



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [3 балла] Второй член арифметической прогрессии равен $12 - 12x$, четвёртый член равен $(x^2 + 4x)^2$, а восьмой равен $(-6x^2)$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $10x + 5y$ при условии

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 2y| \leq 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$ и $B = m^2n - 2mn^2 - 2mn$ равно $17p^2$, а другое равно $15q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}, \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3y} = 2y^5 - \sqrt[4]{3x+4y^2}. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 7×7 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 6$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 1

$\{a_n\}$ - данная арифм. прогрессия с разностью d . Тогда:

$$\begin{cases} a_1 + d = 12 - 12x \\ a_1 + 3d = (x^2 + 4x)^2 \\ a_1 + 7d = -6x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + d = 12 - 12x \\ 2d = x^2(x+4)^2 + 12x - 12 \\ 6d = -6x^2 + 12x - 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + d = 12 - 12x \\ d = -x^2x - 2 \\ x^2(x+4)^2 + 2x^2 - 4x + 4 + 12x - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0 \\ a_1 + d = 12 - 12x \\ d = -x^2 - 2x - 2 \end{cases}$$

Схема Горнера:

	1	8	18	8	-8
-2	1	6	6	-4	0
-2	1	4	-2	0	

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2(x^2 + 4x - 2) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -2 \pm \sqrt{6} \end{cases}$$

Ответ: $\{-2; -2 + \sqrt{6}; -2 - \sqrt{6}\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

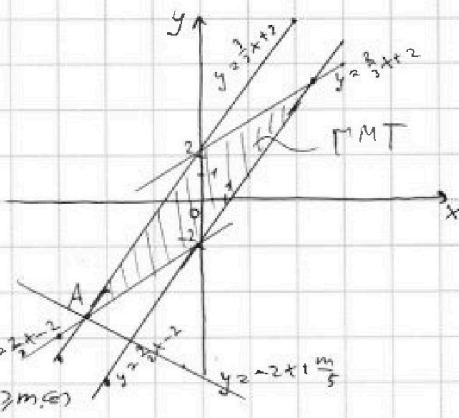
1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~2

$$\begin{cases} |2x-3y| \leq 6 \\ |3x-2y| \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y \leq 6 \\ 2x-3y \geq -6 \\ 3x-2y \leq 4 \\ 3x-2y \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \frac{2}{3}x-2 \\ y \leq \frac{2}{3}x+2 \\ y \geq \frac{3}{2}x-2 \\ y \leq \frac{3}{2}x+2 \end{cases}$$



] m - наименьшее значение $10x+5y$ при данных условиях.
Тогда ГМТ решения данных условий $10x+5y \geq m$.

$\Rightarrow y \geq -2x + \frac{m}{5}$, так как ГМТ, удовл. условиям лежат между прямыми $y = -2x + \frac{m}{5}$, и такая прямая имеет с ГМТ одну общую точку.

Δ (·) A - точку пересечения $y = \frac{3}{2}x+2$ и $y = \frac{3}{2}x-2$

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x+2 \\ y = \frac{3}{2}x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2}x+2 \\ 9x+12 = 4x-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{24}{5} \\ y = -\frac{26}{5} \end{cases} \quad A(-\frac{24}{5}; -\frac{26}{5})$$

Рассматривая прямую $y = -2x + c$, где c - параметр, ставим перед собой задачу, что прямая $y = -2x + \frac{m}{5}$ пройдет тогда и только тогда, когда пройдет через A .

$$\begin{cases} y = -2x + \frac{m}{5} \\ x = -\frac{24}{5} \\ y = -\frac{26}{5} \end{cases} \Rightarrow -\frac{26}{5} = 2 + \frac{m}{5} \Rightarrow m = -74$$

Остаточные значения m имеют неограниченно малые значения единичных.

