



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен $6x + 18$, седьмой член равен $(x^2 - 4x)^2$, а одиннадцатый равен $(-3x^2)$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $14x + 7y$ при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$ и $B = m^2n - mn^2 + 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $3q^2$, где p и q - простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 12$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x} + y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 9×9 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 26$, $AN = 20$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

пусть y - разность прогрессии

5-ой член равен $6x+18$

7-ой равен $(6x+18) + 2y = (x^2-4x)^2$

11-ой равен $(3x^2) = (x^2-4x)^2 + 4y$

$$\begin{cases} 12x+36+4y=2(x^2-4x)^2 \\ -3x^2=(x^2-4x)^2+4y \end{cases}$$

$$-3x^2=(x^2-4x)^2+4y$$

из 1-ого уравнения вытем второе

$$12x+36+4y-4y-(x^2-4x)^2=2(x^2-4x)^2+3x^2$$

$$3(x^2-4x)^2+3x^2-12x-36=0$$

$$(x^2-4x)^2+x^2-4x-\frac{12}{3}=0$$

пусть $(x^2-4x)=t$

$$\text{тогда } t^2+t-12=0$$

$$D=1+48=49$$

$$t=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{2}=\begin{cases} -4 \\ 3 \end{cases}$$

$$x^2-4x+4=0$$

$$x^2-4x-3=0$$

$$(x-2)^2=0$$

$$D=16+12=28$$

$$x=2$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{28}}{2}=2\pm\sqrt{7}$$

Ответ: $x=\{2-\sqrt{7}; 2; 2+\sqrt{7}\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

пусть $4x - 3y = a, 3x - 4y = b$

замечим, что $14x + 7y = 11a - 10b = 44x - 33y - 30x + 40y = 14x + 7y$
по св-ву модулей

$$\begin{cases} |a| \leq 6 \\ |b| \leq 8 \end{cases} \text{ равносильно } \begin{cases} 11|a| \leq 66 \\ 10|b| \leq 80 \end{cases}$$

$$10|b| \leq 80 \Rightarrow -10|b| \geq -80$$

$11|a| \geq 0$ по определению

$$\begin{cases} 11|a| \geq 0 \\ -10|b| \geq -80 \end{cases} \quad 11|a| - 10|b| \geq -80$$

по св-ву модулей $|m| - |n| \leq |m - n|$

$$11|a| - 10|b| \leq |11a - 10b|$$

$$|11a - 10b| \geq -80 \Rightarrow |14x + 7y| \geq -80$$

$$11|a| \leq 66 \Rightarrow -11|a| \geq -66$$

$$10|b| - 11|a| \geq -66$$

$$|10b - 11a| \geq -66$$

$$|11a - 10b| \leq 66 \Rightarrow |14x + 7y| \leq 66 \Rightarrow 14x + 7y \in [-66, 66]$$

Ответ: $\boxed{-66}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

пусть $4x - 3y = a$, $3x - 4y = b$
замечим, что $14x = 4a - 6b = 32x - 24y - 18x + 24y$
также замечим, что $7y = 3a - 4b = 12x - 9y - 12x + 16y$
из условия $\begin{cases} |a| \leq 6 \\ |b| \leq 8 \end{cases}$
по св-ву модулей имеем право сказать:
 $|a| \leq 6$ ~~$|3a| \leq 18$~~
равносильно
аналогично $|6b| \leq 48$, $|8a| \leq 48$, $|4b| \leq 32$
имеем $\begin{cases} |8a| \leq 48 \\ |6b| \leq 48 \end{cases}$ и $\begin{cases} |3a| \leq 18 \\ |4b| \leq 32 \end{cases}$
согласно св-ву модулей $|m| - |n| \leq |m - n|$
получим ~~$|2a| - |6b| \leq 0$ и $|4a - 6b| \leq 0$~~



