



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

a_0 - перв. чл. прогр., k - шаг прогр. [N1]

$$\begin{cases} 3x+3 = a_0 + 2k = a_3 \end{cases}$$

$$a_4 - a_3 = 3 \cdot (a_5 - a_3)$$

$$\begin{cases} (x^2+2x)^2 = a_0 + 4k = a_5 \end{cases}$$

$$3x^2 - 3x - 3 = 3(x^2+2x)^2 - 3x - 3$$

$$\begin{cases} 3x^2 = a_0 + 8k = a_6 \end{cases}$$

$$x^2 - x - 1 = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - 3$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$(x+1)(x^3+3x^2-2) = 0$$

$$(x+1)^2(x^2+2x-2) = 0$$

$$I: x = -1$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = -1 \pm \sqrt{3} = \pm \sqrt{3} - 1 = \sqrt{3} - 1 \quad II$$

тогда I: члены прогр. будут:

0; 1; 3 - сомнительно

II: $3\sqrt{3}$; 4; $12-6\sqrt{3}$ - сомнительно

III: $-3\sqrt{3}$; 4; $12+6\sqrt{3}$ - сомнительно

ответ: 1; $-\sqrt{3}-1$; $\sqrt{3}-1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(N2)

$|x-3y| \leq 3$ — область между $x-3y=3$ и $x-3y=-3$

$$y = \frac{x}{3} - 1$$

x	y
0	-1
3	0

$$y = \frac{x}{3} + 1$$

x	y
0	1
3	2

аналог $|3x-y| \leq 1$ — $3x-y=1$ и $3x-y=-1$

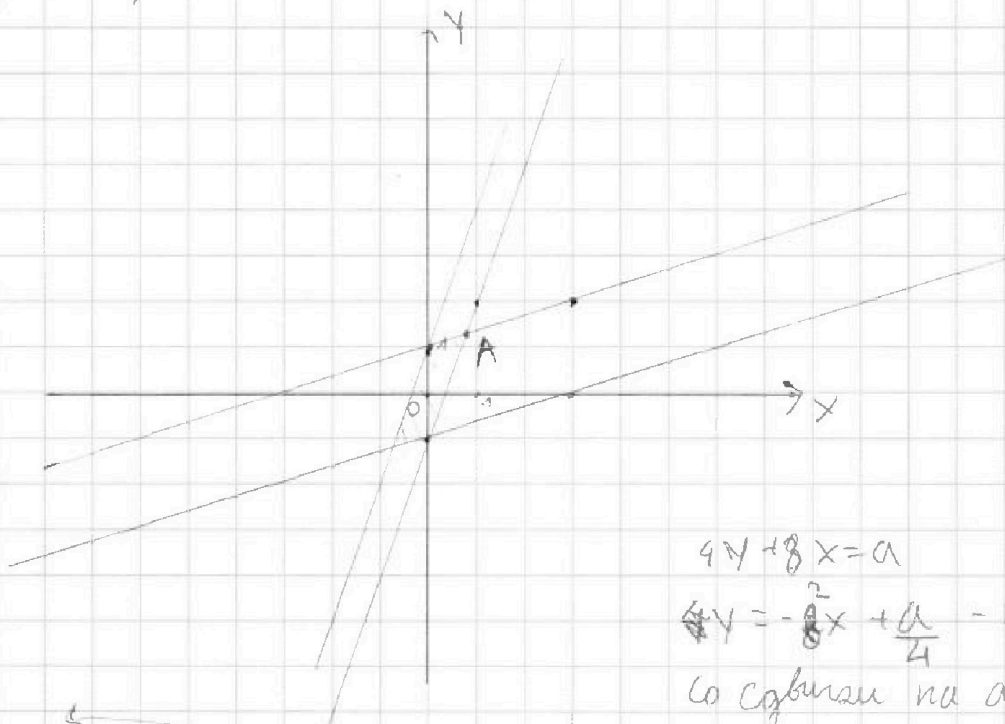
$$y = 3x - 1$$

x	y
0	-1
1	2

$$y = 3x + 1$$

x	y
0	1
1	4

нужно пересек. эти области



$$4y + 8x = a$$

$$y = -\frac{2}{4}x + \frac{a}{4} \text{ — прямая } y = -2x$$

со связью на a — так a, когда прямая имеет пересек.