Ответ: -74.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 3

$$\begin{cases} A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n \\ B = m^2n - 2mn^2 - 2mn \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = (m-2n)^2 + 13(m-2n) \\ B = mn(m-2n-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = (m-2n)(m-2n+13) \\ B = mn(m-2n-2) \end{cases}$$

I. Случай, когда $A = 17p^2$, $B = 15p^2$

$$(m-2n)(m-2n+13) = 17p^2$$

$$\text{при } m-2n = 17p: m-2n+13 = p, \text{ но } m-2n = 17p > p = m-2n+13 > m-2n \text{ (?)}$$

$$\text{при } m-2n \geq p: m-2n+13 = 17p > m-2n+16 = m-2n+16 \text{ (?)}$$

$$\text{при } m-2n = 17: p^2 = m-2n+13 = 17+13=30 - \text{не п.кв.р!}$$

$$\text{при } m-2n+13 \geq 17: m-2n \geq 4$$

$$mn(m-2n-2) = 15p^2 \stackrel{m-2n \geq 4}{\Rightarrow} (n^2+4n)2 \geq 15p^2 \stackrel{n \geq 0}{\Rightarrow} n^2+2n \geq 15 \Rightarrow n \geq 3$$

$$m-2n \geq 4 \Rightarrow m \geq 10$$

найдем (3; 10)

II. Случай, когда $A = 15p^2$, $B = 17p^2$

$$\text{при } m=1: B = n(-2n-1) < 0, \text{ но } 17p^2 > 0 \text{ (?)}$$

$$\text{при } n=1: B = m(m-4) \quad 1) \text{ при } m = 17p > 16$$

$$2) \text{ при } m \geq p: m-4 \geq 17p > p > m \text{ (?)}$$

$$3) \text{ при } m = 17: p^2 = 17-4 = 13 \text{ (?)}$$

$$4) \text{ при } m-4 \geq 17: m \geq 21 \geq p^2 \text{ (?)}$$

$$\text{при } m=21: n=$$

$$m-2n-2 \geq 1:$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

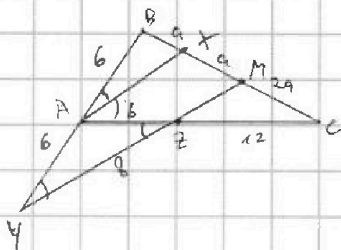
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} AX \parallel YM &\Rightarrow \angle AZY = \angle AX \\ &\Rightarrow \angle ZYA = \angle XAD \\ &\Rightarrow AY = AZ = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AX \parallel YM &\Rightarrow \frac{CM}{AM} = \frac{YC}{AZ} = \frac{12}{6} = 2 \\ &\Rightarrow \frac{CM}{AM} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BM &= M \\ \frac{CM}{AM} &= 2 \Rightarrow BM:XM:MC = 1:1:2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{AB}{AC} &= \frac{BX}{CX} = \frac{1}{3} \Rightarrow AB = 8 \end{aligned}$$

$$\angle MZC = \angle AZZ \quad \text{Треугольники}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☒6
☐7
☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

 ~ 5

$$2x^5 + 4x^2 - 4\sqrt{3}y = 2y^5 - 4\sqrt{3}x + 4y^2 \Leftrightarrow 2x^5 + 4x^2 + 3\sqrt{3}x = 2y^5 + 4y^2 + 3\sqrt{3}y \Leftrightarrow x = y$$

м. и. 90-град. экв.

$f(x) = 2x^5 + 4x^2 + 3\sqrt{3}x$ отрез. 1-го квадранта, x и y неотрицательны (из-за макс.)

условие равносильно следующим ис-кам:

$$\begin{cases} x=y \\ \sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} = 2\sqrt{(x+4)(3-x)} - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 7 - 2\sqrt{(x+4)(3-x)} = 4(x+4)(3-x) - 20\sqrt{(x+4)(3-x)} + 25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 2(x+4)(3-x) - 9\sqrt{(x+4)(3-x)} + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ \sqrt{(x+4)(3-x)} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 9 \cdot 8}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ \sqrt{(x+4)(3-x)} = 6 \\ \sqrt{(x+4)(3-x)} = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x^2 + x - 12 = -36 \\ x^2 + x - 12 = -9 \\ (x+4)(3-x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x^2 + x - 12 = -36 \\ x^2 + x - 12 = -9 \\ x^2 + x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x^2 + x - 12 = -36 \\ x^2 + x - 12 = -9 \\ x^2 + x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x^2 + x - 12 = -36 \\ x^2 + x - 12 = -9 \\ x^2 + x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$-4 < \frac{-1-4}{2} < \frac{-1-\sqrt{13}}{2} < 0 < 3$$

$$-4 < 0 < \frac{-1+\sqrt{13}}{2} < \frac{-1+4}{2} < 3$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \right); \left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \right) \right\}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

