



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



$36; 16; -24$

$12 + 2 \cdot 24 = 36; 16; -24$

$4 - 8$

1. [3 балла] Второй член арифметической прогрессии равен $12 - 12x$, четвёртый член равен $(x^2 + 4x)^2$, а восьмой равен $(-6x^2)$. Найдите x .

2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $10x + 5y$ при условии

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 2y| \leq 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$ и $B = m^2n - 2mn^2 - 2mn$ равно $17p^2$, а другое равно $15q^2$, где p и q — простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}, \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[3]{3y} = 2y^5 - \sqrt[3]{3x} + 4y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 7×7 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 6$, $AN = 5$.



1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
{ из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. 2 первый член - a_1 ; разности - q , тогда:

$$a_1 + q = 12 - 12x$$

$$a_1 + 3q = (x^2 + 4x)^2$$

$$a_1 + 7q = (-6x^2)$$

$$\text{Заметим, что } 2(a_1 + q) + a_1 + 7q = 3(a_1 + 3q)$$

$$2 \cdot 12 \cdot (1 - x) + (-6x^2) = 3(x^2 + 4x)^2 = 3(x^4 + 8x^3 + 16x^2)$$

$$24 - 24x - 6x^2 = 3x^4 + 24x^3 + 48x^2 \quad | :3$$

$$8 - 8x - 2x^2 = x^4 + 8x^3 + 16x^2$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 2x^2 + 8x - 8 = 16$$

$$(x^2 + 4x)^2 + 2(x^2 + 2)^2 = 16 = 0$$

$$(x^2 + 4x - 4)(x^2 + 4x + 4) + 2(x^2 + 2)^2 = 0$$

$$(x^2 + 4x - 4)(x + 2)^2 + 2(x^2 + 2)^2 = 0$$

$$(x^2 + 4x - 4)(x + 2)^2 + 2(x^2 + 2)^2 = 0$$

$$(x^2 + 4x - 4)(x + 2)^2 + 2(x^2 + 2)^2 = 0$$

$$(x^2 + 4x - 4)(x + 2)^2 + 2(x^2 + 2)^2 = 0$$

$$(x^2 + 4x - 4)(x + 2)^2 + 2(x^2 + 2)^2 = 0$$

$$(x^2 + 4x - 4)(x + 2)^2 + 2(x^2 + 2)^2 = 0$$

$$(x^2 + 4x - 4)(x + 2)^2 + 2(x^2 + 2)^2 = 0$$

$$(x^2 + 4x - 4)(x + 2)^2 + 2(x^2 + 2)^2 = 0$$

$$(x^2 + 4x - 4)(x + 2)^2 + 2(x^2 + 2)^2 = 0$$

$$(x^2 + 4x - 4)(x + 2)^2 + 2(x^2 + 2)^2 = 0$$

$$(x^2 + 4x - 4)(x + 2)^2 + 2(x^2 + 2)^2 = 0$$

$$(x^2 + 4x - 4)(x + 2)^2 + 2(x^2 + 2)^2 = 0$$

$$(x^2 + 4x - 4)(x + 2)^2 + 2(x^2 + 2)^2 = 0$$

$$(x^2 + 4x - 4)(x + 2)^2 + 2(x^2 + 2)^2 = 0$$

$$(x^2 + 4x - 4)(x + 2)^2 + 2(x^2 + 2)^2 = 0$$

$$(x^2 + 4x - 4)(x + 2)^2 + 2(x^2 + 2)^2 = 0$$

$$(x^2 + 4x - 4)(x + 2)^2 + 2(x^2 + 2)^2 = 0$$

$$(x^2 + 4x - 4)(x + 2)^2 + 2(x^2 + 2)^2 = 0$$

$$(x^2 + 4x - 4)(x + 2)^2 + 2(x^2 + 2)^2 = 0$$

$$(x^2 + 4x - 4)(x + 2)^2 + 2(x^2 + 2)^2 = 0$$

$$(x^2 + 4x - 4)(x + 2)^2 + 2(x^2 + 2)^2 = 0$$

$$(x^2 + 4x - 4)(x + 2)^2 + 2(x^2 + 2)^2 = 0$$

$$(x^2 + 4x - 4)(x + 2)^2 + 2(x^2 + 2)^2 = 0$$

$$(x^2 + 4x - 4)(x + 2)^2 + 2(x^2 + 2)^2 = 0$$

$$(x^2 + 4x - 4)(x + 2)^2 + 2(x^2 + 2)^2 = 0$$

$$(x^2 + 4x - 4)(x + 2)^2 + 2(x^2 + 2)^2 = 0$$

$$\begin{cases} (x+2)^2 = 0 \\ x^2 + 4x - 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2 \\ x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{2} = -2 \pm \sqrt{6} \end{cases}$$

Проверим корни: $a_2 = 12 + 24 = 36$ } $q = 10$
 $a_4 = 16$ } -2 подходит
 $a_8 = -24$ } $q =$

Заметим, что $(x^2 + 4x)^2 \geq 0$, а $(-6x^2) \leq 0$, т.е. прогрессия убывающая $\rightarrow q < 0 \rightarrow \sqrt{6} - 2$ не подходит.

