



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен $6x + 18$, седьмой член равен $(x^2 - 4x)^2$, а одиннадцатый равен $(-3x^2)$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $14x + 7y$ при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$ и $B = m^2n - mn^2 + 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $3q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 12$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x} + y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 9×9 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 26$, $AN = 20$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 1.

$$a + K \cdot 4 = 6x + 18$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5a + 20K = 30x + 18 \cdot 5 \\ 2a + 20K = -6x^2 \end{cases}$$

$$a + K \cdot 6 = x^2 \cdot (x-4)^2$$

$$\begin{cases} 5a + 20K = 30x + 18 \cdot 5 \\ 2a + 20K = -6x^2 \end{cases}$$

$$a + K \cdot 10 = -3x^2$$

$$3a = 30x + 18 \cdot 5 + 6x^2$$

$$a = 10x + 30 + 2x^2$$

$$2K = \frac{1}{4}(6x + 18 - 10x - 30 - 2x^2)$$

$$2K = -2x - 6 - x^2$$

$$10x + 30 + 2x^2 + (-3x^2 - 18 - 6x) = x^2 \cdot (x-4)^2$$

$$-x^2 + 12 + 4x = x^2 \cdot (x-4)^2$$

$$-(x-2)^2 + 16 = x^2 \cdot (x-4)^2 = (x^2 - 4x)^2$$

$$-(x-2)^2 + 16 = 9$$

$$(x^2 - 4x)^2 = 9$$

$$(x-2)^2 = 7$$

$$x-2 = \pm\sqrt{7}$$

$$\begin{cases} x = 2 + \sqrt{7} \\ x = 2 - \sqrt{7} \end{cases}$$

$$x^2 - 4x = 3$$

$$x = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$x^2 - 4x = -3$$

$$x = 2 \pm 1$$

$$\text{не подходит, если } (x-2)^2 + 16 \neq 9$$

если нарисовать
график, видно,
что пересечение
будет между
 $x=4$ и $x=5$
(этого нет)

предположим

$$-(x-2)^2 + 16 = 9$$

какой подходит?

$2 + \sqrt{7}$ подходит, если $6x + 18 > 0$

$2 - \sqrt{7}$ не подходит

$$x^2(6x-4)^2 > 0$$

$$\rightarrow x < 0$$

если $6x + 18 > 0$, т.к. $2 + \sqrt{7} + 18 > 0$, т.к. $30 - 6\sqrt{7} > 0$, т.к. $5 > \sqrt{7}$

ответ: $x = 2 + \sqrt{7}$ или $x = 2 - \sqrt{7}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

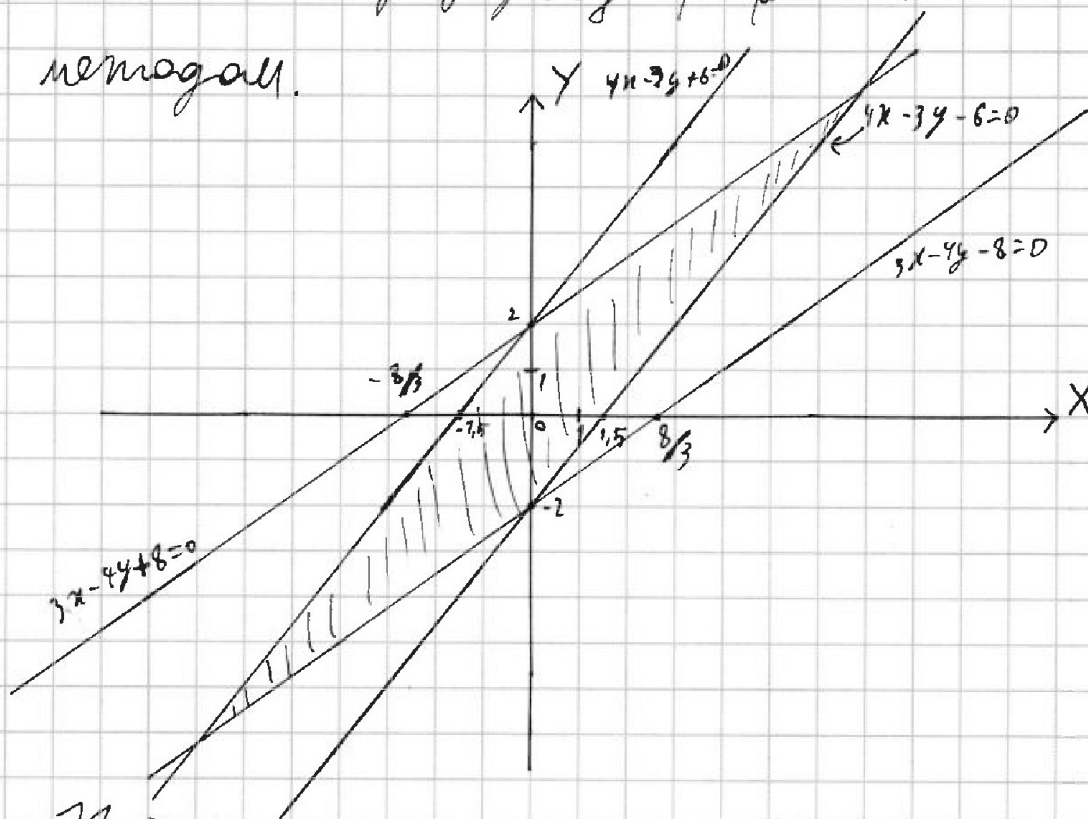
СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2.