В квадрате 7×7 64 узла сетки
(иногда)

Всего случаев перекрытия узлов (см. условие) ^{с учётом} без учёта ориентации C_{64}^2 .

Без учёта ориентации 2 перекрёста симметричны относительно центра перекрытия. Значит, в 2-х случаях (т.е. если такую перекрыть как-либо поворачивать, получится ещё одна симм. перекрытия), а остальных - вчетверо (т.е. при поворачивании можно получить ещё 3 несимм. перекрытия).

В симм. перекрытиях 32 (один узел в нижней половине квадрата, второй - в верхней половине)

$$\frac{C_{64}^2 - 32}{4} + \frac{32}{2} = \frac{64 \cdot 63}{2} - 32 + \frac{32}{2} = 3 \cdot 63 - \frac{32}{2} = 480 + 24 - 8 = 496$$

Ответ: 496

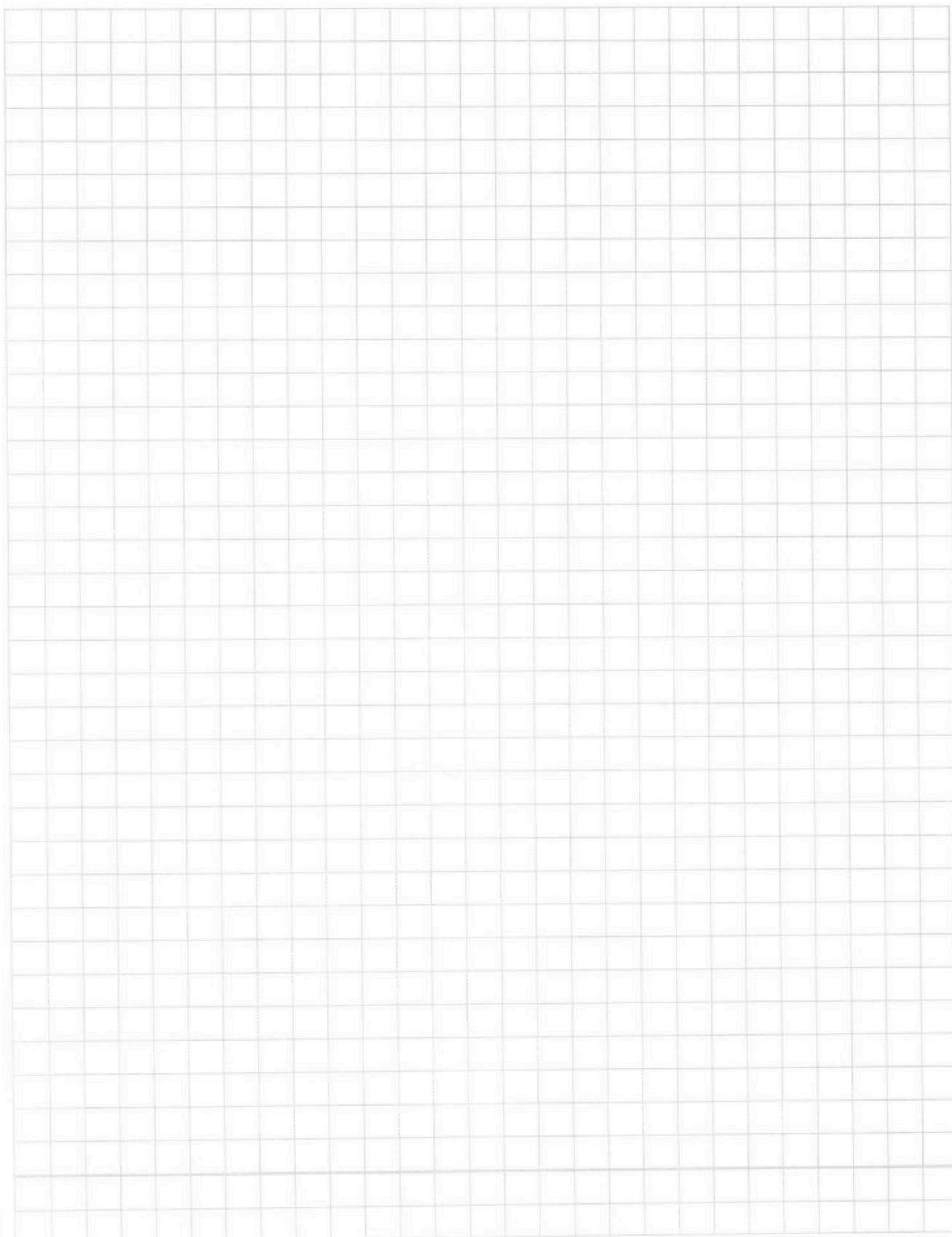


