



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [3 балла] Второй член арифметической прогрессии равен $12-12x$, четвёртый член равен $(x^2 + 4x)^2$, а восьмой равен $(-6x^2)$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $10x + 5y$ при условии

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 2y| \leq 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$ и $B = m^2n - 2mn^2 - 2mn$ равно $17p^2$, а другое равно $15q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}, \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[3]{3y} = 2y^5 - \sqrt[3]{3x} + 4y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 7×7 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 6$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_1 + a_9 = 12 - 12x \quad a_4 = (x^2 + 4x)^2 \quad a_8 = (-6x^2)$$

a_1 - первый член арифметической прогрессии, d - разность прогрессии

$$\begin{cases} a_2 = a_1 + d = 12 - 12x \\ a_4 = a_1 + 3d = (x^2 + 4x)^2 \\ a_8 = a_1 + 7d = (-6x^2) \end{cases} \quad \begin{cases} 2d = (x^2 + 4x)^2 + 12x - 12 \\ 4d = (-6x^2) - (x^2 + 4x)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4d = 2(x^2 + 4x)^2 + 24x - 24 \\ 4d = -6x^2 - (x^2 + 4x)^2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 3 & 24 & 54 & 24 & -24 & \\ & \downarrow & -6 & -36 & -36 & +24 & \\ -2 & 3 & 18 & 18 & -12 & 0 & \\ & \downarrow & -6 & -24 & +12 & & \\ -2 & 3 & 12 & -6 & 0 & & \end{array}$$

$$2(x^2 + 4x)^2 + 24x - 24 = -6x^2 - (x^2 + 4x)^2$$

$$3(x^2 + 4x)^2 + 6x^2 + 24x - 24 = 0$$

$$3x^4 + 24x^3 + 48x^2 + 6x^2 + 24x - 24 = 0$$

$$3x^4 + 24x^3 + 54x^2 + 24x - 24 = 0$$

$$(x+2)(3x^3 + 18x^2 + 18x - 12) = 0$$

$$(x+2)^2(3x^2 + 12x - 6) = 0$$

$$x = -2 \quad 3(x^2 + 4x - 3) = 0$$

$$x^2 + 4x - 3 = 0$$

$$D = 16 + 12 = 28$$

$$x = -2 \pm \sqrt{7}$$

Проверка:

1) $x = -2$:

$$\begin{cases} a_2 = 36 = a_1 + d \\ a_4 = 16 = a_1 + 3d \end{cases} \Rightarrow 2d = -20 \Rightarrow d = -10$$

$$a_8 = -24 = a_1 + 7d = a_4 + 4d = 16 - 40 = -24 \text{ --- верно.}$$

$$a_1 = -24 + 70 = 46$$

2) $x = -2 - \sqrt{7}$

$$\begin{cases} a_2 = 36 + 12\sqrt{7} = a_1 + d \\ a_4 = (11 + 4\sqrt{7} - 8 - 4\sqrt{7})^2 = 9 = a_1 + 3d \end{cases} \Rightarrow 2d = -27 - 12\sqrt{7} \Rightarrow d = -\frac{27}{2} - 6\sqrt{7}$$

$$\begin{cases} a_8 = -6(11 + 4\sqrt{7}) = -66 - 24\sqrt{7} = a_1 + 7d = a_4 + 4d = 9 - 54 - 24\sqrt{7} = -45 - 24\sqrt{7} \text{ --- верно.} \end{cases}$$

3) $x = -2 + \sqrt{7}$

$$\begin{cases} a_2 = 36 - 12\sqrt{7} = a_1 + d \\ a_4 = (11 - 4\sqrt{7} - 8 + 4\sqrt{7})^2 = 9 = a_1 + 3d \end{cases} \Rightarrow 2d = -27 + 12\sqrt{7} \Rightarrow d = -\frac{27}{2} + 6\sqrt{7}$$

$$\begin{cases} a_8 = -6(11 - 4\sqrt{7}) = -66 + 24\sqrt{7} = a_1 + 7d = a_4 + 4d = 9 - 54 + 24\sqrt{7} = -45 + 24\sqrt{7} \text{ --- верно.} \end{cases}$$