$$a_2 = 12 - 12(\sqrt{6} - 2) = 36 - 12\sqrt{6}$$

$$a_4 = (-\sqrt{6} - 2)^2 + 4(\sqrt{6} - 2)^2 = (6 - 4\sqrt{6} + 4 + 4\sqrt{6} - 8) = 2^2 = 4$$

$$a_8 = -6(\sqrt{6} - 2)^2 = -6(6 - 4\sqrt{6} + 4) = -24 + 24\sqrt{6} - 48 = 24\sqrt{6} - 72$$

$$\rightarrow q = \frac{4 - (36 - 12\sqrt{6})}{2} = \frac{-32 + 12\sqrt{6}}{2} = 6\sqrt{6} - 16$$

$$4 + 4 \cdot (6\sqrt{6} - 16) = 24\sqrt{6} - 48 \quad \text{— подходит.}$$

Ответ: $\begin{cases} x = -2 \\ x = 24\sqrt{6} - 48 \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x = -\frac{24}{5}; y = \frac{2}{3}x - 2 = -\frac{24 \cdot 2}{3 \cdot 5} - 2 = -\frac{16}{5} - 2 = -\frac{26}{5}$$

Проверим, что $|2x - 3y| = \left| -\frac{48}{5} + \frac{3 \cdot 26}{5} \right| = 6 \leq 6$ - верно.
 $|3x - 2y| = \left| 1 - \frac{3 \cdot 24}{5} + \frac{2 \cdot 26}{5} \right| = 4 \leq 4$ - верно.

Тогда минимальная сумма $10x + 5y = 10 \cdot \left(-\frac{24}{5}\right) + 5 \cdot \left(-\frac{26}{5}\right) = -48 - 26 = -74$

Ответ: $\min 10x + 5y = -74$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2. $\min (10x + 5y)$. Пусть $10x + 5y = k$, тогда нужно $\min k$.

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 2y| \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 \leq 2x - 3y \leq 6 & (1) \\ -4 \leq 3x - 2y \leq 4 & (2) \end{cases}$$

(1): $-6 \leq 2x - 3y \leq 6$
 $-6 - 2x \leq -3y \leq 6 - 2x \quad | :(-1)$
 $2x + 6 \geq 3y \geq 2x - 6 \quad | :3$
 $\frac{2}{3}x + 2 \geq y \geq \frac{2}{3}x - 2$

т.е. Тогда этому ур. соответствуют все точки между прямыми $y = \frac{2}{3}x - 2$

и $y = \frac{2}{3}x + 2$

$y = \frac{2}{3}x - 2$: $x=0 \quad x=3$
 $y=2 \quad y=0$

$y = \frac{2}{3}x + 2$: $x=0 \quad x=3$
 $y=2 \quad y=4$

(2): $-4 \leq 3x - 2y \leq 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow -4 + 3x \leq -2y \leq 4 + 3x \quad | :(-2)$

$1,5x + 2 \geq y \geq 1,5x - 2$

А этому ур. соответствуют также все точки и /у
 прямые $y = 1,5x - 2$ и $y = 1,5x + 2$: $y = 1,5x - 2$: $x=0 \quad x=2$
 $y=-2 \quad y=1$
 $y = 1,5x + 2$: $x=0 \quad x=-2$
 $y=2 \quad y=-1$

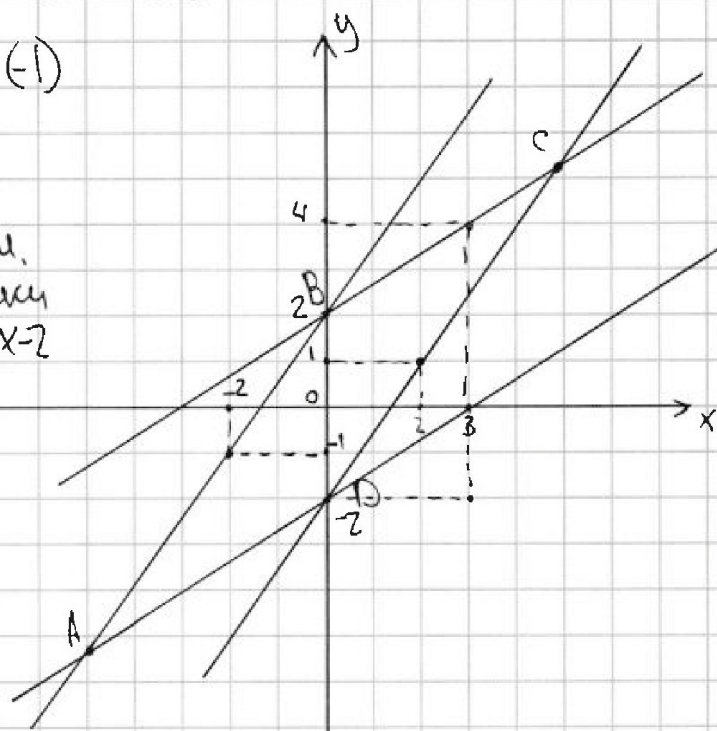
Тогда все точки, лежащие внутри и на границе 4-ка ABCD удовлетв. ур. до исходному условию.