1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$B = mn(m-n+3) = \begin{bmatrix} 3q^2 \\ 13p^2 \end{bmatrix} \quad A = (m-n)(m-n+9) = \begin{bmatrix} 3q^2 \\ 13p^2 \end{bmatrix}$$

так как $m, n \in \mathbb{N}$, то $(m-n) \in \mathbb{N}$ и $(m-n+9) \in \mathbb{N}$

разобьем $3q^2$ и $13p^2$ на 2 кат. множителя

$$\cancel{3q^2} \cdot \cancel{13p^2} \quad 3q^2 = 3 \cdot q^2 = 3q^2 \cdot 1 = 3q \cdot q = (-3) \cdot (-q^2) = (-1) \cdot (-3q^2) = (-3q) \cdot (-q)$$

перепишем эти варианты для числа A

- 1) $m-n=3$ $m-n+9=12=q^2$ $\emptyset$
- 2) $m-n=q^2$ $m-n+9=q^2+9=3$ $q^2=-6$ $\emptyset$
- 3) $m-n=3q^2$ $m-n+9=3q^2+9=1$ $3q^2=-8$ $\emptyset$
- 4) $m-n=1$ $m-n+9=10=3q^2$ $\emptyset$
- 5) $m-n=3q$ $m-n+9=3q+9=q$ $2q=-4,5$ $\emptyset$
- 6) $m-n=q$ $m-n+9=q+9=3q$ $\emptyset$
- 7) $m-n=-3$ $m-n+9=-6=-q^2$ $\emptyset$
- 8) $m-n=-q^2$ $m-n+9=9-q^2=-3$ $\emptyset$
- 9) $m-n=-1$ $m-n+9=8=-3q^2$ $\emptyset$
- 10) $m-n=-3q^2$ $m-n+9=9-3q^2=-1$ $\emptyset$
- 11) $m-n=-3q$ $m-n+9=9-3q=-q$ $\emptyset$
- 12) $m-n=-q$ $m-n+9=9-q=3q$ $\emptyset$

Итак, число $A \neq 3q^2$

Проверим его для $13p^2$

$$13p^2 = 13 \cdot p^2 = 13p \cdot p = 13p^2 \cdot 1 = (-13) \cdot (-p^2) = (-13p) \cdot (-p) = (-13p^2) \cdot (-1)$$

если m и n поменять местами для 1 пары, то ничего не изменится

- 1) $m-n=13$ $m-n+9=22=p^2$ $\emptyset$
- 2) $m-n=13p$ $m-n+9=13p+9=p$ $\emptyset$
- 3) $m-n=13p^2$ $m-n+9=13p^2+9=1$ $\emptyset$
- 4) $m-n=-13p^2$ $m-n+9=-13p^2+9=-1$ $\emptyset$
- 5) $m-n=-13p$ $m-n+9=-13p+9=-p$ $\emptyset$

$$6) m-n=-13 \quad m-n+9=-4=-p^2 \quad p^2=2 - \text{простое число}$$

Итак, известно, что $m=n-13$; $A=13p^2$; $B=3q^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3q^2 = B = mn(m-n+3), m = n-13$$

$$3q^2 = n(n-13) \cdot 16$$

~~является, это либо $n=3$, либо $n-13=3$~~

$$\text{или } n=3: 3q^2 = 3 \cdot (-10) \cdot 16 \quad \emptyset$$

$$n-13=3 \Rightarrow n=16: 3q^2 = 16 \cdot 3 \cdot 16$$

$$\text{или } 16: 3q^2 = 3 \cdot q \cdot q = 3q \cdot q = 3q^2 \cdot 1 \cdot 1 = (-3) \cdot (-q) \cdot q = 3 \cdot (-q) \cdot (-q) = (-3q) \cdot (-q) \cdot 1 = (-3q) \cdot q \cdot (-1) = 3q \cdot (-q) \cdot (-1) = (-3q^2) \cdot (-1) \cdot 1 = 3q^2 \cdot (-1) \cdot (-1)$$

