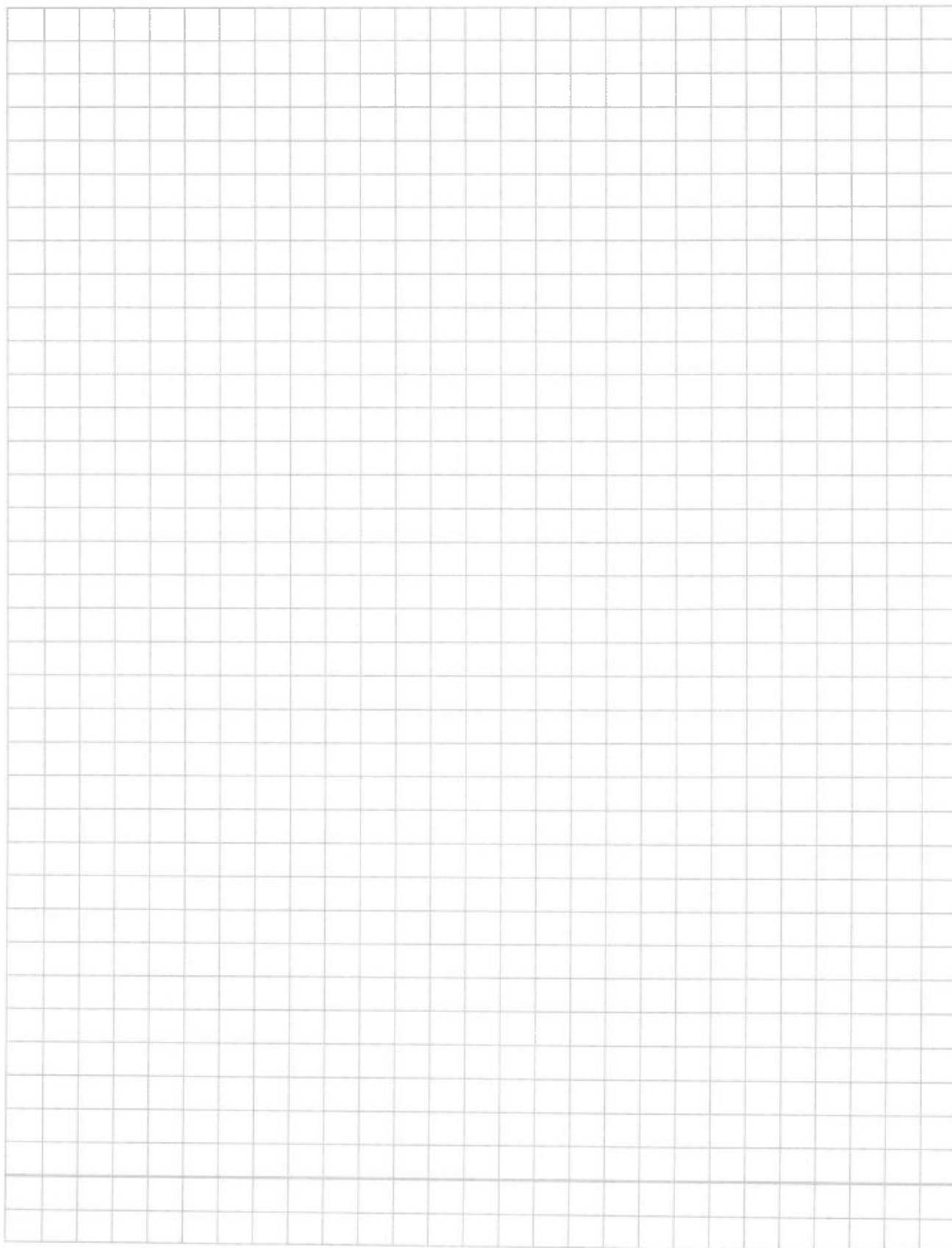
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a+3b, a+5b, a+7b$$