Заметим, что $10x + 5y = k \Rightarrow y = -2x + \frac{k}{5}$ это прямая с коэф. наклона -2, которая пересекает

Заметим, что в т. А x и y принимают свои минимальные неотрицательные значения. Тогда координаты точки А и есть искомого значения. Эта точка - пересечение прямых АВ и АД, т.е. $y = 1,5x + 2$

и $y = \frac{2}{3}x - 2$ соответственно. $\rightarrow 1,5x + 2 = \frac{2}{3}x - 2$

$(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}x) = -4 \rightarrow x \cdot \frac{5}{6} = -4 \rightarrow x = -\frac{24}{5}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(1): $p=5$, ~~no range~~ $m=17 \rightarrow n=5: m \cdot n \cdot (m-2n-2) =$
 $= 17 \cdot 5 \cdot (5 - 17 \cdot 2) = -1590$ - верно.

$(17-10) \cdot (17+10+13) = 7 \cdot 20 = 140$

(2) $m=p$: $m-2n-2=p$
 $n=17$ $p-34-2=p \rightarrow p=-36=0$

(3) $m=1$; $n=17p$: $1-34p-2=p \rightarrow 35p=-1$

(4) $17p-2-2=p \rightarrow 16p=-4 \rightarrow \emptyset$

(5) $mn=1 \rightarrow m=n=1$
 $m-2n-2 = 1-4=-3 \not\equiv 17 \rightarrow \emptyset$

~~(m-2n)-~~

1 range Answer: $(m; n) = (n; m) = (3; 10)$

$(n=3; m=10)$ - eq. pairs



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3. \begin{aligned} A &= m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n = (m-2n)^2 + 13(m-2n) + (m-2n)(m-2n+3) \\ B &= m^2n - 2mn^2 - 2mn = mn(m-2n-2) \end{aligned}$$

4 случая, когда $A = 17p^2$; $B = 15q^2$. Если $A = 17p^2$, то возможны следующие случаи: 1) $\begin{cases} m-2n=17 \\ m-2n+13=p^2 \end{cases} \rightarrow p^2 = 17+13=30$ но 30 это не квадрат числа $\rightarrow$ такой сл. невозможен.

$$2) \begin{cases} m-2n=p^2 \\ m-2n+13=17 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m-2n=p^2 \\ m-2n=4 \end{cases} \text{ в таком случае } p=\pm 2 - \text{возможны}$$

$$\text{но тогда } mn(m-2n-2) = 15q^2 \rightarrow 15q^2 = 2mn, \text{ т.е.}$$

$$15q^2 : 2. \text{ Это возможно только если } q=\pm 2, \text{ и тогда } 2mn = 15 \cdot 4 \rightarrow mn = 30 \rightarrow \begin{cases} m-2n=4 \\ mn=30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2n^2+4n-30=0 \\ n^2+2n-15=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-2n=4 \rightarrow m=4+2n \\ (n+5)(n-3)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n=-5 \\ n=3 \end{cases}, \text{ но т.к. } n - \text{натуральное, то } \underline{n=3; m=10}$$

$$3) \begin{cases} m-2n=17p \\ m-2n+13=p \end{cases} \rightarrow (m-2n) - (m-2n+13) = 16p \rightarrow 16p = -13$$

но p - простое $\rightarrow$ этого сл. не существует.

$$4) \begin{cases} m-2n=p \\ m-2n+13=17p \end{cases} \rightarrow 16p = 13, \text{ но } p \text{ простое, сл. не существует.}$$

$$5) \begin{cases} m-2n=1 \\ m-2n+13=17p^2 \end{cases} \rightarrow 17p^2 = 14 \rightarrow \emptyset$$

$$6) \begin{cases} m-2n=17p^2 \\ m-2n+13=1 \end{cases} \rightarrow 17p^2 = -12 \rightarrow \emptyset$$

Тогда ед. возможные варианты 2-го случая систем при $n=3$
 $m=10$.

Теперь рассмотрим случаи, когда $A = 15p^2$
 $B = 17q^2$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Тоже } \begin{cases} mn(m-2n-2) = 17 \cdot p^2 \\ (m-2n)(m-2n+3) = 15q^2 \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} mn = 17 \\ m-2n-2 = p^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m=17; n=1 (1) \\ n=17; m=1 (2) \end{cases}$$

$$(1): m-2n-2 = p^2 = 17-4=13 \neq$$

$$(2): m-2n-2 = 1-34-2 = -35 \neq$$

$$2) \begin{cases} mn = p^2 \\ m-2n-2 = 17 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m=p; n=p (1) \\ m=p^2; n=1 (2) \\ h=p^2; m=1 (3) \end{cases}$$

$$(1): p-2p-2=17 \rightarrow -p-2=17 \rightarrow p=-19 - \text{верно. т.е.}$$

$$m=-19=n, \text{ но } mn(m-2n)(m-2n+3) = 19 \cdot (22 \cdot 15) \rightarrow \text{не подходит.}$$

$$(2) m=p^2; n=1 \rightarrow m-2n-2=17 \rightarrow p^2-3=17 \rightarrow p^2=20 \neq$$