Значит, что $n, m \in \mathbb{N}$: ~~$n \in (0, 13)$~~ $n > 13$

$$3 \cdot q \cdot q \begin{cases} 1) n=3 & 3 \cdot (-10) \cdot 16 \quad \emptyset \\ 2) n=q & q-13=3 \quad q=16 \quad \emptyset \end{cases}$$

$$3q \cdot q \cdot 1 \begin{cases} 3) n=3q & 3q-13=q \quad \emptyset & 3q-13=1 \quad \emptyset \\ 4) n=q & q-13=3q \quad \emptyset & q-13=1 \quad q=14 \quad \emptyset \\ 5) n=1 & -12=q \quad \emptyset & -12=3q \quad \emptyset \end{cases}$$

$$3q^2 \cdot 1 \cdot 1 \begin{cases} 6) n=3q^2 & 3q^2-13=1 \quad \emptyset \\ 7) n=1 & 1-13=1 \quad \emptyset & 1-13=3q^2 \quad \emptyset \end{cases}$$

$$(3) \cdot (-q) \cdot q \begin{cases} 8) n=-3 & -3-13=q \quad \emptyset & -3-13=-q \quad \emptyset \\ 9) n=-q & -q-13=-3 \quad \emptyset & -q-13=q \quad \emptyset \\ 10) n=q & q-13=-q \quad \emptyset & q-13=-3 \quad \emptyset \end{cases}$$

$$(-3q) \cdot (-q) \cdot 1 \begin{cases} 11) n=-3q & -3q-13=-q \quad \emptyset & -3q-13=1 \quad \emptyset \\ 12) n=-q & -q-13=-3q \quad \emptyset & -q-13=1 \quad \emptyset \\ 13) n=1 & 1-13=-q \quad \emptyset & 1-13=3q \quad \emptyset \end{cases}$$

$$3 \cdot (-q) \cdot (-q) \begin{cases} 14) n=3 & 3-13=-q \quad \emptyset \\ 15) n=-q & -q-13=-q \quad \emptyset & -q-13=3 \quad \emptyset \end{cases}$$

$$(-3q) \cdot q \cdot 1 \begin{cases} 16) n=-3q & -3q-13=q \quad \emptyset & -3q-13=-1 \quad \emptyset \\ 17) n=q & q-13=-3q \quad \emptyset & q-13=-1 \quad \emptyset \\ 18) n=-1 & -1-13=-3q \quad \emptyset & -1-13=q \quad \emptyset \end{cases}$$

$$3q \cdot (-q) \cdot (-1) \begin{cases} 19) n=3q & 3q-13=-q \quad \emptyset & 3q-13=-1 \quad \emptyset \\ 20) n=-q & -q-13=3q \quad \emptyset & -q-13=-1 \quad \emptyset \\ 21) n=-1 & -1-13=-q \quad \emptyset & -1-13=3q \quad \emptyset \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} & -3q^2 - 1 \mid \left\{ \begin{array}{l} 22) n = -3q^2 \\ 23) n = -1 \\ 24) n = 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} -3q^2 - 13 = 1 \quad \emptyset \\ n \notin \mathbb{N} \\ 1 - 13 = -12 \quad \emptyset \end{array} \quad \begin{array}{l} -3q^2 - 13 = 1 \quad \emptyset \\ 1 - 13 = -12 = -3q^2 \\ -12 = -3q^2 \\ q^2 = 4 \quad \text{уг} \end{array} \\ & \quad \quad \quad n = 1 \quad (13; 1) \\ & 25) n = 3q^2 \quad \begin{array}{l} 3q^2 - 13 = -1 \quad \emptyset \\ \text{тогда } m = -1 \Rightarrow \emptyset \end{array} \quad \begin{array}{l} 3q^2 - 13 = 1 \quad \emptyset \end{array} \\ & 26) n = -1 \quad \text{не уг } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Ответ: таких пар нет