Ответ: $x = -2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |2x-3y| \leq 6 \\ |3x-2y| \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-3y \leq 6 \\ 2x-3y \geq -6 \\ 3x-2y \leq 4 \\ 3x-2y \geq -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x-6y \leq 12 (1) \\ 6y-2x \leq 12 (2) \\ 9x-6y \leq 12 (3) \\ 6y-9x \leq 12 (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5x \leq 24 & (1)+(4) \\ 5x \leq 24 & (2)+(3) \end{cases} \Rightarrow x \in [-24/5, 24/5] \Rightarrow 10x \in [-48, 48]$$

$$\begin{cases} 6x-3y \leq 18 \\ 6x-9y \geq -18 \\ 6x-4y \geq -8 \\ 6x-4y \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x-6y \geq -18 (1) \\ 6x-9y \geq -18 (2) \\ 6x-4y \geq -8 (3) \\ 4y-6x \geq -8 (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1)+(3) & 5y \geq -26 \\ (2)+(4) & -5y \geq -26 \\ & y \leq 26 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -48 &\leq 10x \leq 48 \\ -26 &\leq 5y \leq 26 \\ -74 &\leq 10x + 5y \leq 74 \end{aligned}$$

Ответ: 74



1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = (m-2h)^2 + 13(m-2h) = (m-2h)(m-2h+13)$$

Если $m-2h$ - четное, то $m-2h+13$ - нечетное $\Rightarrow A$ - четное
 Если $m-2h$ - нечетное, то $m-2h+13$ - четное $\Rightarrow A$ - четное

$$B = mn(m-2h-2)$$

1) $A = 17p^2$, A - четное $\Rightarrow 17p^2$ - четное $\Rightarrow p^2$ - четное $\Rightarrow p$ - четное $\Rightarrow p = 2$,
 т.к. 2 - единственное простое четное число $\Rightarrow A = 17 \cdot 4 = 68$
 Пусть $m-2h = x \Rightarrow A = x(x+13) = 68$

$$x^2 + 13x - 68 = 0$$

$$(x+17)(x-4) = 0$$

$$x = -17 \quad x = 4$$

1) $m-2h = 4 \Rightarrow m-2h$ - четное $\Rightarrow$
 $\Rightarrow m-2h-2$ - четное $\Rightarrow B$ - четное $\Rightarrow 15q^2$ - четное $\Rightarrow q^2$ - четное $\Rightarrow q$ - четное
 $\Rightarrow q = 2$, т.к. 2 - единственное простое четное число $\Rightarrow B = 15 \cdot 4 = 60$
 $B = mn \cdot 2 = 60$
 $mn = 30$

$$\begin{cases} m-2h=4 \\ mn=30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=2h+4 \\ 2h^2+4h-30=0 \end{cases}$$

$$2(h+5)(h-3)=0$$

$$h = -5 \quad h = 3, \text{ т.к. } h - \text{натуральное число}$$

2) $m-2h = -17 \Rightarrow m-2h-2 = -19$

$$B = -19mn = 15q^2 > 0 \Rightarrow mn < 0 \Rightarrow \text{либо } m, \text{ либо } n < 0 - \text{противоречит условию, т.к. } m \text{ и } n - \text{натуральные}$$

2) $A = 15q^2$, $B = 17p^2$. A - четное $\Rightarrow 15q^2$ - четное $\Rightarrow q^2$ - четное $\Rightarrow q$ - четное
 $\Rightarrow q = 2$, т.к. 2 - единственное простое четное число $\Rightarrow A = 15 \cdot 4 = 60$
 Пусть $m-2h = x \Rightarrow A = x(x+13) = 60$

$$x^2 + 13x - 60 = 0$$

$$D = 169 + 240 = 409 = (\sqrt{409})^2; \sqrt{409} - \text{не натуральное число}$$

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{409}}{2} - \text{не целое целое число} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ не удовлетв. условию, т.к. m и n - натуральные числа $\Rightarrow m-2h$ (т.е. x) -
 точно целое число

Ответ: $(10; 3)$

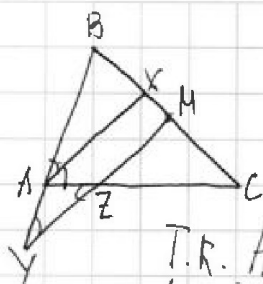


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: AX - биссектриса, $AC=18$, $AZ=6$, $YZ=8$,
 $Y \in AB$, $Z \in AC$, $YZ \parallel AX$, M - середина BC
Найти: BC

