



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [3 балла] Второй член арифметической прогрессии равен $12-12x$, четвёртый член равен $(x^2 + 4x)^2$, а восьмой равен $(-6x^2)$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $10x + 5y$ при условии

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 2y| \leq 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$ и $B = m^2n - 2mn^2 - 2mn$ равно $17p^2$, а другое равно $15q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}, \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[3]{3y} = 2y^5 - \sqrt[3]{3x} + 4y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 7×7 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 6$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

a_n - n -ый член арифметической прогрессии, тогда

$$a_n = a_1 + d(n-1), \text{ где } a_1 - \text{первый член прогрессии, а } d - \text{ее разность}$$

$$\text{Поус: } \begin{cases} \textcircled{1} a_2 = a_1 + d = 12 - 12x; \\ \textcircled{2} a_4 = a_1 + 3d = (x^2 + 4x)^2; \\ \textcircled{3} a_8 = a_1 + 7d = (-6x^2); \end{cases}$$

$$\textcircled{3} - \textcircled{1} : a_1 + 7d - a_1 - d = -6x^2 + 12x - 12;$$

$$6d = -6(x^2 - 2x + 1);$$

$$d = -(x-1)^2; (*)$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} : a_1 + 3d - a_1 - d = x^2(x+4)^2 - 12 + 12x;$$

$$2d = x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 12x - 12; (**)$$

Объединим (*) и (**):

$$-2x^2 + 4x - 2 = x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 12x - 12;$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 10 = 0;$$

$$\textcircled{3} - \textcircled{2} : 4d = -6x^2 - x^2(x+4)^2;$$

$$4d = -x^2(6 + x^2 + 8x + 16);$$

$$4d = -(x^4 + 8x^3 + 22x^2); (***)$$

Объединим (*) и (**):



1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4(x-1)^2 = x^4 + 8x^3 + 22x^2;$$

$$4x^2 - 8x + 4 = x^4 + 8x^3 + 22x^2;$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 4 = 0;$$

Заметим, что $a_4 = \frac{a_2 + a_6}{2}$, а $a_6 = \frac{a_4 + a_8}{2}$;

$$a_6 = \frac{x^4 + 8x^3 + 16x^2 - 6x^2}{2} = \frac{x^4 + 8x^3 + 10x^2}{2};$$

$$2a_4 = \frac{x^4 + 8x^3 + 10x^2}{2} + 12 - 12x;$$

$$2(x^4 + 8x^3 + 16x^2) = \frac{x^4 + 8x^3 + 10x^2 - 24x + 24}{2};$$

$$4x^4 + 32x^3 + 64x^2 = x^4 + 8x^3 + 10x^2 - 24x + 24;$$

$$3x^4 + 24x^3 + 54x^2 + 24x - 24 = 0$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$(x^2 + 4x)^2 + 2(x^2 + 4x) - 8 = 0;$$

Пусть $(x^2 + 4x) = t$, тогда $t^2 + 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2, \\ t = -4; \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 + 4x = 2 \\ x^2 + 4x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x - 2 = 0 \\ x^2 + 4x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 - \sqrt{6} \\ x = -2 + \sqrt{6} \\ x = -2 \end{cases}$$

Ответ: $\{-2 - \sqrt{6}; -2; -2 + \sqrt{6}\}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6, & (1) \\ |3x - 2y| \leq 4, & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow -6 \leq 2x - 3y \leq 6 \Leftrightarrow -12 \leq 4x - 6y \leq 12 \Leftrightarrow -18 \leq 6x - 9y \leq 18;$$

$$(2) \Leftrightarrow -4 \leq 3x - 2y \leq 4 \Leftrightarrow -12 \leq 9x - 6y \leq 12 \Leftrightarrow -8 \leq 6x - 4y \leq 8;$$