с полукр. частью — когда прямая проходит через A

A — пересек $y = 3x - 1$, $y = \frac{x}{3} + 1$

$$3x - 1 = \frac{x}{3} + 1, 9x - 3 = x + 3, 8x = 6, x = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow y = \frac{\frac{3}{4}}{3} + 1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4} \Rightarrow 4y + 8x = 4 \cdot \frac{5}{4} + 8 \cdot \frac{3}{4} = 5 + 6 = 11$$

Отв: 11

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$(m+n)(m+n)+1 - 9(mn) = (m+n)(m+n-9)$ — член (т.к. разойдой $\Rightarrow q=2$
 $mn(m+n-3) = m^2n - mn^2$ N3
 $a \neq m+n$ $\rightarrow 15$ или 13
 $a(a-9) = k \cdot 2^2, a^2 - 9a - k \cdot 2^2 = 0$
 $a = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 16k}}{2}$ $\rightarrow k \cdot 81 + 16 \cdot 75 = 81 + 1200 = 1281$
 $\sqrt{1281} > 30$
 $\sqrt{1281} : 3 \Rightarrow$ может быть 33, 36, 39
 $39^2 = 1521 \Rightarrow k \neq 75 \Rightarrow k = 13$
 $2) k = 13 \quad 81 + 16 \cdot 13 = 81 + 208 = 289 = 17^2 \Rightarrow m+n = \pm 17$
 $mn(17-3) = 15 \cdot 9^2$
 $mn \cdot 14 = 15 \cdot 9^2, 2 \cdot 7 mn = 5 \cdot 3^2 \cdot 4^2$
 $\Rightarrow a = \frac{9 \pm 17}{2} = \frac{9+17}{2} = \frac{26}{2} = 13 = m+n$
 $\Rightarrow mn(m+n-3) = mn(13-3) = 10mn = 75 \cdot 9^2 \quad / : 5$
 $2mn = 15 \cdot 9^2 \Rightarrow q = 2 \Rightarrow 2mn = 15 \cdot 60 \Rightarrow mn = 450$
 $\begin{cases} m+n = 13 \\ mn = 450 \end{cases} \Rightarrow m = 13-n$
 $(13-n)n = 450, 13n - n^2 = 450, n^2 - 13n + 450 = 0, n = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 4 \cdot 450}}{2}$
 $= \frac{13 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{13 \pm 7}{2} = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow m = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \end{bmatrix}, \text{ т.к. } 6 \leq$
 целые m и $n \Rightarrow$ ответ: $(10, 3)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 6

Каждые 2 точки ~~можно~~ ^{можно} посчитать max 8 раз,
(4 поворота и порядок покраи)

Введем любую точку, а затем любую из оставшихся: $9 \cdot 9 \cdot (9 \cdot 9 - 1)$, тогда:

Тогда найдем, какие пары посчитали < 8 .

II. т. точки не совпадают, порядок покраи ~~вар.~~ ^{вар.} ~~кажд~~ ^у каждой пары $\Rightarrow$ пары, которые мы посчитали < 8 раз - посчитали так только из-за того, что при повороте точки совпали с ~~той~~ ^{той} уже посчитанными ~~вар.~~ ^{вар.} при другом повороте.

Заметим, что при 1 или 3 поворотах не могли ~~бы~~ ^{совпасть} введем координаты через середины отрезков

x, y

(x_1, y_1) - 1 точка, (x_2, y_2) - 2 точка

т. точка 1 не должна пересекать (или в центре, иначе т. 2 тоже $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ это в центре.

Тогда пусть x' - то, что перед x , после 1 поворота.

$x' = y$; $y' = -x$, пусть 1 (3) поворота:

$\Rightarrow x' = y_1 = x_2$

$\Rightarrow y_1 = x_2 = 0$, иначе

~~$y_2 = -x_2 = y_1$~~ $x_1 = y_2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ точки совпали $\Rightarrow$ противор.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

при
тогда только 2-х поворотах точки могли совпасть

$$X'' = Y' = -X$$

$$Y'' = -X' = -Y, \text{ т.е. } X_1'' = X_1 = X_2, \quad Y_1'' = -Y_1 = Y_2$$

— тогда эту пару
посчитали 4 раза

(т.к. 2 поворота с разницей в 2 совпадения)