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

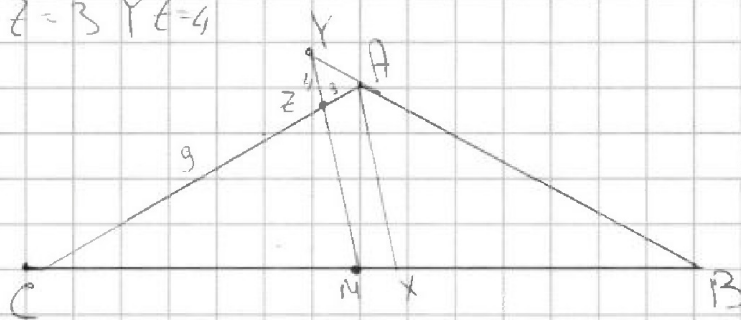
6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано: AX — бис-са, $AX \parallel MZ$, M — середина BC
 $AC = 12$ $AZ = 3$ $YZ = 4$
 $BC = ?$



$$CZ = AC - AZ = 9$$

$MZ \parallel AX \Rightarrow \angle CAH = \angle CZM$ как соответственные

при секущей AC

$\angle CAH = \angle BAH$ т.к. AX — бис-са

$\angle YAZ = \angle CZM$ как вертикальные

$\angle BAC$ — внешний для $\triangle AYZ$ при угле YAZ , значит

$$\angle BAC = \angle Y + \angle YZA$$

$$\text{пусть } \angle CAH = \angle BAH = \angle CZM = \angle YZA = \alpha$$

$$\text{тогда } \angle BAC = 2\alpha = \angle Y + \angle YZA = \angle Y + \alpha$$

$$\angle Y = \alpha = \angle YZA \Rightarrow \triangle YZA \text{ р/б} \Rightarrow YA = AZ = 3$$

по теореме косинусов в $\triangle YAZ$:

$$AY^2 + AZ^2 - 2 \cdot AY \cdot AZ \cdot \cos(180^\circ - 2\alpha) = YZ^2$$

$$9 + 9 - 18 \cos(180^\circ - 2\alpha) = 16$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos(180^\circ - 2\alpha) = -\frac{1}{3} \Rightarrow \cos 2\alpha = -\frac{1}{3}$$

$\triangle CEM \sim \triangle CAH$ т.к. $\angle C$ общий, $\angle CEM = \angle CAH$

$$k = \frac{CE}{AC} = \frac{3}{12} = \frac{3}{4} = \frac{CM}{CH}$$

по условию M - середина BC

пусть $BC = 2a$, тогда $CM = BM = a$

$$CH = \frac{4}{3}CM = \frac{4}{3}a \Rightarrow BH = BC - CH = 2a - \frac{4}{3}a = \frac{2}{3}a$$

$$\text{итак, } \frac{BH}{CH} = \frac{\frac{2}{3}a}{\frac{4}{3}a} = \frac{1}{2}$$

по св-ву биссектрисы: $\frac{AC}{AB} = \frac{CH}{BH} = 2$

$$AB = \frac{AC}{2} = 6$$

по т. косинусов в $\triangle ABC$:

$$BC = \sqrt{144 + 36 - 2 \cdot 12 \cdot 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)} = \sqrt{180 + 16} = 14$$

Ответ: 14



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \leq -2$$

$$3\sqrt{x+6} = -2-x$$

$$9x+54 = x^2+4x+4$$

$$x^2-5x-50=0$$

$$D = 25 + 200 = 225$$

$$x = \frac{5 \pm 15}{2} \in \begin{cases} 10 \\ -5 \end{cases}$$

$$10 \text{ не угод. } x \leq -2$$

$$-5 \text{ не угод. } x \geq 0$$

$$x \geq 1,5$$

$$4x^2+9-12x = 80-16x$$

$$4x^2+4x-71=0$$

$$D = 16 + 16 \cdot 71 = 16 \cdot 72$$
$$x = \frac{-4 \pm 4 \cdot 6 \cdot \sqrt{2}}{8} =$$