Решим эту задачу графическим методом.



Найдём на координатной плоскости место, где выполняются

$$\begin{cases} 4x - 3y \leq 6 \\ 4x - 3y \geq -6 \\ 3x - 4y \leq 8 \\ 3x - 4y \geq -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 4y| \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 3y \leq 6 \\ 4x - 3y \geq -6 \end{cases} \quad \text{между прямыми } 4x - 3y + 6 = 0 \text{ и } 4x - 3y - 6 = 0$$

$$\begin{cases} 3x - 4y \leq 8 \\ 3x - 4y \geq -8 \end{cases} \quad \text{между прямыми } 3x - 4y - 8 = 0 \text{ и } 3x - 4y + 8 = 0$$

Надо найти $\min(x \cdot (2x + y))$ в заштрихованной области



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2. (теорема)

Очевидно, что min будет в точке пересечения $\begin{cases} 4x - 3y + 6 = 0 \\ 3x - 4y - 8 = 0 \end{cases}$, ведь на границах

замкнутой области. Находя точку, у которой x и y возрастают и y возрастает и x

$$\begin{aligned} \begin{cases} 4x - 3y + 6 = 0 \\ 3x - 4y - 8 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 12x - 9y + 18 = 0 \\ 12x - 16y - 32 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 18 + 32(16 - 9) = 0 \\ 7y = -18 - 32 = -50 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} 16x - 12y + 24 = 0 \\ 9x - 12y - 24 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16x - 9x + 48 = 0 \\ 7x + 48 = 0 \\ 7x = -48 \end{cases} \end{aligned}$$