$$(x+3) = 6(a+1)49 = 7-x(51+x+14\sqrt{x+2}) = (7-x)(3+2\sqrt{x+2}+x)$$

$$x^2 - 6 \cdot 9x \quad (x^2 - 2x)^2 \quad 9x^2$$

$$9x^2 - 27x + 18 = 3(x^2 - 2x)$$

$$6 - 9x \quad x^4 - 4x^3 + 4x^2 \quad 9x^2$$

$$3x^2 - 18x + 12 = (x^2 - 2x)^2$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-y}$$

$$x(x-2)^2 < 9x^2$$

$$3x^2 - 6x + 4 = (x^2 - 2x)^2 \quad a+7 \geq 6(a+1) \quad 6(2a+1)$$

$$(x-2)^2 < 9$$

$$x, y \geq 0 \quad 3x - 2y$$

$$A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$$

$$9 - 21 = -12 \quad 2x - y \quad y = 4,5$$

$$A = (m+2n)^2 - 7m - 14n$$

$$A \cdot \text{ёмкость} = A = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 300 \quad 2 = 18 - 7 \quad 12$$

$$B = m^2n + 2mn^2 + 9mn = mn(m+4n+9)$$

$$\sqrt{x+2} + y = 2b(2\sqrt{x+2} + 1) \quad 7 - \sqrt{7-x} = 2b(2\sqrt{x+2} + 1) \quad A = (m+2n)^2 - m - 2n$$

$$|x-2y| \leq 2$$

$$2\sqrt{2+x^2} + 1 = \frac{13}{2\sqrt{2} \cdot 1}$$

$$x^3 + 3x + \sqrt{2x} = y^3 + \sqrt{2y} + 3y$$

$$x=y \quad 14-26 = 2k(26-1)^2 \quad 13 = (2k+1)(26-1) \quad 2k+1 = 26$$

$$949 - 2 \cos \alpha \cdot 9 = 16$$

$$-3 \quad -1 \quad 1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9$$

$$144 + 36 + 16 = 196$$

$$a+3b$$

$$a+5b$$

$$a+7b$$

$$6-9x$$

$$(x^2 - 2x)^2 \quad 9x^2$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 = 3x^2 - 9x + 6$$

$$(x-1)(x^3 - 3x^2 - 2x + 4) = 0$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 9x - 6 = 0$$

$$(x-1)^2(x^2 - 2x - 4) = 0$$

$$-3 \pm 9\sqrt{5}$$

$$+ \frac{9 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

$$6(2a+1) = a+7$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \quad \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$6 \pm 2\sqrt{5} \pm 2\sqrt{5}$$

$$16$$

$$9 + 15 - 18\sqrt{5}$$

$$2ab \geq a+7 \quad 2ab - a - 7 \geq 0$$

$$1 \quad x \geq 0$$

$$y \leq 0$$

$$-3 \quad -4,5\sqrt{5}$$

$$19 \quad 16 \quad 38 \quad 54$$

$$b = \frac{a+7}{2a-1}$$

$$a \geq \frac{7-6}{26-1}$$

$$2x + 19 \quad y \leq 0$$

$$2x - y \leq 7 \quad 6x + 3y \leq 3$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

У нас есть квадрат 11×11 .

Конфигурация - набор покрашенных
клеток в шахматном

Всего способов выбрать 2 клетки (из 11 по 11, квадрата) = $C_{121}^2 = 121 \cdot 60$

Заметим, что две конфигурации, которые мы не считаем, это когда, т.е.

только 1 клетка не покрашена при повороте на 90° , а мы покрашиваем 2.

и 1-я клетка не может перейти во 2-ю и наоборот, 2-я клетка в 1-ю.