$$x = \begin{cases} \frac{-1+6\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-1-6\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\frac{-1-6\sqrt{2}}{2} < 1,5 \Rightarrow \text{не угод.}$$

$$5 > \frac{-1+6\sqrt{2}}{2} > 1,5$$

$$x = \frac{-1+6\sqrt{2}}{2} \text{ угодн.}$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{-1+6\sqrt{2}}{2}, \frac{-1+6\sqrt{2}}{2} \right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☒6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2} \\ 4x^4 + x - 5^4 y = 4y^4 - 5^4 x + y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 5 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$4(x^4 - y^4) + (x - y) + 5(4x^4 - 4y^4) = 0$$

$$(x-y) \left(4(x+y)(x^2+y^2) + 1 + \frac{5}{(\sqrt{x+6} + \sqrt{5-y})(\sqrt{x+6} + \sqrt{5-y})} \right) = 0$$

равенство выполняется только при $x=y$, ведь:

$$1 > 0$$

$$\begin{cases} 4(x+y)(x^2+y^2) \geq 0 \\ (\text{т.к. } x^2 \geq 0, y^2 \geq 0, \\ x+y \geq 0, y \neq 0) \end{cases}$$

$$\frac{5}{(\sqrt{x+6} + \sqrt{5-y})(\sqrt{x+6} + \sqrt{5-y})} > 0$$

правая скобка не обращается в ноль

! чтобы $\sqrt{x+6} - \sqrt{5-y}$ представить как $\frac{5}{(\sqrt{x+6} + \sqrt{5-y})(\sqrt{x+6} + \sqrt{5-y})}$ нужно быть уверенным, что $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$

$\sqrt{6} - \sqrt{5} + 5 \neq 2\sqrt{30} \Rightarrow$ выражение представимо

$x=y$ (из 2-ого ур-ния)

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2}$$

~~$$a = \sqrt{x+6}, b = \sqrt{5-x}$$~~

~~$$a - b + 5 = 2\sqrt{a^2 - b^2}$$~~

~~$$a(1 - \frac{b}{a}) = b \cdot 2 \quad a = \frac{b-5}{1 - \frac{b}{a}}$$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☒6
☐7
☐СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$$\sqrt{x+6} = \sqrt{5-x}$$~~

~~$$\sqrt{x+6} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2} + \sqrt{5-x}$$~~

~~$$\sqrt{x+6} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2} + \sqrt{5-x}$$~~

~~$$x+31+10\sqrt{x+6} = 120-4x-4x^2+5-x+4(5-x)\sqrt{x+6}$$~~

~~$$(4x-10)\sqrt{x+6} = 94-6x-4x^2$$~~

~~$$(2x-5)\sqrt{x+6} = -2x^2-3x+47$$~~

$$(\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x})^2 = x+6+5-x-2\sqrt{30-x-x^2} = 11-2\sqrt{30-x-x^2}$$

таким образом уравнение:

$$(\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x})^2 + \sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} - 6 = 0$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} = t$$

$$t^2 + t - 6 = 0$$

$$t = -3$$

$$t = 2$$

$$\sqrt{x+6} + 3 = \sqrt{5-x}$$

$$x+9+6\sqrt{x+6} = 5-x$$

$$6\sqrt{x+6} = -4-2x$$

$$* x \leq -2$$

~~$$36x+2+6 = -4x^2$$~~

$$\sqrt{x+6} = \sqrt{5-x} + 2$$

$$x+6 = 9-x+4\sqrt{5-x}$$

$$2x-3 = 4\sqrt{5-x}$$

$$* x \geq 1,5$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

всего в квадрате 9×9 100 точек

выбрать 2 точки из 100 можно C_{100}^2 способами

$$C_{100}^2 = \frac{100!}{2!} = 99 \cdot 50 = 4950$$

теперь заметим, что все комбинации 2-х точек при повороте повторяются 4 раза, то есть общее кол-во вариантов надо разделить на 4

Однако, если 2 точки симметричны относительно центра квадрата, то кол-во таких вариантов надо делить только на 2, ведь в данном случае вместо 4 комбинаций, совпадающих при повороте, у нас их только две (еще две симметричны, и исключены тем, что мы считаем C_{100}^2 вместо A_{100}^2). Всего точек 100, значит пар, симметрично расположенных от центра 50.