Всего таких пар $9 \cdot 9 - 1$, т.к. для каждой точки, кроме

$(0,0)$ есть соотв. ей точка: $X_1 = -X_2$
(и не совпадающая с ней) $Y_1 = -Y_2$

тогда: на самом деле вариантов:

$$9 \cdot 9 \cdot (9 \cdot 9 - 1) - 4 \cdot (9 \cdot 9 - 1) + 9 \cdot 9 - 1 =$$
$$= \frac{81 \cdot 80 - 4 \cdot 80}{8} = 85 \cdot 10 + 80 = 850 + 80 = 930$$

Не зачёркнуто

Ответ: 930. Тогда в любом случае каждый вариант

считали по 2 (раз) (чередуются попарно), разделим

$$\frac{9 \cdot 9 \cdot (9 \cdot 9 - 1)}{2} = 81 \cdot 40$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$mn (m+n-3)$$

$$45 = 5 \cdot 15 = 25 \cdot 3 = 5^2 \cdot 3$$

$$m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n =$$

$$= (m+n)(m+n) - 9(m+n) = (m+n)(m+n-9)$$

~~mn(m+n-3)~~

$$m=3, n=5$$

$$q=3$$

$$q=3$$

$$q=5 \Rightarrow \begin{matrix} p=3 & 45 \\ q=3 & 15 \\ & 15 \\ & 45 \\ & 15 \\ & 15 \end{matrix}$$