$$14x + 7y = 2 \cdot (-50) + (-48) = -148$$

Ответ: -148



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a + k \cdot 4 = 6x + 18$$

$$a + k - 6 = (x^2 - 4x)^2$$

$$a + k - 10 = -3x^2$$

$$-6x = 6x + 18 + 3x^2$$

$$-2x = 2x + 6 + x^2$$

$$5a + k \cdot 20 = 30x + 18 \cdot 5$$

$$2a + k \cdot 20 = -6x^2$$

$$3a = 30x + 18 \cdot 5 - 6x^2$$

$$a = 10x + 30 - 2x^2$$

$$4x - 3y \leq 6$$

$$4x - 3y \geq -6$$

$$3x - 4y \leq 8$$

$$3x - 4y \geq 8$$

$$\frac{8}{3} =$$

$$6x + 18 - x^4 - 16x^2 + 8x^3 =$$

$$= x^4 + 16x^2 - 8x^3 + 3x^2$$

$$x^4 - 16x^3 + 35x^2 - 6x + 18 \geq 0$$

$$16 - 128 + 140 - 12 + 18 = 2$$

$$x^4 + 16x^2 - 8x^3 = x^2 \cdot (x - 4)^2$$

$$= 10x + 30 - 2x^2$$

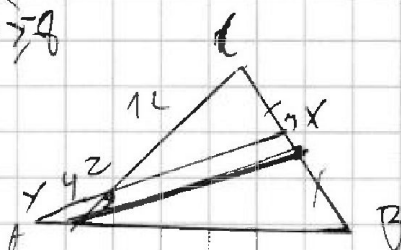
$$+ 9x + 18 + 3x^2$$

$$x^4 - 8x^3 + 16x^2 = x^2 + 19x + 48$$

$$x^4 - 8x^3 + 15x^2 - 19x - 48 = 0$$

$$1 + 8 + 15 + 19 - 48 = 9 + 15 - 28 = 2$$

$$16 - 64 + 60 - 38 - 48 =$$



$$84 \cdot 6 \cdot 100$$

$$100 \cdot 99 / 4$$

$$99$$

$$\frac{100 \cdot 99}{2} - 50$$

$$4$$

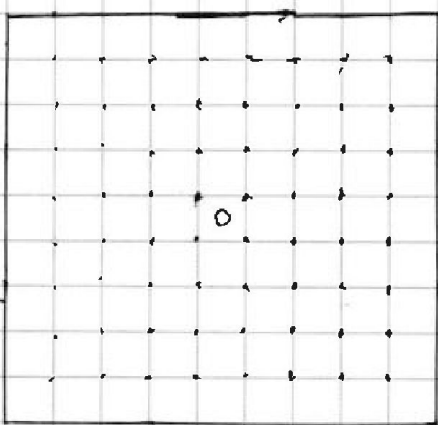
$$50 \cdot 99 - 50 =$$

$$50 \cdot 98$$

$$\frac{50 \cdot 98}{4}$$

$$25 \cdot 49$$

$$\begin{array}{r} x^2 5 \\ 50 \overline{) 1250} \\ \underline{100} \\ 250 \\ \underline{250} \\ 0 \end{array}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3.

$$A = m^2 - 2mh + h^2 + 9m - 9h$$

$$A = (m-h)^2 + 9(m-h) = (m-h+9)(m-h)$$

$$B = m^2h - mn^2 + 3mh = mh(m-h+3)$$

заменим, что если $m-h$ - НОД, то $m-h+9$ - чётно,
и наоборот

$$\text{тогда } q = 13 \text{ или } 3$$

$$A = 2^2 \cdot q$$

тогда m и h обязательно будут чётными,

иначе B - чётное $\Rightarrow$ при $q=2$

Также можно заметить, что A должно представлять в виде $13p^2$, пусть нет,

тогда $A = 3q^2 \Rightarrow$ т.к. у $m-h+9$ и $m-h$ стоит

по модулю 3 одинаков, то I) оба не делятся $\Rightarrow$ не $3q^2$

II) оба делятся $\Rightarrow 3q^2 : 9 \Rightarrow q^2 : 3 \Rightarrow q=3$, тогда

$A = 27$ - нечётное $\Rightarrow$ не $3q^2 \Rightarrow$ докажем, что

$$A = 13p^2 \Rightarrow B = 3q^2$$

$$A = 13 \cdot 4 = 52 \Rightarrow (m-h+9)(m-h) = 52 \Rightarrow x^2 + 9x - 52$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 208}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-9 + 17}{2} \\ x = \frac{-9 - 17}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-h = 4 \\ m-h = 13 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 3. (по 3 балла)

$$A = 52 = 13 \cdot 2^2; \quad B = 39^2 = m \cdot n \cdot (m+n+3)$$

$$\begin{cases} m-n=4 \\ m-n=-13 \end{cases}$$

$$m-n=-13 \Rightarrow m \cdot n \cdot (m-n+3) < 0, \text{ так как } m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow -13+3=-10 < 0$$