Т.к. AX - биссектриса $\angle BAC$, то $\angle BAX = \angle CAX = \frac{1}{2} \angle BAC$
 $AX \parallel YZ \Rightarrow \begin{cases} \angle BAX = \angle BYM, \text{ как соответствующие } \angle \text{ при } \parallel AX \text{ и } YM \text{ секущей } YB \\ \angle CAX = \angle AZY, \text{ как соответствующие } \angle \text{ при } \parallel AX \text{ и } YZ \text{ секущей } AC \end{cases}$

$$\Rightarrow \angle AYZ = \angle AZY \Rightarrow \triangle AYZ - \text{р/б} \Rightarrow AY = AZ = 6$$

$$\begin{aligned} &AX \parallel MZ \\ &\left. \begin{aligned} &CZ : AZ = 2 : 6 = 1 : 3 \\ &MZ \cap BC = M, AX \cap BC = X \end{aligned} \right\} \Rightarrow CM : MX = CZ : AZ = 2 : 1 \end{aligned}$$

$$\text{В } \triangle AYZ \text{ по следствию из Т. косинусов: } \cos AYZ = \frac{AY^2 + YZ^2 - AZ^2}{2 \cdot AY \cdot YZ} = \frac{6^2 + 8^2 - 6^2}{2 \cdot 6 \cdot 8} = \frac{2}{3}$$

$$\angle AYZ = \angle BAX \Rightarrow \cos AYZ = \cos BAX = \frac{2}{3}, \angle BAX = \frac{1}{2} \angle BAC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos BAC = 2 \cos^2 BAX - 1 = \frac{8}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$$

$$\text{Т.к. } M - \text{середина } BC \Rightarrow \begin{aligned} &CM = BM = \frac{1}{2} BC \\ &CM = 2MX \end{aligned} \Rightarrow MX = \frac{1}{4} BC \Rightarrow BX = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) BC = \frac{1}{4} BC$$

Рассмотрим $\triangle BAX$ и $\triangle BYM$

$$\begin{aligned} 1. \angle BAX &= \angle BYM \Rightarrow \text{по I-по-ку подобия} \Rightarrow \frac{AB}{BY} = \frac{BX}{BM} = \frac{1}{2} \\ 2. \angle B &= \angle B - \text{общий} \end{aligned}$$

$$\frac{AB}{BY} = \frac{AB}{AB+AY} = \frac{AB}{AB+6} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2AB = AB+6 \Rightarrow AB=6$$

$$\text{В } \triangle ABC \text{ по Т. кос: } BC = \sqrt{AC^2 + AB^2 - 2 \cos BAC \cdot AB \cdot AC} = \sqrt{324 + 36 + 2 \cdot \frac{1}{9} \cdot 6 \cdot 18}$$

$$= \sqrt{384} = 2\sqrt{96} = 4\sqrt{24} = 8\sqrt{6}$$

Ответ: $8\sqrt{6}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+4} = \frac{1}{2} + \sqrt{13}/2$$

$$x+4 = \frac{1}{4} + \frac{13}{4} \Rightarrow \sqrt{13}/2$$

$$x = \frac{1/4 + 13/4}{2} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{13}-1}{2}$$

$$0 < \frac{\sqrt{13}-1}{2} < 3$$

$$y = \frac{\sqrt{13}-1}{2}$$

$$\sqrt{3-x} = 1 + \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$3-x = 1 + \frac{13}{4} + \sqrt{13}$$

$$x = -1/2 - \sqrt{10} < 0 \Rightarrow \text{не уга}$$

Ответ: $(\sqrt{13}/2)$

Ответ: $(\frac{\sqrt{13}-1}{2}, \frac{\sqrt{13}-1}{2})$

$$1) a = b - 2$$

$$b^2 - 4b + 4 + b^2 = 7$$

$$2b^2 - 4b - 3 = 0$$

$$D/4 = 4 + 6 = 10$$

$$b = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{2} = \begin{cases} 1 - \sqrt{10}/2 < 0 \Rightarrow \text{не уга} \\ 1 + \sqrt{10}/2 \end{cases}$$