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



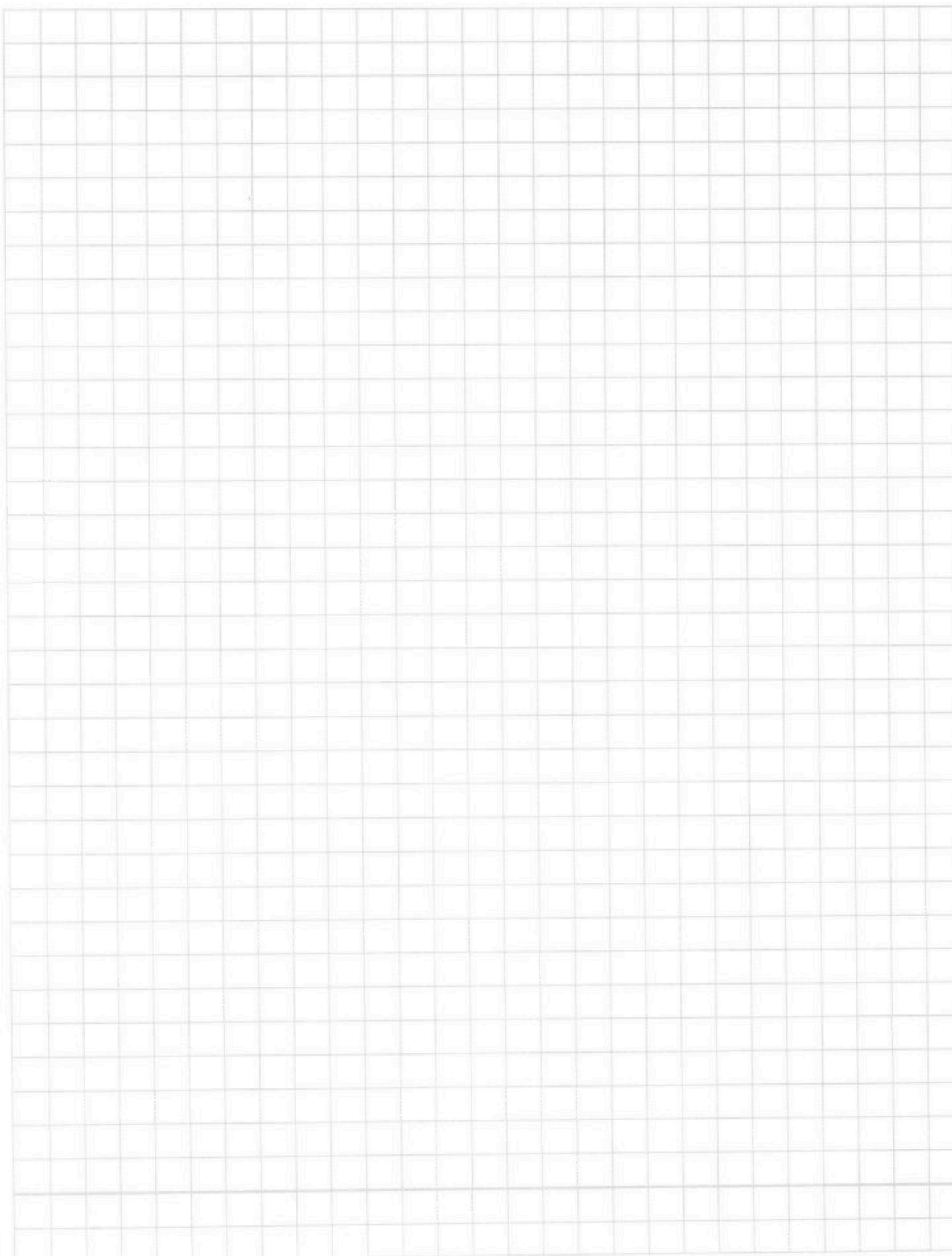


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = (m-2n)^2 + 13(m-2n) = (m-2n)(m-2n+13)$$

$$B = mn(m-2n-2)$$

$$A = 179^2$$
$$x(2413) = 179^2$$

$$4 \cdot 17$$

$$m-2n=4$$

$$B = mn \cdot 7$$

$$mn = 30$$

$$m-2n=4$$

$$m = 2n+4$$

$$2n^2 + 4n - 30 = 0$$

$$n^2 + 2n - 15 = 0$$

$$(n-5)(n+3) = 0$$

$$n = 5$$

$$m = 14$$

$$mn(m-2n-2) = 179^2$$

$$n(1-2)$$

$$m(m-4) = 179^2$$

$$179^2$$

$$179^2$$

$$179^2$$

$$179^2$$

$$mn(m-2n-2)$$

$$99$$

$$179$$

$$179$$

$$179$$

$$179$$

$$179$$

$$179$$

$$179$$

$$179$$

$$179$$

$$179$$

$$179$$

$$179$$

$$179$$

$$179$$

$$179$$

$$179$$

$$179$$