$$\begin{cases} -12 \leq 4x - 6y \leq 12, \\ -12 \leq 9x - 6y \leq 12; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 \geq 6y - 4x \geq -12, \\ -12 \leq 9x - 6y \leq 12; \end{cases} \begin{cases} -12 \leq 6y - 4x \leq 12, \\ -12 \leq 9x - 6y \leq 12; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -24 \leq 5x \leq 24, \\ -12 \leq 9x - 6y \leq 12; \end{cases} \begin{cases} -\frac{24}{5} \leq x \leq \frac{24}{5}, \\ -12 \leq 9x - 6y \leq 12, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -18 \leq 6x - 9y \leq 18, \\ -8 \leq 6x - 4y \leq 8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -18 \leq 9y - 6x \leq 18, \\ -8 \leq 6x - 4y \leq 8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -26 \leq 5y \leq 26, \\ -8 \leq 6x - 4y \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{26}{5} \leq y \leq 26, \\ -8 \leq 6x - 4y \leq 8; \end{cases}$$

Возьмем $x = -\frac{24}{5}$ и $y = -\frac{26}{5}$

Проверим: $\left| -\frac{48}{5} + \frac{78}{5} \right| \leq 6$ - верно.

$\left| -\frac{72}{5} + \frac{52}{5} \right| \leq 4$ - верно.

Тогда минимальное значение $(10x + 5y) = -\frac{24}{5} \cdot 10 + \left(-\frac{26}{5}\right) \cdot 5 =$

$= -48 - 26 = -74.$ Ответ: $-74.$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☒4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n = (m-2n)^2 + 13(m-2n) = (m-2n)(m-2n+13).$$

$$B = m^2n - 2m^2n^2 - 2mn = mn(m-2n-2).$$

$$\begin{cases} (m-2n)(m-2n+13) = 14p^2, & ① \\ mn(m-2n-2) = 15q^2, & ② \end{cases}$$

① С учетом того, что p - простое имеем следующие случаи:

$$1) \begin{cases} m-2n = 1, \\ m-2n+13 = 14p^2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} m-2n = 14p^2, \\ m-2n+13 = 1; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} m-2n = 17, \\ m-2n+13 = p^2; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} m-2n = p^2, \\ m-2n+13 = 17; \end{cases} \quad 5) \begin{cases} m-2n = 12p, \\ m-2n+13 = p; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} m-2n = p, \\ m-2n+13 = 17p; \end{cases}$$

1) Так как $m-2n \geq 1$, то $m-2n+13 = 14$, то есть $14 = 14p^2$, $p = 1$.

2) Так как $m-2n+13 = 1$, то $m-2n = -12$, то есть $-12 = 14p^2$, $\emptyset$.

3) Так как $m-2n = 17$, то $m-2n+13 = 30$, то есть $30 = p^2$, $\emptyset$.

4) Так как $m-2n+13 = 17$, то $m-2n = 4$, то есть $4 = p^2$, $p = 2$, p - простое, то $p = 2$.

5) Так как $m-2n = 12p$, то имеем $14p+13 = p$, $\Leftrightarrow 13 = -16p$, $\emptyset$.

6) Так как $m-2n = p$, то имеем $p+13 = 17p \Leftrightarrow 13 = 16p$, $\emptyset$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (m-2n)(m-2n+13) = 15q^2 & (1) \\ mn(m-2n-2) = 17p^2 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1) \begin{cases} m-2n=1 \\ m-2n+13=15q^2; \end{cases} & \quad 2) \begin{cases} m-2n=15q^2 \\ m-2n+13=1 \end{cases} & \quad 3) \begin{cases} m-2n=15 \\ m-2n+13=q^2 \end{cases} \\ 4) \begin{cases} m-2n=q^2 \\ m-2n+13=15; \end{cases} & \quad 5) \begin{cases} m-2n=15q \\ m-2n+13=q \end{cases} & \quad 6) \begin{cases} m-2n=q \\ m-2n+13=15q \end{cases} \end{aligned}$$

Итого ответов:

Ответ: (10; 3)

$$[Y_C] = 4\sqrt{21}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Решение задачи 4~~ ~~Решение задачи 5~~ ~~Решение задачи 6~~ ~~Решение задачи 7~~ ~~Решение задачи 8~~ ~~Решение задачи 9~~ ~~Решение задачи 10~~ ~~Решение задачи 11~~ ~~Решение задачи 12~~ ~~Решение задачи 13~~ ~~Решение задачи 14~~ ~~Решение задачи 15~~ ~~Решение задачи 16~~ ~~Решение задачи 17~~ ~~Решение задачи 18~~ ~~Решение задачи 19~~ ~~Решение задачи 20~~ ~~Решение задачи 21~~ ~~Решение задачи 22~~ ~~Решение задачи 23~~ ~~Решение задачи 24~~ ~~Решение задачи 25~~ ~~Решение задачи 26~~ ~~Решение задачи 27~~ ~~Решение задачи 28~~ ~~Решение задачи 29~~ ~~Решение задачи 30~~ ~~Решение задачи 31~~ ~~Решение задачи 32~~ ~~Решение задачи 33~~ ~~Решение задачи 34~~ ~~Решение задачи 35~~ ~~Решение задачи 36~~ ~~Решение задачи 37~~ ~~Решение задачи 38~~ ~~Решение задачи 39~~ ~~Решение задачи 40~~ ~~Решение задачи 41~~ ~~Решение задачи 42~~ ~~Решение задачи 43~~ ~~Решение задачи 44~~ ~~Решение задачи 45~~ ~~Решение задачи 46~~ ~~Решение задачи 47~~ ~~Решение задачи 48~~ ~~Решение задачи 49~~ ~~Решение задачи 50~~ ~~Решение задачи 51~~ ~~Решение задачи 52~~ ~~Решение задачи 53~~ ~~Решение задачи 54~~ ~~Решение задачи 55~~ ~~Решение задачи 56~~ ~~Решение задачи 57~~ ~~Решение задачи 58~~ ~~Решение задачи 59~~ ~~Решение задачи 60~~ ~~Решение задачи 61~~ ~~Решение задачи 62~~ ~~Решение задачи 63~~ ~~Решение задачи 64~~ ~~Решение задачи 65~~ ~~Решение задачи 66~~ ~~Решение задачи 67~~ ~~Решение задачи 68~~ ~~Решение задачи 69~~ ~~Решение задачи 70~~ ~~Решение задачи 71~~ ~~Решение задачи 72~~ ~~Решение задачи 73~~ ~~Решение задачи 74~~ ~~Решение задачи 75~~ ~~Решение задачи 76~~ ~~Решение задачи 77~~ ~~Решение задачи 78~~ ~~Решение задачи 79~~ ~~Решение задачи 80~~ ~~Решение задачи 81~~ ~~Решение задачи 82~~ ~~Решение задачи 83~~ ~~Решение задачи 84~~ ~~Решение задачи 85~~ ~~Решение задачи 86~~ ~~Решение задачи 87~~ ~~Решение задачи 88~~ ~~Решение задачи 89~~ ~~Решение задачи 90~~ ~~Решение задачи 91~~ ~~Решение задачи 92~~ ~~Решение задачи 93~~ ~~Решение задачи 94~~ ~~Решение задачи 95~~ ~~Решение задачи 96~~ ~~Решение задачи 97~~ ~~Решение задачи 98~~ ~~Решение задачи 99~~ ~~Решение задачи 100~~

$$\triangle MAZ \sim \triangle XA \text{ по 1-му: } \frac{|XC|}{|AC|} = \frac{18}{12} \Leftrightarrow |XC| = \frac{3}{2} |AC|,$$

тогда X - середина (BM) .

Заметим, что $\triangle BAX \sim \triangle BYM$ по 1-му:

$$\frac{|BA|}{|BY|} = \frac{|BX|}{|BM|} \Leftrightarrow \frac{|BA|}{|BY|} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2|BA| = |BY|$$
$$|BY| = |BA| + |AY|, \text{ тогда}$$
$$|BA| = |AY| = 6.$$

По 7. косинусов для $\triangle ABC$

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB||AC| \cdot \cos \widehat{BAC}$$

$$|BC|^2 = 36 + 324 - 2 \cdot 6 \cdot 18 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right);$$

$$|BC|^2 = 360 + 2 \cdot 6 \cdot 2$$

$$|BC|^2 = 384$$

$$|BC| = 8\sqrt{6}$$

Ответ: $8\sqrt{6}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решим ②: $4t^2 - 18t + 18 = 0$
 $2t^2 - 9t + 9 = 0$
 $D = 81 - 42 = 39$