$$(m+n)(m+n-9) = 13 \cdot 9$$

$$a(a-9) = 13 \cdot 9$$

$$\begin{cases} mn(m+n-3) = 45 \end{cases}$$

$$a^2 - 9a - 13 \cdot 9 = 0$$

$$a = 9 \pm \sqrt{81 + 4 \cdot 13 \cdot 9} = 9 \pm \sqrt{4284}$$

$$m=3$$

$$mn(m+n-3) = 75q^2$$

$$3 \cdot n = 5 + n = 46$$

$$\begin{aligned} X_1' &= Y_1 \\ Y_1' &= -X_1 \end{aligned}$$

$$X'' = Y_1' = -X_1$$

$$Y'' = -X_1' = -Y_1$$

$$X_2 = -X_1 = X_1$$

$$Y_2 = -Y_1$$

$$X_1' = Y_1 = X_2$$

$$Y_2' = X_1 - X_2 = Y_1$$

$$X_1'' = -X_1 = -X_2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

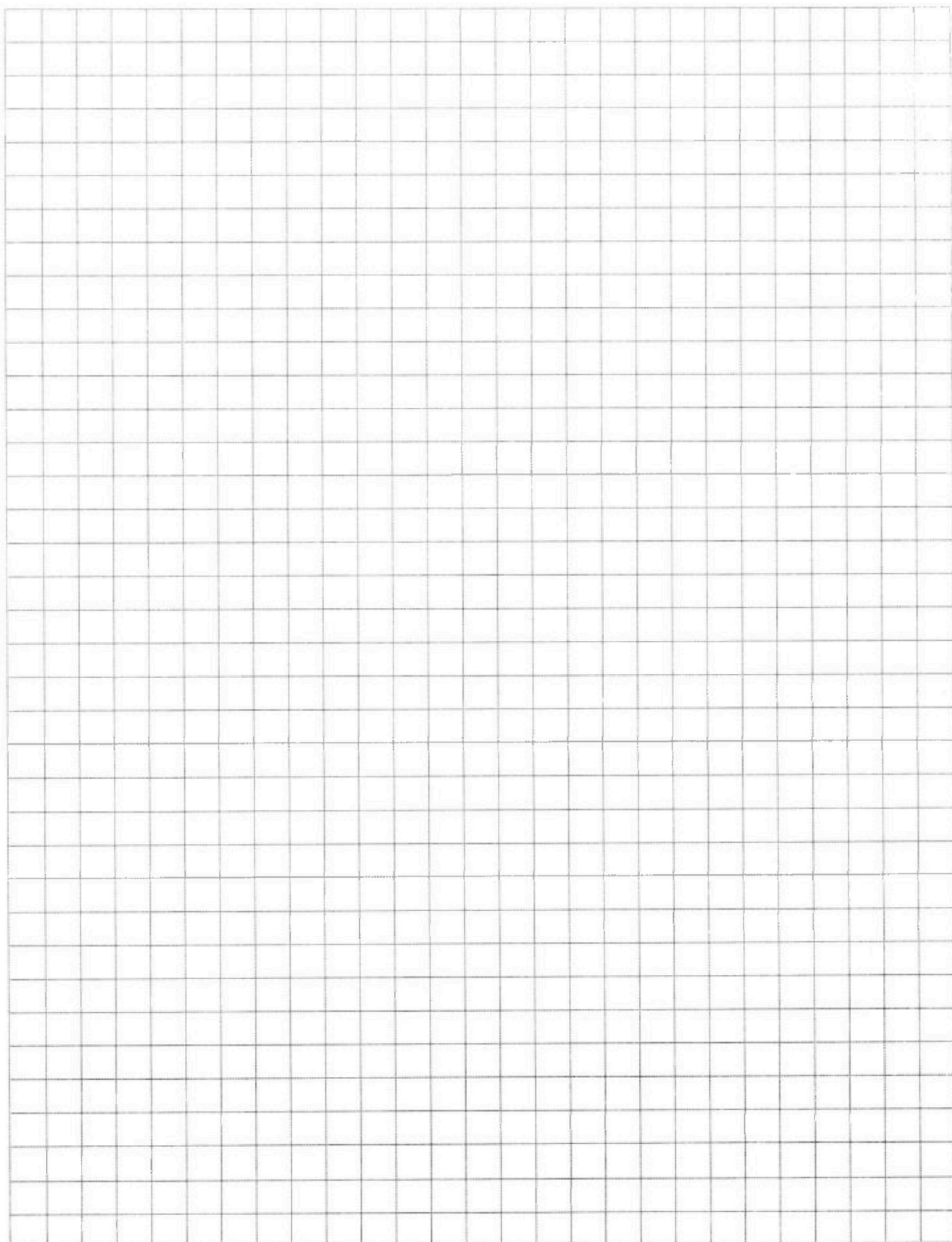
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\pm 3\sqrt{3} - 3 + 3 = \pm 3\sqrt{3}$$

$$(3 \pm 2\sqrt{3} + 2 \cdot (\pm\sqrt{3} - 1))^2 =$$

$$= (3 - 2)^2 = 1$$

$$\pm\sqrt{3} - 1$$

$$3(\pm\sqrt{3} - 1)^2 =$$

$$= 3(3 \pm 2\sqrt{3} + 1) =$$

$$3(4 \pm 2\sqrt{3}) = 12 \pm 6\sqrt{3}$$

$$\pm 3\sqrt{3} \quad 1 \quad 12 \pm 6\sqrt{3}$$

$$\pm (1 \pm 3\sqrt{3}) \quad + 12 \pm 6\sqrt{3}$$

$$\geq 5 \quad \text{max} \quad \sqrt{1281}$$

$$(x_1, y_1)$$

$$< 40$$

$$> 30$$

$$x_2 \rightarrow 33 \quad 36$$

$$x_1' = y_1$$

$$39$$

$$x_1 = y_2$$

$$x_2 = y_1$$

$$8$$

$$36$$

$$34$$

$$35$$

$$1$$

$$1$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ 60 \\ 109 \end{array}$$

$$169 - 120 =$$

$$= 49$$

$$x_1' = y_1 = x_2 = y_2$$

$$x_1' = y_1 = x_2 = y_2$$

$$y_1' = x_1 = y_2$$

$$x_1 = x_2 = y_2 = y_1 = x_1 =$$

$$-\sqrt{3} - 1$$

$$-(3\sqrt{3} + 1) \pm 3 = -3\sqrt{3}$$

$$(3 \pm 2\sqrt{3} + 1 - 2\sqrt{3} - 2)^2 =$$

$$(2, 3)$$

$$x + 2 < \sqrt{3}$$

$$x < \sqrt{3} - 2$$

$$\sqrt{3} - 2$$

$$\sqrt{3} - 2$$

$$8$$

$$39$$

$$39$$

$$35$$

$$1$$

$$15$$

$$2$$

$$1$$

$$4$$

$$16$$

$$17$$

$$11$$

$$9$$

$$17$$

$$28$$

$$9$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} &0 \quad 1 \quad 3 \\ &a_3 + 2a_1 \quad a_5 + 4a_3 \quad a_9 \\ &3 \pm 3\sqrt{3} + 3 = 6 \pm 3\sqrt{3} \\ &6 \pm 3\sqrt{3} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} &((1+\sqrt{3})^2 + 2 \pm 2\sqrt{3})^2 = \\ &= (1 \pm 2\sqrt{3} + 3 + 2 \pm 2\sqrt{3})^2 = \\ &= (6 \pm 4\sqrt{3})^2 = \\ &= 36 \pm 48\sqrt{3} + 48 \end{aligned}$$