$$\Rightarrow m-n=4$$

$$B = m \cdot n \cdot (4+3) = 7mn$$

$$B = m \cdot n \cdot 7 = 3 \cdot 7 \cdot 7$$

$$\Rightarrow \text{т.к. } 39^2 = 7, \text{ то } 39 = 7$$

$$\Rightarrow \text{т.к. } B = 3 \cdot 7 \cdot 7, \text{ то } m=7, n=3$$

$$n \cdot (n+3) = 27 \Rightarrow n=3 \Rightarrow m=7$$

~~Ответ: $(m; n) = (7; 3)$~~
~~Ответ: $(m; n) = (3; 7)$~~

Ответ: есть одна пара $(n=3; m=7)$

$$(n; m) = (3; 7)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 из 2

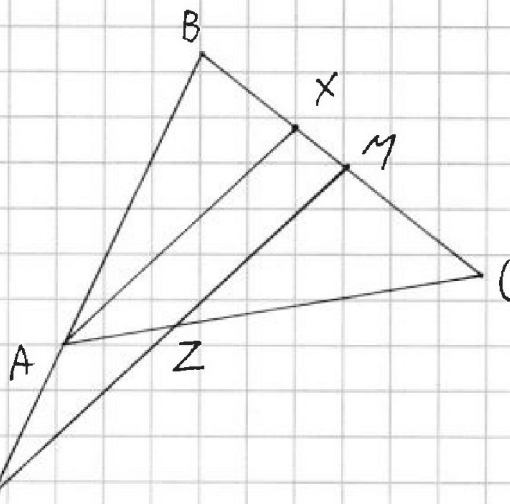
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 4.

$$AC=12 \quad AZ=3 \quad YZ=4$$

AX - бис.са

MB=MC



$$\frac{AB}{AC} = \frac{BX}{XC}$$

$$AX \parallel YM$$

$$\angle BAX = \angle BYM \Rightarrow \triangle ABX \sim \triangle YBM$$

$$\frac{BA}{BY} = \frac{BX}{BM} = \frac{AX}{YM}$$

$$\text{Т.М.М.} \quad \frac{BA}{AY} \cdot \frac{YZ}{ZM} \cdot \frac{MC}{CB} = 1 \quad \left| \quad \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CZ}{ZA} \cdot \frac{AY}{YB} = 1 \right.$$

$$\frac{BA}{AY} \cdot \frac{4}{ZM} \cdot \frac{1}{2} = 1 \quad \left| \quad \frac{1}{1} \cdot \frac{CZ}{3} \cdot \frac{AY}{YB} = 1 \right.$$

$$\frac{BA}{AY} = \frac{ZM}{2} \quad \left| \quad \frac{3}{CZ} = \frac{AY}{YB} \right.$$

$$ZC=9, \text{ тогда } ZC=AC-AZ$$

$$\frac{AY}{YB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{BY}{AB} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{XM}{MB} = \frac{B(-AB+AB+AC)}{(AB+AC) \cdot MB} = \frac{B \cdot (AC-AB)}{2(AB+AC) \cdot MB} = \frac{2}{2} \cdot \frac{AC-AB}{AC+AB}$$

$$\frac{AB}{AY} = \frac{2}{1}$$

$$\frac{AC-AB}{AC+AB} = \frac{XM}{MB} = \frac{1}{2} \quad \left(\Rightarrow \frac{BX}{XM} = \frac{2}{1} \right)$$

$$2AC - 2AB = AC + AB$$

$$4AC - 4AB = AC + AB$$

$$3 \cdot AB = AC$$

$$\frac{AC}{AB} = 3 \Rightarrow AY = 2$$

$$3AC = 5AB \Rightarrow AB = \frac{36}{5}$$

$$AX = \sqrt{48 - BX \cdot XC} = \frac{ZM \cdot 2}{0,5 \cdot 3} = 21 \cdot \frac{4}{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N⁴

$$2M \cdot \frac{4}{3} = AX$$

$$\frac{AX \cdot 3}{2} = 2M + 4$$

$$AX \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4} AX + 4$$

$$\frac{3}{4} AX = 4 \Rightarrow AX = \frac{16}{3} = \sqrt{48 - BC \cdot BC}$$

$$\frac{256}{9} = 48 - BC \cdot \frac{4}{3} \cdot BC \cdot \frac{2}{3}$$

$$BC^2 \cdot \frac{2}{9} = \frac{128}{9}$$

$$BC^2 = 88$$

$$BC = \sqrt{88} = 2\sqrt{22}$$

Ответ: $BC = 2\sqrt{22}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6.

В данном квадрате помечены ровно 100 закрашенных узлов.

Уг поворота квадрата было бы $\frac{100 \cdot 99}{2}$

возможных раскладок.