Итак, конечная формула: $\frac{4950 - 50}{4} + \frac{50}{2} = 1250$

Ответ: 1250



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$4x - 3y = a$
 $3x - 4y = b$
 $|a| \leq 6$
 $|b| \leq 8$

$|a - b| \geq |a| - |b|$
 $|a + b| \leq |a| + |b|$
 $|3a| \leq 18 \quad \text{и} \quad |b| \geq 0$
 $|3b| \leq 24 \quad \text{и} \quad |8a| \geq 0$
 $|4a| \leq 24 \quad \text{и} \quad 96 \geq |8a| + |6b|$
 $|4b| \leq 32 \quad \text{и} \quad 96 \geq |8a + 6b|$

$14x = 8a - 6b$
 $7x = 4a - 3b$
 $7y = 3a - 4b$
 $|8a - 4b| \leq 0$
 $48 - |8a| \geq 0$
 $48 - |6a| \geq 0$
 $-5 < 0$
 $-7 < 0$

при $x = \frac{3}{4}y$
 $4x \leq 6 + 3y$
 $x \leq 1,5 + \frac{3}{4}y$
 $x - \frac{3}{4}y \leq 1,5$
 $6 \geq |4x - 3y| \geq |4x| - 3y$
 $|4x| - 3y \leq 6$
 $|3x| - 4y \leq 8$
 $7|x| - 7|y| \leq 14$
 $|x| - |y| \leq 2$
 $72 = 9 \cdot 8$
 $36 \cdot 2$

$x + 3 = 10$
 $2x \sqrt{x+6} + x + 3 = 120 - 4x - 4x^2 + 5 - \sqrt{5-x} = 0$
 $-2\sqrt{5-x}$
 $3 + 47 = 8$
 $2x^2 + 3x - 47$
 385
 37
 385
 $x + 6 + 5 - x = 11$
 $11 = 2\sqrt{30 - x - 5} = 2\sqrt{25 - x}$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1)

5
 $6x+18$

7
 $(x^2-4x)^2$

11
 $(-3x^2)$

~~$5 \leq 6$~~

~~$6 \leq 1000$~~

~~$11 \leq -$~~

$$\begin{cases} 6x+18+2y=(x^2-4x)^2 & | -2 \\ (x^2-4x)^2+4y=-3x^2 \end{cases}$$

$$12x+36+4y=2(x^2-4x)^2$$

$$(x^2-4x)^2-12x-36=-3x^2-2(x^2-4x)^2$$

$$3(x^2-4x)^2-12x-36=0$$

$$(x^2-4x)^2+x^2-4x-12=0$$

$$t^2+t-12=0$$

$$t_1=-4 \quad t_2=3$$

$$x^2-4x+4=0$$

$$x^2-4x-3=0$$

$$D=16+12=28$$

5
 $30 \pm 6\sqrt{7}$

7
 $(11+4\sqrt{7}-8-4\sqrt{7})^2$

9
 $21 \pm 6\sqrt{7}$

11
 $-33-12\sqrt{7}$

$$x = \frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{2} \quad (2 \pm \sqrt{7})$$

$$11 \pm 4\sqrt{7}$$

$$14x+7y=11a-10b$$

$$\begin{cases} |11a| \leq 66 \\ |10b| \leq 80 \end{cases}$$

$$-10b \geq -80$$

$$14x-33y=30x+40y$$

$$11a-10b \leq -14$$

~~$10b=11a+14$~~

$$|11a|-|10b| \geq -80$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 - 2\sqrt{30-x-y^2} = 0$$