Тогда при повороте на 90° 4 раза каждая конфигурация ~~не меняется~~ ^{м.к.}

и 1 конфигурация соответствует 4 или 2 конфигурации ~~то~~, при повороте

на 90° . Мы доказали, что конфигурации, которые не меняются при

повороте на 90° нет. 2 клетки не могут перейти в друг друга, т.е.

разделим квадрат на 4 симметричные ^{5х6} и центральную клетку, она не

меняется при повороте, и клетки из каждого симметричного переходят

по кругу, т.е. из $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ и клетка из 2 при повороте на 90° не может

перейти в 1-ю симметричную. Заметим, что если покрасить клетки,

переходящие квадрат на 180° , то клетка перейдет в клетку симметричную

ей относительно центра квадрата. Значит, клетки перейдут в друг друга

при повороте на 180° если она симметрична относительно центра. Тогда

конфигураций $\frac{121-1}{2} = 60$ $121 \cdot 60 - 60 = 120 \cdot 60$ - конфигураций, которые

$120 \cdot 60 : 4 = 30 \cdot 60 = 1800$

повторяются 4 раза. Ответ: $30 \cdot 60 = 1800$ способов



1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2} \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 + 3y - \sqrt{2}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2} \\ x^3 + 3x + 2\sqrt{x} = y^3 + 3y + 2\sqrt{y} \end{cases}$$

Заметим что функции $f(x) = x^3 + 3x + 2\sqrt{x}$ — монотонно возрастающая, т.к. $x^3, x, \sqrt{x}$ — монотонно

возрастающие функции $\Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ 25.18

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{-x^2+5x+14} \\ x=y \end{cases} \Rightarrow \sqrt{5-2} + 7 = 2\sqrt{-9} \quad \left(\frac{141.120}{2} - 120 \right) = \frac{119.60}{4}$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{-x^2+5x+14} = 2\sqrt{(x+2)(7-x)} = 2\sqrt{(7-x)(x+2)}$$

$$7 = 2\sqrt{(7-x)(x+2)} - \sqrt{x+2} + \sqrt{7-x} = 2\left(\sqrt{7-x} \cdot \frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{x+2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$$

$$14 - \sin \alpha \cdot a^2 - 6.5 \quad 13 = \left(2\sqrt{7-x} - 1\right)\left(2\sqrt{x+2} + 1\right) \quad 120 \quad 45$$



$$a - b + 7 \geq 2ab$$

$$75 = 3 \cdot 25 \quad a - b + 7 = 2ab \quad \frac{\sin \alpha}{\sin 90^\circ} = \frac{AB}{\cos 28^\circ a}$$

$$(m+2n)^2 - 7m - 14n \quad 14 = 4ab - 2a + 2b$$

$$-2m + n \quad 13 = (2b-1)(2a+1)$$

$$m \cdot n \cdot (m+2n+9)$$

1	2
2	4
3	1
4	3

$$3m+n$$

$$1$$

$$2$$

$$3$$

$$4$$

$$5$$

$$6$$

$$7$$

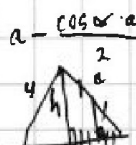
$$8$$

$$9$$

$$(m+2n)^2 - 7(m+2n) \quad \frac{a - \cos \alpha \cdot a}{a \cdot \cos \alpha} \cdot \frac{4}{7 - \sqrt{7}}$$

$$(m+2n)(m+2n-7) \cdot 7 \geq 3 \quad 300 \quad 25 \quad 10 \quad 75 \cdot 4$$

$$m \cdot n \cdot (m+2n+9) \geq 4 \quad 300 \quad m = mn$$



$$\cos 90^\circ - \alpha \cdot \frac{4}{53}$$

$$\frac{\cos 2\alpha \cdot AC}{a \cdot \sin \alpha} = \frac{4}{CY} \geq \frac{YM}{M2} \geq \frac{B}{AB} = 1$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{10}{6} \quad \frac{20}{9}$$

$$\frac{a}{a \cdot \cos \frac{\alpha}{2}} = 1$$