$t_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{39}}{4}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{2} \\ t = \frac{3}{2} \end{cases}$

1) $\begin{cases} u^2 + v^2 = 7 \\ uv = 3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} u^2 + v^2 = 4 \\ uv = \frac{3}{2} \end{cases}$ $\Leftrightarrow$

$\begin{cases} u^2 + v^2 = 7 \\ 2uv = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 1 \\ (u + v)^2 = 13 \end{cases}$

$\begin{cases} u^2 + v^2 = 4 \\ 2uv = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} u - v = 1 \\ u + v = \sqrt{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{\sqrt{13} + 1}{2} \\ v = \frac{\sqrt{13} - 1}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} (u + v)^2 = 10 \\ (u - v)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} u = \frac{\sqrt{13} + 1}{2} \\ v = \frac{\sqrt{13} - 1}{2} \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} u = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \\ v = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} u = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \\ v = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} u + v = -\sqrt{10} \\ u - v = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{-\sqrt{10} - 2}{2} \\ v = \frac{-\sqrt{10} + 2}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} \sqrt{x+4} = \frac{\sqrt{13} + 1}{2} \\ \sqrt{3-x} = \frac{\sqrt{13} - 1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

1) $\begin{cases} \sqrt{x+4} = \frac{\sqrt{10} - 2}{2} \\ \sqrt{3-x} = \frac{\sqrt{10} + 2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 = \frac{10 - 4\sqrt{10}}{4} \\ 3-x = \frac{12 + 4\sqrt{10}}{4} \end{cases}$

$\begin{cases} x+4 = \frac{14 - 2\sqrt{13}}{2} \\ 3-x = \frac{14 - 2\sqrt{13}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{13} - 2}{2}$

2) $\begin{cases} \sqrt{x+4} = \frac{\sqrt{10} - 2}{2} \\ \sqrt{3-x} = \frac{\sqrt{10} + 2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 = \frac{10 - 4\sqrt{10}}{4} \\ 3-x = \frac{12 + 4\sqrt{10}}{4} \end{cases}$

$x = \sqrt{13} - 1$ $\Leftrightarrow$ $\sqrt{13} - 1$ $\Leftrightarrow$ $\sqrt{13} - 1$

$\begin{cases} x = \sqrt{10} - 1 \\ x = \sqrt{10} \end{cases}$

Ответ: $(\sqrt{13} - 1; \sqrt{13} - 1)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}, & (1) \\ 2x^3 + 4x^2 - \sqrt{3y} = 2y^5 - \sqrt{3x} + 4y^2; & (2) \end{cases}$$

Данная система определена тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} x \geq -4 \\ y \leq 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \in [0; 3] \end{cases}$$

1) Заметим, что уравнение (2) выполняется тогда и только тогда, когда

$$x = y.$$

Проверим данное равенство по уравнению (1):

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2} \quad \text{вер.}$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} = 2\sqrt{12-x-y^2} - 5$$

Пусть $\sqrt{x+4} = u$, а $\sqrt{3-x} = v$. Получаем: $(u \geq 0 \text{ и } v \geq 0)$

$$u - v = 2uv - 5 \Leftrightarrow u - 2uv - v + 5 = 0.$$

Тогда $-u^2 + 4 = v^2$. Получим систему:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 4 \\ u - v = 2uv - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = 4 \\ u^2 + v^2 - 2uv = 4u^2v^2 - 20uv + 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 4 \\ 4u^2v^2 - 18uv + 18 = 0 \end{cases} \quad \text{Пусть } uv = t$$

$$4t^2 - 18t + 18 = 0, \quad (2)$$

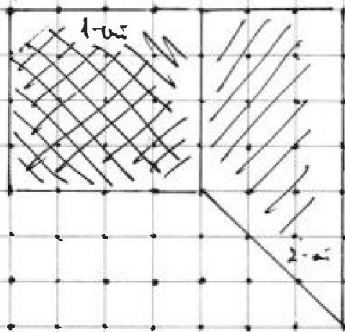
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть A - правильный ответ;

Всего узлов: $(4+1) \cdot (4+1) = 64$.