$$179$$

$$179$$

$$179$$

$$179$$

$$179$$

$$179$$

$$179$$

$$179$$

$$179$$

$$179$$

$$179$$

$$179$$

$$179$$

$$179$$

$$179$$

$$179$$

$$179$$

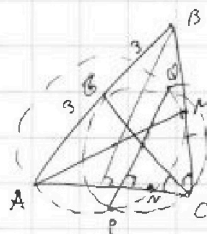
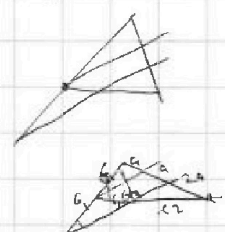
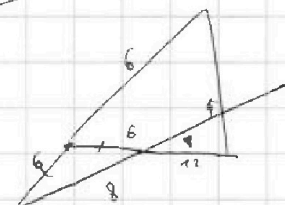
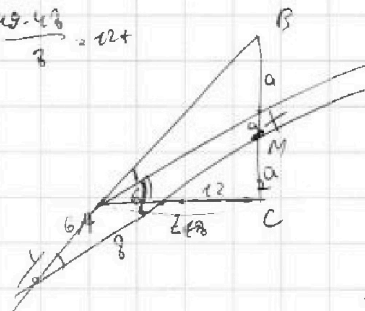
$$179$$

$$179$$

$$179$$

$$179$$

$$\frac{24}{2} + \frac{C_{49}}{4}$$
$$12 + \frac{49 \cdot 48}{8} = 12 +$$



$$\sqrt{x+4} + \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{x+2-x^2}$$

$$2x^5 + 4x^2 + \sqrt{3x} = 2\sqrt{3x^5 + 4x^2 + \sqrt{3x}}$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{x+2-x^2}$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{(x+4)(3-x)}$$