$$(3) h=p^2; m=1 \rightarrow 1-2p^2-2=17 \rightarrow -2p^2=17 \rightarrow \neq$$

$$3) \begin{cases} mn = p \\ m-2n-2 = 17p \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m=p; n=1 (1) \\ n=p; m=1 (2) \end{cases}$$

$$(1): m=p; n=1 \rightarrow p-2-2=17p \rightarrow 15p=-4 \rightarrow \neq$$

$$(2): 1-2p-2=17p \rightarrow 19p=-1 \rightarrow p=-\frac{1}{19} \neq$$

$$4) \begin{cases} mn = 17p^2 \\ m-2n-2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m=17p^2; n=1 (1) \\ m=1; n=17p^2 (2) \\ m=17; n=p^2 (3) \\ m=p^2; n=17 (4) \\ m=17p; n=p (5) \\ m=p; n=17p (6) \end{cases}$$

$$(1): n=1; m=3+2n=5; m=17 \cdot p^2 \neq$$

$$(2): m=1-2n=-2 \rightarrow n=1 \rightarrow m=17p^2 \neq$$

$$(3): m=17 \rightarrow 2n=14 \rightarrow n=7 \rightarrow p^2 \neq$$

$$(4): m=17p \rightarrow 2n=m-3=17p-3=2p^2 \rightarrow 2p^2-17p+3=0 \quad D=889-24=865 \rightarrow \sqrt{865} \rightarrow \text{целых нет} \rightarrow \neq$$

$$(5): m=17p; n=p: m-2n=17p-2p=15p=3 \neq$$

$$(6): m=p; n=17p: -33p=3 \rightarrow p=-\frac{1}{11} \neq$$

$$5) \begin{cases} mn = 17p \\ m-2n-2 = p \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m=17; n=p (1) \\ m=p; n=17 (2) \\ m=1; n=17p (3) \\ m=17p; n=1 (4) \end{cases} \quad (1): 17-2p-2=p \rightarrow 3p=15 \rightarrow p=5$$



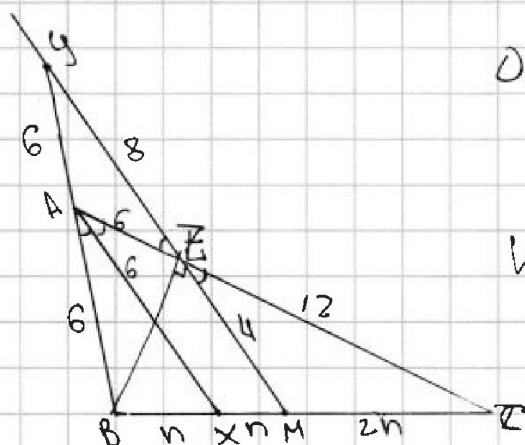
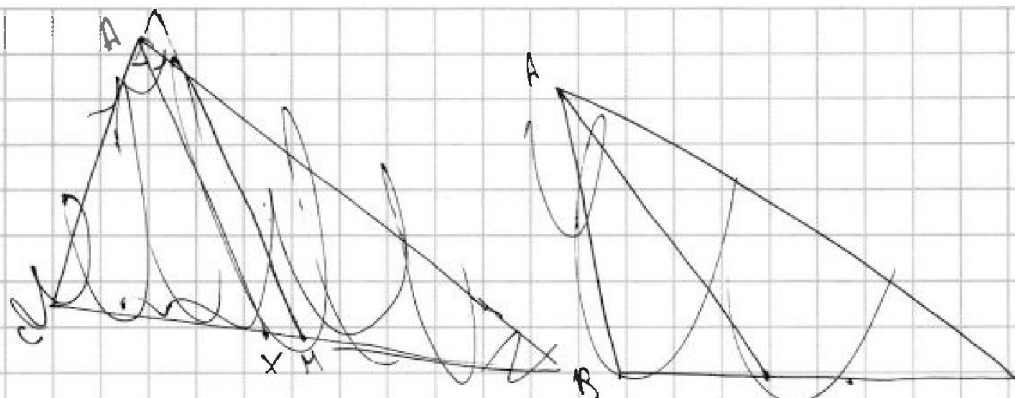
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4.



Дано: $\triangle ABC$; AX — медиана; M — с.р. BC ;
 $MZ \parallel AX$; $MZ \cap AB = Z$;
 $MZ \cap AB = Y$; $AC = 18$; $AZ = 6$;
 $YZ = 8$.

Найти: BC

Решение: $MZ \parallel AX$, тогда по обратной Т. Фалеса:

$$\frac{MC}{MX} = \frac{ZC}{ZA} = \frac{12}{6} = \frac{2}{1}$$

$\angle MX = 2n$, тогда $MC = 2n$, но M — с.р. $BC \rightarrow BM = MC$; $Bx + n = 2n \rightarrow Bx = n$

Т.к. AX — медиана, то по основанию св-ва медианы:

$$\frac{CX}{BX} = \frac{AC}{AB} = \frac{3n}{n} = \frac{3}{1} \rightarrow AB = \frac{AC}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

Заметим, что X — с.р. BM , и $AX \parallel MY \rightarrow AX$ — сред. лин. $\triangle YBM$,

$\rightarrow A$ — с.р. $BY \rightarrow AY = AB = 6$ (т.к. $\triangle MYB$, $BZ^2 = BY^2 - YZ^2 = 12^2 - 8^2 = 80$)