1) если мы покрасим 1-ый узел в
один из узлов квадрата:

Возможностей покрасить первый узел - 4.

1.1) Если второй узел лежит на той же диагонали (■)

Возможностей покрасить второй узел - 6 (т.к. 2 узла уже покрашены в этот квадрат).

$$A = 4 \cdot 6 : 4 ; A = 6$$

т.к. покрасили 1-ый узел, то 4 узла уже покрашены.

1.2) Если второй узел лежит не на той же диагонали (а не в углу)

Раскрасив какой-либо ^{второй} узел в любой из узлов квадрата, еще

4 случая, когда ~~он~~ ^{он} уже покрашен:

$$A = 4 \cdot (64 - 4 - 6) : 4 ; A = 6 + \frac{64}{4} = 60$$

1.3) Если второй узел тоже будет раскрасить в угол:

~~Если~~ если оба узла на одной диагонали 1 случай и если

они на одной стороне квадрата: тоже еще 1 случай: $A = 2 ; A = 62$.

2) Если первый узел лежит не в углу, то не в углу:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Возможны 2 варианта 1-го узла: 60.~~

~~Возможны 2 варианта 2-го узла: $60 + 89$ (ответ не полный).~~

Возьмем квадрат 5×5 . В данном квадрате мы сможем выбрать

1-ый узел (кроме угла). Дело в том, что если

выбрать 1-ый узел во всем квадрате, то координаты 1-го узла будут

в 4 раз меньше узла соответствующих отрезков после преобразов. Но также

при выборе 2-го узла он может оказаться с до 200 раз рассматриваем

первый узел. Поэтому возьмем специальный квадрат, который будет

занимать $\frac{1}{4}$ квадрата с границами (+ также середины).

Второй узел будем выбирать из части (трапеции), которая будет

полна риджов. Пусть квадрат, будем иметь обозначения.

Чтобы рассмотреть квадрат 1-ый узел: $25 - 1 = 24$ (до угла).

Возможны 2 варианта 2-го узла: 43. (удалив угол и 1-ый узел).

$$A = 24 \cdot 43; \quad A = 24 \cdot 43 + 62 = 1032 + 62 = 1094.$$

Ответ: 1094.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 10 = 0$$

$$B^2 \min (M - 2n - 2)$$

$$1 \quad 8 \quad 18 \quad 8 \quad -10 \quad a_2$$

1

a_4

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad a_7$$
$$a_2 - d + a_3 - d$$

$$|2x - 3y| \leq 6$$

$$|3x - 4y| \leq 4$$

$$a_4 = \frac{a_1 + a_4}{2}$$

$$a_4^2 = 2 \frac{m-4}{2}$$

$$2a_4 = a_2 + a_6 - 2d$$
$$2n = 1 \quad n = \frac{1}{2}$$

$$-6 \leq 2x - 3y \leq 6 \quad | \cdot 3 \cdot 2$$

$$-4 \leq 3x - 4y \leq 4 \quad | \cdot 2 \cdot 3$$

$$-2 \leq x - y \leq 2 \quad m \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21\}$$