Повороты квадрата:

Уг: если повернуть квадрат на 90° по часовой стрелке, то получится другая раскладка (если сравнивать (теперь) до поворота)

Д-во: неподвижных узлов сетки не будет (ведь в сторону $\odot$ движется будет 10 узлов)

$\Rightarrow$ если получили такую раскладку, то

закрашенные белыми узлы переместились др. 89.

Это невозможно при повороте на 90° , ведь можно рассмотреть начальные ^{узел} белых узлов относительно центра квадрата.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N6. (теория)

Если поворачивать угол из положения в одну и ту же сторону на 90° (или первый вправо во второй и наоборот, то повернув в эту же сторону ещё на 90° мы получим: первый $\rightarrow$ второй $\rightarrow$ первый, изменили угол на $90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, Но полный круг (360°) $\Rightarrow$ переход в ту же позицию мы можем быть только после поворота на 180° (в другую сторону), таких поворотов 50 (выберем в верхней половине точку и поворачиваем её).

$$\frac{99 \cdot 100}{2} - 50$$

4 т.к у нас будет по 4 поворота (по 90°) (или при повороте поворачивается дважды)

и ещё 50

т.к у нас будет 2 поворота (по 90°)

$$\text{Углы} \quad \frac{99 \cdot 50 - 50}{4} + \frac{50}{2} = 49 \cdot 25 + 25 = 50 \cdot 25 = 1250$$

Ответ: 1250



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

-2

$$x^2 - 4x = 3$$

-1 -3

~~(x-1)(x-3)~~

$$2 \pm \sqrt{2^2 + 3}$$

$$2 \pm 2^2$$

$$x^2 + 2x + 6 = 0$$

$$12 - 5\sqrt{3} + 19$$

$$30 - 6\sqrt{3}$$

$$5 - \sqrt{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

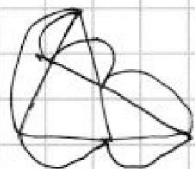
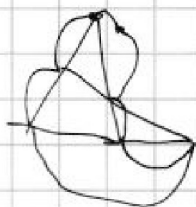
6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{10}{9} + \frac{28}{32} = \frac{50}{50}$$



$$x^2 + 9x - 52 = 0$$
$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 208}}{2}$$

$$\frac{-9 \pm \sqrt{289}}{2}$$

$$m = h + 4$$
$$(h+4)h = 27$$

$$(m+h)(m-h)^2 + 9(m-h) = (m-h)(m-h+9)$$

$$\frac{13}{52}$$

$$m \cdot h \cdot (m-h+3)$$

$$(m-h)(m-h+9)$$

$$\sqrt{13 \cdot 4} = \sqrt{52}$$

$$13p^2 \quad 39^2$$

$$B \cdot A$$

$$B \cdot X$$

$$\frac{B \cdot I}{A \cdot B \cdot M}$$

$$\frac{9 \cdot 9}{153}$$

$$a = 6x + 28$$
$$a + 2x = x^2 \cdot (x-4)^2$$
$$a + 6x = -3x^2$$

$$3(x^2 \cdot (x-4)^2 - 6x + 28) =$$

$$-9x^2 - 6x - 78$$

$$-x^2 - 2x - 6 =$$

$$= x^2 \cdot (x-4)^2 - 6x + 28$$

$$(x^2 + 16 - 8x) \cdot x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$a + 5x = 6x + 28$$

$$a + 7x =$$

$$a + 11x =$$

$$a = 6x + 28$$

$$a + 2x = x^2 \cdot (x-4)^2$$

$$a + 6x = -3x^2$$

$$A \cdot A$$

$$3a + 6x$$

$$-6x + 18x^2 \cdot (x-4)^2 =$$

$$x^2(x-4)^2 - 28x - 18 = -3x^2 - 6x - 18$$

$$x^2 \cdot (x^2 + 16 - 8x + 3) - 22x - 36 = 0$$

$$1 + 7(1 + 3 + 12) - 36$$

$$70$$

$$x^2 - 4x +$$
$$-(x-2)^2 + 16$$

$$\frac{47}{-56} = \frac{1}{79}$$

$$12 \cdot 4 + 14 \cdot 18 - 18 \cdot 12$$

$$\frac{1}{11} + \frac{1}{11} = \frac{2}{11}$$

$$\frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{7}{16}$$

$$12 \cdot 12$$

$$m \sim$$