A — с.р. YB | $\triangle YZB$ и $\triangle YBZ$ т.к. медиана равна половине гипотенузы, $\rightarrow \angle YZB = \angle BZH = 90^\circ$

$$AY = AB = AZ$$

Пусть $AX = y$, тогда т.к. AX — сред. лин. $\triangle YBM$: $MY = 2y = 8 + MZ$

$$AX \parallel ZM \rightarrow \triangle ZMS \sim \triangle AEX \rightarrow \frac{MZ}{AX} = \frac{MZ}{y} = \frac{AZ^2}{AC^2} = \frac{12^2}{18^2} = \frac{32}{23} \rightarrow MZ = \frac{32}{23}y$$

$$\text{Тогда } 2y = 8 + \frac{32}{23}y \rightarrow \frac{10}{23}y = 8 \rightarrow y = \frac{184}{10} = 18.4$$

$$\text{Тогда } 2y = 8 + \frac{32}{23}y \rightarrow \frac{10}{23}y = 8 \rightarrow y = \frac{184}{10} = 18.4$$

$$\text{Т.к. } \angle BZM = 90^\circ \triangle BZM \text{ и } \triangle YBZ: BM^2 = MZ^2 + BZ^2 = 4^2 + 80 = 16 + 80 = 96$$

$$\rightarrow BM^2 = (2n)^2 = 96 \rightarrow 4n^2 = 96 \rightarrow n^2 = 24 \rightarrow n = 2\sqrt{6}; BC = 4n = 8\sqrt{6}$$

$$\text{Следовательно: } BC = 8\sqrt{6}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5.
$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2} & (1) \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3y} = 2y^5 - \sqrt[4]{3x} + 4y^2 & (2) \end{cases}$$
 ОДЗ: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 3 \\ x \geq -4 \end{cases}$

~~Реш~~ Заметим, что 2-е ур-е симметрично отн. x, y : $2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3y} = 2y^5 + 4y^2 - \sqrt[4]{3x}$
т.е. при замене x на y и y на x левая часть не меняется $\rightarrow x = y$ (т.к. $x, y \geq 0$)

Тогда (1) ур-е примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 &= 2\sqrt{12-x-x^2} \\ 12-x-x^2 &= 12-4x+3x-x^2 = 4(3-x) + x(3-x) = (3-x)(4+x) \\ \sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} &= 2\sqrt{(3-x)(4+x)} - 5 \end{aligned}$$

$$(\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x})^2 = (2\sqrt{(3-x)(4+x)} - 5)^2$$

$$x+4 - 2\sqrt{(x+4)(3-x)} + 3-x = 24(3-x)(4+x) - 20\sqrt{(3-x)(4+x)} + 25$$

$$7 - 2\sqrt{(x+4)(3-x)} = 4(3-x)(4+x) - 20\sqrt{(3-x)(4+x)} + 25$$

$$\sqrt{(x+4)(3-x)} = t, t \geq 0:$$

$$7 - 2t = 4t^2 - 20t + 25; 4t^2 - 18t + 18 = 0; 2t^2 - 9t + 9 = 0; 2t^2 - 6t - 3t + 9 = 0; 2t(t-3) - 3(t-3) = 0; (t-3)(2t-3) = 0$$

$$\begin{cases} t = 3 \\ t = 1,5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{(x+4)(3-x)} = 3 \\ \sqrt{(x+4)(3-x)} = 1,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12-x-x^2 = 9 \\ 12-x-x^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+4 \geq 0 \rightarrow x \geq -4 \text{ (} x \geq 0 \text{ из ОДЗ)} \\ 3-x \geq 0 \rightarrow x \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + x - 3 = 0 \\ x^2 + x + \frac{9}{4} - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x - 3 = 0 & (1) \\ x^2 + x - \frac{39}{4} = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1): D = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 1 + 12 = 13 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$(2): D = b^2 - 4ac = 1 + 4 \cdot 1 \cdot \frac{39}{4} = 40 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{40}}{2}$$

Заметим, что $\frac{-1 - \sqrt{13}}{2} < 0$, $\frac{-1 - \sqrt{40}}{2} < 0$, а $x \geq 0 \rightarrow$ это не корни.
 $36 < 40 < 49 \rightarrow 6 < \sqrt{40} < 7 \rightarrow 5 < \sqrt{40} - 1 < 6 \rightarrow \frac{5}{2} < \frac{\sqrt{40} - 1}{2} < 3$
 $\rightarrow 0 < x < 3 \rightarrow \frac{\sqrt{40} - 1}{2}$ — подходит, $1 < \sqrt{13} < 4 \rightarrow 0 < \frac{\sqrt{13} - 1}{2} < 1,5$

Тогда ответ: $(\frac{\sqrt{40}-1}{2}; \frac{\sqrt{40}-1}{2}); (\frac{\sqrt{13}-1}{2}; \frac{\sqrt{13}-1}{2})$

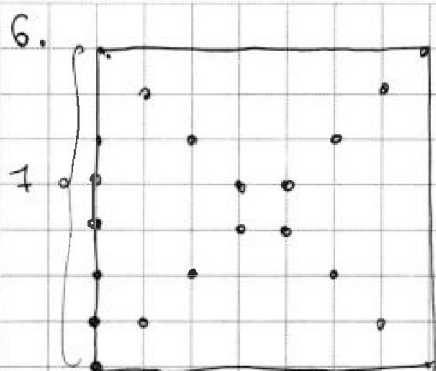
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что в каждой строке и в каждой колонке по 8 узлов, всего $8^2 = 64$.