$$-13 \leq 6x - 9y \leq 18$$

$$4n^2 + 8n - 64$$

$$m = 39$$

$$n = 5$$

$$-8 \leq 6x - 4y \leq 8 \quad n^2 + 2n - 64$$

$$-12 \leq 4x - 6y \leq 12 \quad n = 3$$

$$-8 + 18 \leq 6x - 4y - 6x + 8 \leq 8 - 18$$

$$-12 \leq 9x - 6y \leq 12 \quad 16(4 + 15n^2)$$

$$10 \leq 5y \leq -10 \quad 2n^2 - 4n \quad (2n^2 - 4n)$$

$$-12 \leq 5x \leq 12 \quad 4 + 2n^2 + 4n$$

$$-8 \quad 64 + 4 \cdot 4 \cdot 64$$

$$u \cdot n \quad 132 \cdot 2$$

$$64 + 4 \cdot 4 \cdot 64$$

$$96 \cdot 4 - 10 \leq 5y \leq 10$$

$$16(4 + 64)$$

$$32 \quad -8 \leq 32$$

$$24 \quad 4 \cdot 40$$

$$5 \quad 5$$

$$9 = 2$$

$$A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n + 12p^2$$

$$360 - 1 \cdot 3 \cdot 6$$

$$y^2 - 10$$

$$B = m^2n - 2mn^2 - 2mn$$

$$348$$

$$4 \quad 15 \cdot 64$$

$$36 + 32n + 18 \cdot 1 \cdot 6$$

$$(m - 2n)^2 + 13(m - 2n)$$

$$36$$

$$32n$$

$$18 \cdot 1 \cdot 6$$

$$12 \quad 64 \cdot 6$$

$$C(m - 2n)(m - 2n + 13) = 14p^2 \quad \text{um} \quad 159^2$$

$$384 = 4 \cdot$$

$$36 = 6 \cdot 16$$

$$4^2 \cdot 2^2 \cdot 6$$

$$A_1 \quad 8 \quad 18$$

$$384 \cdot \frac{1}{16}$$

$$36$$

$$1$$

$$30$$

$$A_1 \quad 8 \quad 18$$

$$384$$

$$36$$

$$1$$

$$30$$

$$A_1 \quad 8 \quad 18$$

$$384$$

$$36$$

$$1$$

$$30$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(1) d = -(x-1)^2 a_2$$

$$\begin{cases} y \leq 3 & y \geq -4 \\ y \geq 0 & y \leq 2 \end{cases}$$

$$4 \quad 16 \quad 8$$

$$(2) 2d = x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 12x - 12$$

$$3x^4 + 6d$$

$$(3) 4d = -x^4 - 8x^3 - 22x^2$$

$$4 + 8$$

$$2(a_1 + a_2)$$

$$(2) \cdot 2 = (3) \Rightarrow 2x^4 + 16x^3 + 32x^2 + 24x - 24 = -x^4 - 8x^3 - 22x^2$$

$$4(1) = (3) \Rightarrow -4x^2 + 8x - 4 = -x^4 - 8x^3 - 22x^2$$

$$x^4 + 8x^3 + 22x^2 + 24x - 24 = 0$$

$$3x^4 + 24x^3 + 57x^2 + 24x - 24 = 0$$

$$\begin{cases} x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0 \\ x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 4 = 0 \end{cases}$$

$$(x^2 + 4x)^2 + 6(x^2 + 4x - 4) = 0$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 4 = 0$$

$$a_1 = a_2 = 3d$$

$$x = 0?$$

$$d^2 + 6d - 4 = 0$$

$$a_2 = a_1 = d$$

$$d = 36 + 16 = 52$$

$$a_1 - a_2 = 2d$$

$$2(1) = (2)$$

$$-2x^2 + 4x - 2 = x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 12x - 12$$

$$16 - 36 = 2d \quad d = -10$$

$$-2x^2 + 4x - 2 = x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 12x - 12$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 10 = 0$$

$$x^4 + 8x^3 + 16x^2 - 24x + 24 = 2(x^4 + 8x^3 + 16x^2)$$

$$(2) + (3) : 6d = -6x^2 + 12x - 12$$

$$d = -(x-1)^2$$

$$a_1 = \frac{a_6 + a_2}{2}$$

$$2a_6 = \frac{a_1 + a_8}{2} = \frac{(x^2 + 4x)^2 - 6x^2}{2}$$

$$\frac{x^4 + 8x^3 + 16x^2}{2} + 12 - 12x$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Аналогично ①: $(m - 2n = 4)$

1) $\begin{cases} m = 3 \\ n = 5 \\ m - 2n - 2 = 9^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} m = 5 \\ n = 3 \\ m - 2n - 2 = 9^2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} m = 9 \\ n = 5 \\ m - 2n - 2 = 39; \end{cases}$