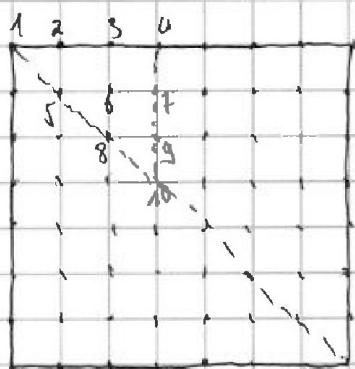


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Всего узлов - $8^2 = 64$

Рассмотрим варианты покраски первого узла в белый из 1-й (верхней половины сетки), т.е. узлы с 1 по 32. Т.е. для покраски узлов из нижней сетки варианты будут идентичными

- 1) Раскрасим узел 1 в белый. Для покраски 2-го по выбору узла есть 31 вариант (каждый из узлов, не считая узел 1, из которых 16 в первой половине сетки)
- 2) Для узла 2 будет 30 вариантов (без узла 1, т.е. этот вариант мы посчитали, и без второго узла в верхней половине)

Рассмотрим варианты покраски только узлов половины одной четверти квадрата (четверть делится по диагонали) (см. рис.)

Для 1-го узла - 9 узлов в этой части + 1 узел в 1-й половине - 10 вариантов

Для 2-го узла - 8 узлов (без 1-го) + 1 узел в 1-й половине - 9 вариантов

Для 3-го узла - 7 вариантов (без 1-го и 2-го) + 1 узел в 1-й половине - 8 вариантов

Для 4-го узла - 6 вариантов (узлы без 1-3-го) + 1 узел в 1-й половине - 7 вариантов

Для 5-го узла - 5 вариантов (узлы без 1-4-го) + 1 узел в 1-й половине - 6 вариантов

Для 6-го узла - 4 варианта (узлы без 1-5-го) + 1 узел в 1-й половине - 5 вариантов

Рассмотрим квадрат, разбитый по диагонали. В каждой половине 36 узлов. Для 1-го узла - 35 различных вариантов (36-1 узел в части), для 2-го - 34 варианта (36-2 узла), т.е. для каждого узла в этой половине 36-номер узла вариантов. Это арифметическая прогрессия, первый член которой = 35, а разность = -1; в ней 36 членов

$$S_{35} = \frac{35 + 1}{2} \cdot 36 = \frac{36}{2} \cdot 36 = 18 \cdot 36 = 648 \text{ вариантов}$$

Ответ: 648 вариантов



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

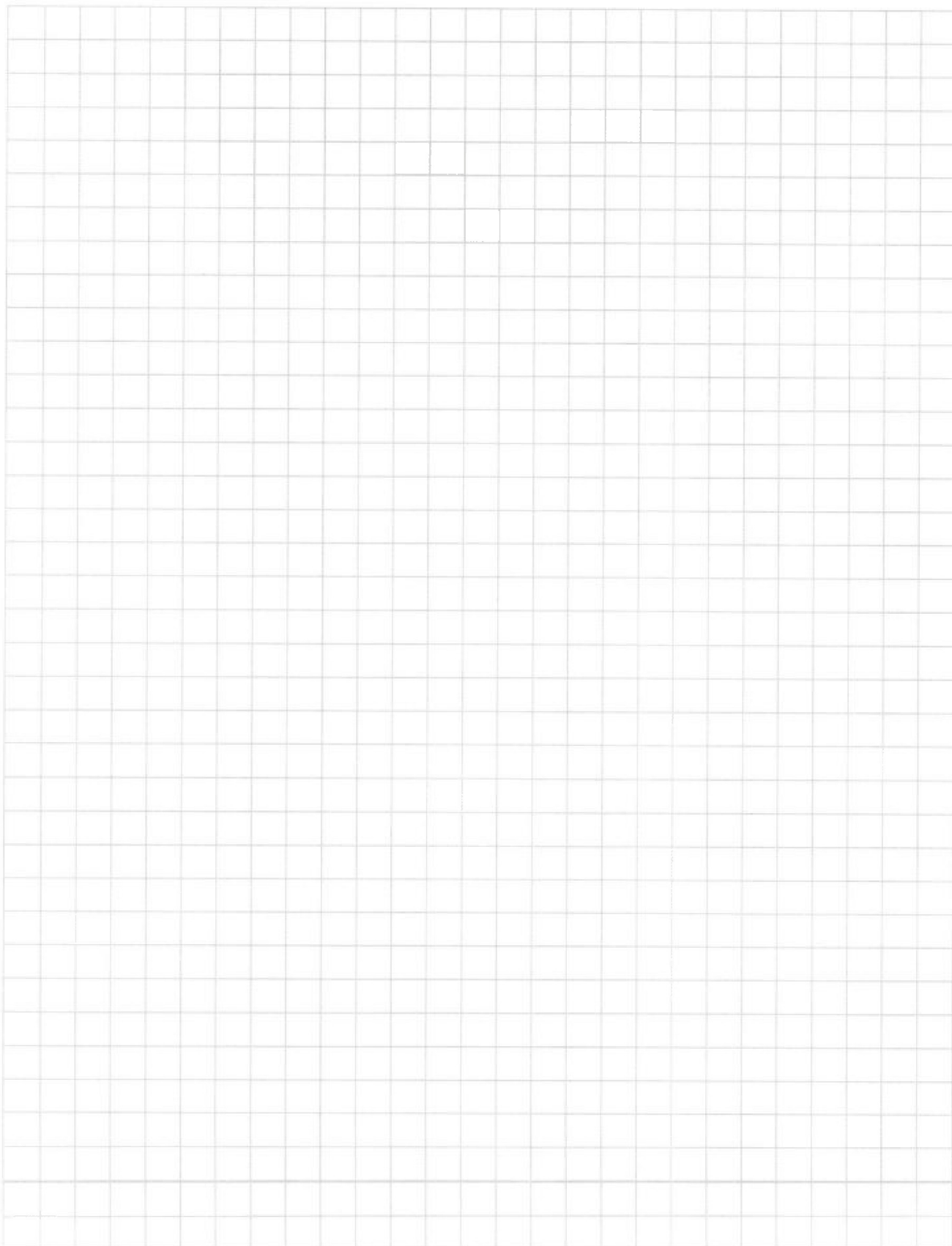
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