При выборе узлов для диагонали будет 4 варианта выбора точек. →

узлов лежащих не на диагонали $64 - 16 = 48$
Итого вар-тов будет $\frac{C_{48}^{48}}{4} = \frac{48!}{2! \cdot 48! \cdot 4} = \frac{48 \cdot 47}{8} = 47.6$

Вариантов выбрать 2 узла, лежащих на одной диагонали - $\frac{8!}{2! \cdot 8!} = \frac{48 \cdot 7}{2} = 4.7$ вар-тов.

Для увеличения на одной диагонали будет 2 варианта выбора → $\frac{4.7}{2}$, кот.к.

диагонали 2, $\frac{4.7 \cdot 2}{2} = 4.7$

Итого всего вариантов будет $4.7 + 47.6 = 28 + 282 = 310$ вариантов, способов

Ответ: 310 способов.

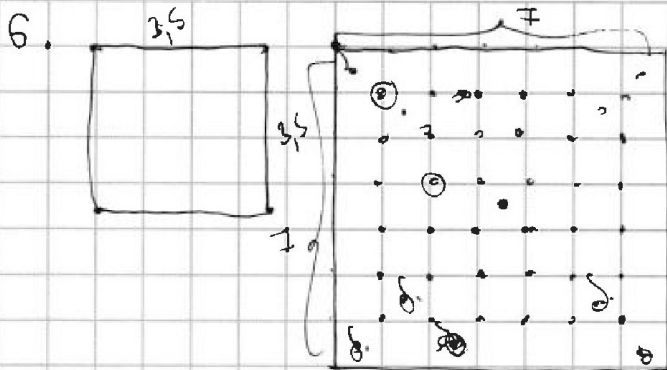


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



векторы на квадрате →
→ 3 : 4 → : 2

$$C_{16}^n = \frac{16!}{2! \cdot 14!} = \frac{15 \cdot 16}{2} = 15 \cdot 8$$

$$\therefore \frac{15 \cdot 8}{2} = 15 \cdot 4 = 60$$

$$\frac{48!}{2! \cdot 46!} = \frac{48 \cdot 47}{2} = 24 \cdot 47$$

$$8 \cdot 8 = 64$$

$$64 - 16 = 54 - 6 = 48$$

$$\frac{6}{24 \cdot 47} = \boxed{476 + 15 \cdot 4}$$

$$1. \quad a_2 = 12 - 12x = a_1 + r \quad \Rightarrow \quad 2r = (x^2 + 4x)^2 - (12 - 12x)$$

$$a_4 = (x^2 + 4x)^2 = a_1 + 3r$$

$$a_8 = (-6x^2) = a_1 + 7r = a_1 + r + 3 \cdot 2r =$$

$$= (12 - 12x) + 3 \cdot (x^2 + 4x)^2 - 3 \cdot (12 - 12x) = 3 \cdot (x^2 + 4x)^2 -$$

$$- 2(12 - 12x) = 3(x^4 + 8x^3 + 16x^2) - 24 + 24x = -6x^2$$

$$3x^4 + 24x^3 + 48x^2 - 24 + 24x + 6x^2 = 0$$

$$3x^4 + 24x^3 + 54x^2 + 24x - 24 = 0 \quad | : 3$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0$$

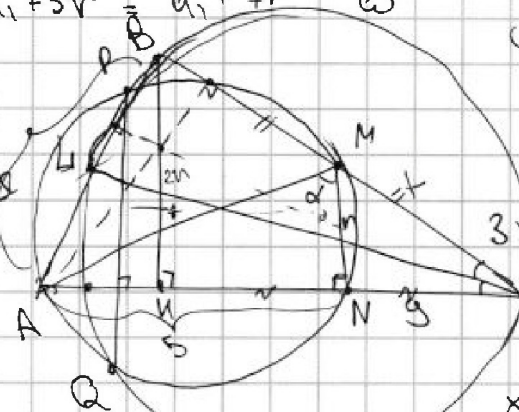
$$a_6 = a_1 + 5r = a_1 + 7r \quad \omega$$

$$CN(CN+5) = 6$$

$$= x \cdot 2x$$

$$y(y+AN) =$$

$$y^2 + y \cdot AN$$



$$2a_1 + 2r + a_1 + 7r = 3a_1 + 9r$$

$$2AB = 6; AN = 5$$

$$(x^2 + 4x)^2 = 12 - 12x; a_4 = (x^2 + 4x)^2 = a_1 + 3r$$

$$a_1 + 7r = -6x^2$$

$$3(x^2 + 4x)^2 - 2(12 - 12x) - 6x^2$$

$$3(x^2 + 4x)^2 = -6x^2 - 24x + 24$$

$$3x^4 + 24x^3 + 48x^2 + 6x^2 + 24x - 24 = 0$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$x^4 + 4x^2(x+4)^2 + 2x^2 + 16x + 32 -$$