4) $\begin{cases} m = 9 \\ n = 39 \\ m - 2n - 2 = 5 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} m = 1 \\ n = 15 \\ m - 2n - 2 = 9^2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} m = 1 \\ n = 9^2 \\ m - 2n - 2 = 15 \end{cases}$

7) $\begin{cases} m = 1 \\ n = 159^2 \\ m - 2n - 2 = 5 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} m = 1 \\ n = 159 \\ m - 2n - 2 = 9; \end{cases}$ 9) $\begin{cases} m = 1 \\ n = 159^2 \\ m - 2n - 2 = 39; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} m = 1 \\ n = 1 \\ m - 2n - 2 = 159^2 \end{cases}$

11) $\begin{cases} m = 1 \\ n = 3 \\ m - 2n - 2 = 59^2; \end{cases}$ 12) $\begin{cases} m = 1 \\ n = 5 \\ m - 2n - 2 = 39^2; \end{cases}$ 13) $\begin{cases} m = 1 \\ n = 9 \\ m - 2n - 2 = 159 \end{cases}$ 14) $\begin{cases} m = 1 \\ n = 39 \\ m - 2n - 2 = 59 \end{cases}$

②: $mn(m - 2n - 2) = 159^2 \Leftrightarrow mn \cdot 2 = 159^2 \Leftrightarrow 9 : 2.$

Учитывая, что $m - 2n = 4$, ~~оставляя~~ получаем:

~~$4n^2 + 8n - 159^2 = 0.$~~
 ~~$D = 64 + 4 \cdot 4 \cdot 159^2 = 16(4 + 159^2).$~~
 ~~$n_{1,2} = \frac{-8 \pm 4\sqrt{4 + 159^2}}{8} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 159^2}}{2}.$~~

В нашем случае $159^2 + 4 = x^2$ имеет единственное решение при $9 = 2$ и $x = 8$

Тогда: $n_{1,2} = \frac{-2 \pm 8}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 3 \\ n = -5 \end{cases} \Leftrightarrow m = 10$

Решением у нас является (10; 3).

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



4/4 $a_1 =$ $a_2 =$ $a_n = a_1 + d(n-1)$

$d = 2$
 $a_1 = 1$
 $a_2 = 3$
 $a_3 = 5$
 $a_4 = 7$
 $a_5 = 9$
 $a_6 = 11$
 $a_7 = 13$

(1) $a_1 = a_1 + d = 12 - 12x$
(2) $a_2 = a_1 + 3d = (x^2 + 11x)^2$
(3) $a_3 = a_1 + 4d = (-6x^2)$

(3) - (2) = $4d = -6x^2 - (x^2 + 11x)^2 = -x^2(6 + (x^2 + 11x)^2)$
 $4d = -x^2(x^2 + 8x + 22)$
 $4d = -x^4 - 8x^3 - 22x^2$

(2) - (1) = $2d = x^2(x+4)^2 - 12 + 12x$
 $2d = x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 12x - 12$
 $4d = -x^4 - 8x^3 - 22x^2$

(3) - (1) = $6d = -6x^2 - 12 + 12x$
 $6d = -6x^2 + 12x - 12$
 $d = -x^2 + 2x - 2$

$d = -(x-1)^2$
 $x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 12x - 12 = 0$
 $x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x - 8 = 0$

$x^2(x+4)^2 = x^2(x^2 + 8x + 16)$
 $(x+2)^2(x^2 + 4x - 2)$
 $D = 16 + 4 \cdot 2 = 24$
 $x^2 + 8x + 16$
 $1 \quad 6 \quad 6 \quad -4$
 $-2 \quad 1 \quad 4 \quad -2 \quad 0$
 $1 \quad 2 \quad 18 \quad 3 \quad -8$
 $-2 \quad 1 \quad 8 \quad -4 \quad 0$
 $x^3(x+2) + 6x^2(x+2) + 6x(x+2) - 4(x+2)$
 $(x+2)(x^3 + 6x^2 + 6x - 4)$
 $x^2(x+2) + 4x(x+2) - 2(x+2)$