$$7 + 25 - 20\sqrt{3x} = 4ab \Rightarrow 4ab = 32 - 20\sqrt{3x}$$

$$a-b = 2ab+5 \Rightarrow 2ab+5=0$$

$$25 + 4b \cdot 8 = 25 + 32 = 57 = 153$$

$$(2a-1)(b-1) = 0$$

$$(2a+1)(b+\frac{1}{2}) = 0$$

$$\sqrt{9} - \sqrt{6} \pm 2\sqrt{ab} = 5$$

$$7 = 4ab - 20\sqrt{ab} + 25 = 1$$

$$4ab - 20\sqrt{ab} + 25 = 1$$

$$4ab - 20\sqrt{ab} + 25 = 1$$

$$4ab - 20\sqrt{ab} + 25 = 1$$

$$4ab - 20\sqrt{ab} + 25 = 1$$

$$4ab - 20\sqrt{ab} + 25 = 1$$

$$4ab - 20\sqrt{ab} + 25 = 1$$

$$4ab - 20\sqrt{ab} + 25 = 1$$

$$4ab - 20\sqrt{ab} + 25 = 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

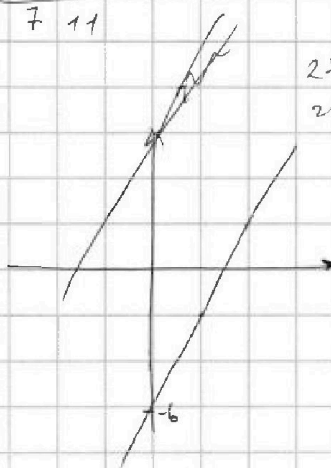
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 12-12x=9 \\ (x^2+4x)^2=a+2d \\ -6x^2=a+6d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12-12x=9 \\ x^4+8x^3+16x^2+12x-12=2d \\ -6x^2=12-12x+6d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=2x+1 \\ d=x-1-x^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^4+8x^3+16x^2+12x-12+2x^2+2-2x \\ x^4+8x^3+18x^2+10x-10=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2(x+4)^2+12x+2x^2+2-2x \\ \Leftrightarrow x^2(x+4)^2+2(x^2-10x+10)=0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 8 & 18 & 10 & -10 \\ -1 & 1 & 7 & 11 & & \end{array}$$



$$2x-3y \leq 6$$

$$y \geq \frac{2x-6}{3}$$

$$3x-2y \leq 4$$

$$y \geq \frac{3x-4}{2}$$

$$\begin{aligned} 12-12x+2d \\ 12-12x+2d \end{aligned}$$

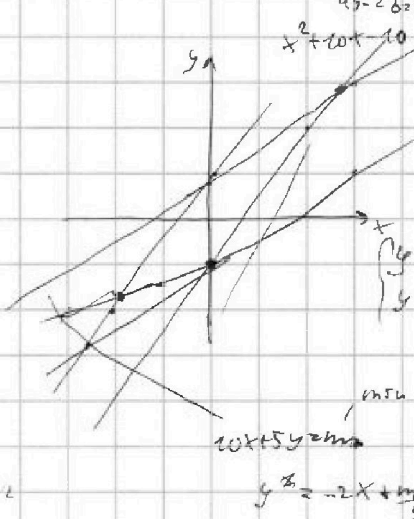
$$\begin{aligned} x^2(x+4)^2 &= a+2d \\ 12-12x+2d \end{aligned}$$

$$x^2(x+4)^2=12-12x+2d-2x^2+4x-4 \Leftrightarrow x^2(x+4)^2+2x^2+8x-8=0$$

$$\Leftrightarrow x^4+8x^3+18x^2+8x-8=0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 8 & 18 & 8 & -8 \\ -1 & 1 & 7 & 11 & & \\ -2 & 1 & 6 & 6 & -4 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & -2 & 0 & \end{array}$$

$$x^2+4x-2=0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+8}}{2}$$



$$\begin{aligned} y &= \frac{2}{3}x-2 \\ y &= \frac{3}{2}x+2 \\ 9x-12 &= 4x+12 \\ 5x &= 24 \\ x &= \frac{24}{5} \\ y &= \frac{3}{2} \cdot \frac{24}{5} + 2 \\ y &= \frac{36}{5} + 2 \\ y &= \frac{46}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 48+26 &= 74 \\ \left(\frac{24}{5}, \frac{46}{5} \right) \end{aligned}$$