$$- 8x - 40 = 0$$

$$x^2(x+4)^2 + 2(x+4)^2 - 8(x+5) = 0$$

$$(x+4)^2(x^2+2) = 8(x+5)$$

$$(x^2-2)(x^2+4) + 8x(x+1)^2 = 0$$

$$+ 8x - 8 = 0 \quad x^4 + 18x^2 + 1 +$$

$$+ 8x^3 + 16x^2 + 8x - 8 =$$

$$= (x^2+1)^2 + 8x(x^2+1) - 8 = 0; \quad (x^2-2)(x^2+4) + 8x(x+1)^2 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2} \\ \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2} \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3y} = 2y^5 - \sqrt[4]{3x} + 4y^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x, y > 0 \\ x \leq 3 \\ x \geq -4 \\ 0 < x \leq 3 \end{cases}$$

$$2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3y} = 2y^5 + 4y^2 - \sqrt[4]{3x}$$

если во 2 уравн. подм. x и y мест., то получим то же уравн.

$$\begin{aligned} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 &= 2\sqrt{12-x-x^2} \\ 12 - 4x + 3x - x^2 &= 4(3-x) + x(3-x) = (3-x)(4+x) \end{aligned}$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{(3-x)(4+x)}$$

$$a - b + 5 = 2ab$$

$$a + 5 = 2ab + b = b(2a+1) \rightarrow b = \frac{a+5}{2a+1}$$

$$a - \frac{a+5}{2a+1} + 5 = 2a \cdot \frac{a+5}{2a+1} \quad | \cdot 2a+1$$

$$a(2a+1) - (a+5) + 5 = 2a(a+5)(2a+1)$$

$$4a^2 + a - a - 5 + 5 = (4a^2 + 10a)(2a+1)$$

$$4a^2 = 8a^3 + 4a^2 + 20a^2 + 10a$$

$$8a^3 + 20a^2 + 10a - 4 = 0$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{12-x-x^2}$$

$$\sqrt{12-x-x^2} = 2\sqrt{12-x-x^2}$$

$$\sqrt{x+4} - 2\sqrt{(x+4)(3-x)} + 3-x = 4 \cdot (3-x)(4+x) - 20\sqrt{(3-x)(4+x)} + 25$$

$$7 - 2\sqrt{(x+4)(3-x)} = 4 \cdot (3-x)(4+x) - 20\sqrt{(3-x)(4+x)} + 25$$

$$7 - 2t = 4t^2 - 20t + 25$$

$$4t^2 - 18t + 18 = 0$$

$$2t^2 - 9t + 9 = 0$$

$$2t^2 - 6t - 3t + 9 = 0$$

$$2t(t-3) - 3(t-3) = 0$$

$$t = 3 \dots \dots$$

$$t = \frac{3}{2} \dots \dots$$

$$\frac{12-12x+(x^2+4x)^2}{2} = a_3$$

$$\begin{aligned} \frac{9}{4} - \frac{48}{4} &= -\frac{39}{4} \\ x^2 + x - 3 &= 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+12}}{2} = \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} \end{aligned}$$

$$x^2 + x - \frac{39}{4} = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+39}}{2} =$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. $a_2 = 12 - 2x = a_1 \cdot q, x = ?$

$a_4 = (x^2 + 4x)^2 = a_1 \cdot q^3$

$a_8 = (-6x^2) = a_1 \cdot q^7$

$q = \frac{(12 - 2x)(-6x^2)}{(x^2 + 4x)^2}$

$= \frac{-\sqrt{a_1 \cdot q^8}}{q} = \sqrt{(12 - 2x) \cdot (-6x^2)}$

$52 - 3 \cdot 24 =$

$= 52 - 60 - 12 = 40 - 60 = -20$

$3 \cdot 26 = 60 + 18 = 78$

2. $10x + 5y = k$ $\rightarrow$ $y = \frac{k}{5} - 2x$

$5y = k - 10x \rightarrow y = \frac{k}{5} - 2x$

$\begin{cases} 2x - 3y \geq 0 \\ 3x - 2y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x \geq 3y \\ 3x \geq 2y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \leq \frac{2}{3}x \\ y \leq \frac{3}{2}x \end{cases}$

$\rightarrow 2x - 3y \leq 6$

$3x - 2y \leq 4$

$5x - 5y \leq 10$

$10x + 5y = k$

$5y = -10x + k$

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{k}{5}$

$|2x - 3y| \leq 6$

$2x - 3y \geq 0; 2x \geq 3y; x \geq 1,5y$

$2x - 3y = 6 \rightarrow 3y = 2x - 6$

$\rightarrow y = \frac{2}{3}x - 2$

$x \leq 1,5y$

$3y - 2x = 6 \rightarrow 3y = 2x + 6$

$y = \frac{2}{3}x + 2$

$y = \frac{k}{5} - 2x$

$|3x - 2y| = 4$: 4 сл. $3x - 2y \geq 0$:

$3x \geq 2y \rightarrow 1,5x \geq y$

$3x - 2y \leq 0: 3x \leq 2y$

$2y - 3x = 4 \rightarrow y = \frac{3}{2}x + 2$

$2y = 3x + 4$

$y = 1,5x + 2$

$\begin{cases} 1,5x + 2 = \frac{2}{3}x - 2 \\ 1,5x \leq x \leq \frac{2}{3}y \end{cases}$

$\frac{3}{2}x - \frac{2}{3}x = -4; \frac{9-4}{6} \cdot x = -4; x = \frac{-4 \cdot 6}{5} =$

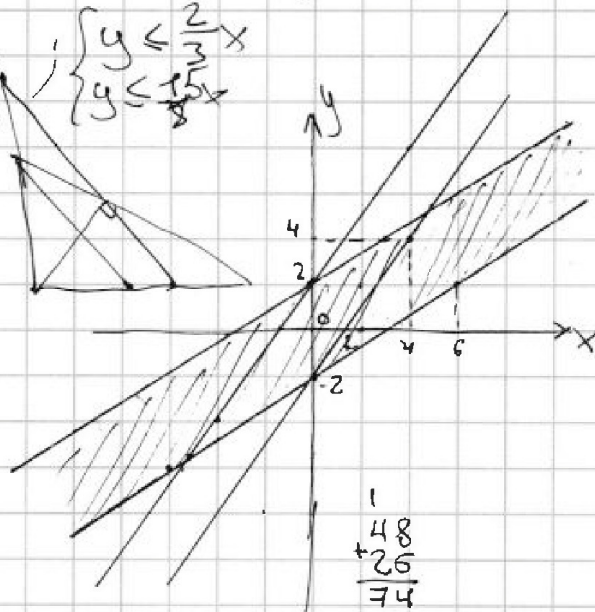
$2y = 3x - 4$

$y = \frac{3}{2}x - 2$

$y = -\frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 10} - 2 = -\frac{16}{5} - 2 = -3,2 - 2 =$

$-\frac{52 \cdot 2}{10 \cdot 3} = -\frac{54,2}{3 \cdot 10} = -3,6 \geq -4,8 \checkmark$

$52 \cdot 5 = 26$



$\begin{matrix} 48 \\ + 26 \\ \hline 74 \end{matrix}$

$10x + 5y = -48 - 26 = -74$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3. $\begin{cases} A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n = 17p^2 \\ B = m^2n - 2mn^2 - 2mn = 15pq^2 \end{cases}$ p, q - простое

$A = (m-2n)^2 + 13(m-2n) = 17p^2 = (m-2n)(m-2n+13) = 17p^2$
 $B = mn(m-2n-2) = 15q^2$

$\begin{cases} m-2n \equiv 0 \\ m-2n+13 \equiv 0 \end{cases} \quad 144-64=80$

4 сл. когда $\begin{cases} m-2n=17 \\ m-2n+13=p^2 \end{cases} \rightarrow 17+13=p^2=30 \rightarrow \emptyset$

4 сл. когда $\begin{cases} m-2n=p^2 \\ m-2n+13=17 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m-2n=p^2 \rightarrow p=2 \\ m-2n=4 \end{cases}$ q простое

$\rightarrow \begin{cases} mn(m-2n-2)=15q^2 \\ m-2n=4 \end{cases} \rightarrow mn \cdot 2 = 15q^2 \rightarrow$ $q=2$:
 $\rightarrow mn \cdot 8 = 15 \cdot 4^2 = 30$
 $\rightarrow \begin{cases} m-2n=4 \rightarrow m=10; n=3 \\ mn=30 \end{cases}$ $6 \cdot 5; 3 \cdot 10$ $4n+8n^2=30; n^2+2n-15=0$
 $n^2-3n+5n-15=0$
 $(n-3)(n+5)=0$
 $\begin{cases} n=3 \\ n=-5 \end{cases}$

4 сл. когда $\begin{cases} m-2n=17p \\ m-2n+13=p \end{cases} \rightarrow m-2n$
 $m-2n-(m-2n+13)=16p; 16p=-13$ контр.

4 сл.: $\begin{cases} m-2n=1 \\ m-2n+13=17p^2 \end{cases} \rightarrow \emptyset$ $\begin{cases} m-2n=17p^2 \\ m-2n+13=1 \\ m-2n=-12 \end{cases}$

$2y = \frac{2}{3}y + 8$
 $\frac{2}{3}y - \frac{2}{3}y = 8$
 $\frac{4}{3}y = 8$
 $y = \frac{8 \cdot 3}{4} = 6$

$\frac{2}{3}y + 8 = \frac{y}{2}$
 $\frac{2}{3}y - \frac{y}{2} = -8$
 $\frac{4y-3y}{6} = -8$
 $\frac{y}{6} = -8$
 $y = -48$

$\frac{18}{AB} = \frac{3x}{x} = 3 \rightarrow y = 48$
 $AB = 6$ $BC = 4\sqrt{14}$

$AC = 18; AE = 6; CE = 8$
 $12^2 - 8^2 = 4^2(9-4) = 4^2 \cdot 5$
 $BE = 4\sqrt{5}$
 $BC = 12^2 + 16 \cdot 5 = 144 + 80 = 224 = 2 \cdot 112 = 4 \cdot 56 = 4 \cdot 7 \cdot 8$