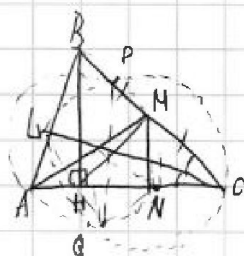
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: AM - медиана; CL - бис-са;
 $PQ \parallel BH$; BH - высота; $N \in AC$; $AB=6$; $AN=5$
Найти: AC ; BC

Пусть O_1 - центр ω , O_2 - центр ω .

Т.к. AM - диаметр ω , то O_1 - середина AM ; CL - диаметр ω $\Rightarrow O_2$ - серед.

$O_1P=O_1Q=AO_1=O_1N=O_1M$ как радиусы окр-сти ω

$\angle ANM$ - вписанный $\angle$ в ω , опирающийся на диаметр $\Rightarrow \angle ANM=90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow MN \perp AC$ $\Rightarrow MN \parallel BH$, M - середина $BC \Rightarrow MN$ - средняя линия

$\triangle CBH \Rightarrow CN=AH \Rightarrow MN$ - медиана $\Rightarrow \triangle CMH$ $\Rightarrow CH=CN=\frac{1}{2}BC$

Пусть $BC=x$, $\angle ACB=\alpha \Rightarrow CH=BC \cdot \cos \alpha$, $CN=\frac{1}{2}CH=\frac{1}{2}BC \cdot \cos \alpha=HN=\frac{1}{2}x \cos \alpha$

$MN=\frac{1}{2}BC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2}x \sin \alpha \Rightarrow BH=x \sqrt{1-\cos^2 \alpha}$, $AN=5=\frac{1}{2}x \cdot \cos \alpha$

В $\triangle ABH$ по Т. Пифагора: $AB^2=BH^2+AH^2$

$$36=x^2(1-\cos^2 \alpha)+25-5\cos \alpha x+\frac{1}{4}x^2 \cdot \cos^2 \alpha$$

$$11-x^2+\frac{3}{4}x^2 \cos^2 \alpha+5\cos \alpha x=0$$

$$x^2\left(\frac{3}{4}\cos^2 \alpha-1\right)+5x \cos \alpha+11=0$$

$$D=25\cos^2 \alpha-33\cos^2 \alpha+44=44-8\cos^2 \alpha$$

$$\begin{cases} 12x-64 \leq 12 \\ 9x-64 \geq 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x-64 \leq 12 \\ 64-9x \leq 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5x \leq 24 \\ x \geq 24/5 \end{cases}$$