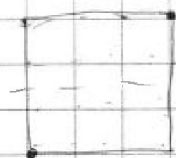
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$C_{100}^3 = \frac{100!}{98! \cdot 2!} \\ 50 \cdot 99 \\ 4950$$



$$\frac{18!}{17! \cdot 2!} = \frac{18 \cdot 17!}{2 \cdot 17!} \\ 8 \cdot 15 = 120$$

$$m \equiv n$$

$$m - n = 13k$$

$$13k(13k+g) + 13p^2 = (m-n)(m-n+g)$$

$$p^2 = 13k^2 + gk$$

$$mn(m-n+3)$$

$$13p^2 \quad 3q^2$$

$$\begin{array}{r} 495099 \\ 4 \overline{) 1237,5} \\ 9 \\ 15 \\ \underline{20} \end{array}$$

если $n = 0$ то

$$\frac{(n-1)n}{2} - \frac{n}{2} \\ 4 + \frac{2}{2}$$

если $m \equiv n \equiv 0$

$$\text{то } (m-n)(m-n+3) = 27 \quad 3q^2 \quad q=3$$

$$mn(m-n+3) = 27 \Rightarrow 3q^2 = 27$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$

~~если $m \equiv n$~~

$$(m-n)(m-n+3) : 9 \Rightarrow q : 3 \text{ не так}$$

$\checkmark q=3$ так уже было

$$(m-n)(m-n+3) = 27$$

$$mn(m-n+3) = 13p^2$$

$$a(a+1) = 27$$

$$a^2 + a - 27 = 0$$

$$g = 9 + 9 + 12 = 30$$

$$\begin{array}{r} 69009 \\ 9 \overline{) 1225} \\ 8 \\ \underline{10} \end{array}$$

$$C_3^2 = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3a^2: \{3, a, a\}; \{1, a, 3a\}; \{3, a^2, 1\}; (3a^2, 1, 1) (3a, a)(3, a^2)(a^2, 1)$$
$$13p^2: (13, p, p); (13p, p, 1); (13p^2, 1, 1) (13, p^2, 1) (13, p^2, p)(13p, p)(p^2, 1)$$

$$\frac{mn(m-n+3)}{(m-n)(m-n+3)} \rightarrow$$
$$13p(13p+g)$$
$$13p+g=p$$
$$12p=-g \quad p=$$

$$\begin{array}{r} 13p, p \\ 13p^2, 1 \\ \hline 13p^2, p^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3a, a \\ 3, a^2 \\ \hline 3a^2, 1 \end{array}$$

$$p(p+g)$$

$$p+g=13p \quad g=12p$$

$$3, a, a \quad 3, a^2, 1 \quad 3a^2, 1, 1$$

$$-13p^2, -p$$

$$-13p^2, -1$$

$$-13p^2, -p^2$$

$$-13p+g=-p \quad -p+g=-13p$$

$$a \quad a+g$$

$$-13p^2+g=1$$

$$-13+g=p^2$$

$$mn(m-n+3) = 3a^2$$

$$m-n=-13$$

$$m-n=13$$

$$16n(n-13) = 3a^2$$

$$3a, a, a$$

$$3a, -a, -1$$

$$-3a^2, -1, 1$$

$$-3a^2, -1, 1$$

$$13p^2(13p^2+g) \quad a^2, 1, 1$$

$$13p^2+g=1 \quad a^2, 3a^2, 1$$

$$3a+g=-a \quad a^2, 1, a$$

$$a+g=3a \quad a, 1, 3a$$

$$3a^2+10=1 \quad 3a^2=-g$$

$$-3a^2=-g$$

$$-3=-a^2$$

$$-3a^2=-1$$

$$-3a+g=-a$$

$$-3+g=-a^2$$

$$-3a^2+g=1$$