$$3(1 \pm \sqrt{3})^2 = 3(1 \pm 2\sqrt{3} + 3) = 12 \pm 6\sqrt{3}$$

$$\begin{array}{r} 43 \\ \times 16 \\ \hline 258 \\ 1152 \\ \hline 6976 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 32 \\ \hline 96 \\ 640 \\ \hline 1024 \end{array}$$

$$3(x+1) = \frac{3(x+1)^2}{2}$$

$$x^2 + 2x \pm \sqrt{3}x$$

$$x+2 \leq \sqrt{3}$$

$$x < \sqrt{3} - 2$$

$$-3\sqrt{3}$$

$$x = -(\sqrt{3} + 1)$$

$$(3 \pm 2\sqrt{3} + 1 + 2\sqrt{3} - 2) = 4 \pm 6\sqrt{3}$$

$$3(4 \pm 2\sqrt{3}) = 12 \pm 6\sqrt{3}$$

$$3(4 - 2\sqrt{3}) = 12 - 6\sqrt{3}$$

$$(m+n)(m+n-9)$$

$$a(a-9) = 4k$$

$$a^2 - 9a - 4k = 0$$

$$b = 8a + 16k$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_9 - a_3 = a_0 - a_0 + 8k - 2k = 6k \quad X = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{2} =$$

$$a_5 - a_3 = 4k - 2k = 2k = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$3x^2 - (3x+3) = 3 - (x^2 + 2x)^2 - (3x+3)$$

$$3x^2 - (3x+3) = 3 - (x^2 + 2x)^2 - (3x+3)$$

$$3x^2 - 3x - 3 = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - 3 \quad X = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2+8}}{2}$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$1 + 4 - 4 + 3 + 2 - 2 =$$

$$\frac{-2}{2k} = -1$$

$$\begin{array}{r} x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \\ - (x^4 + x^3) \\ \hline 3x^3 + 3x^2 \\ - (3x^3 + 3x^2) \\ \hline 0 - 2x \end{array} \quad \begin{array}{r} x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \\ - (x^4 + x^3) \\ \hline x^3 + 3x^2 + 0x - 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (x^3 + 3x^2 - 2) \quad (x+1) \\ - (x^3 + x^2) \\ \hline 2x^2 - 2 \end{array}$$

$$(x+1)^2 ($$

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 + 0x - 2 \\ - (x^3 + x^2) \\ \hline 2x^2 + 0x \\ - (2x^2 + 2x) \\ \hline -2x - 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^3 + 3x^2 + 0x - 2 \\ - (x^3 + x^2) \\ \hline x^2 + 2x - 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \\ - (x^2 + 2x^3 + 1^2) \\ \hline 2x^3 + 2x^2 - 2x \\ - (2x^3 + 4x^2 + 2x) \\ \hline -2x^2 - 4x - 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 + 2x + 1 \\ - (x^2 + 2x - 2) \\ \hline 3 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 3x+3 = a_0 + 2k \\ (x^2+2x)^2 = a_0 + 4k \\ 3x^2 = a_0 + 6k \end{cases}$$

$$3x^2 \pm 3x + 3 + 6k$$

$$x^2 - 3x - 3 - 2k$$

$$x^2 = 3x + 3 + 2k$$

$$x^2 - x - 3 - 2k = 0$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{1 + 12 + 4k}}{2}$$

$$(3x + 3 + 2k + 2x)^2 = (5x + 3 + 2k)^2 = a_0 + 3x + 3 + k$$

$$25x^2 + 15x + 10kx$$

$$3x^2 - (3x + 3) = 3 \cdot (x^2 + 2x)^2$$

$$x^2 - x - 1 = (x^2 + 2x)^2$$

$$x^2 - x - 1 = x^4 + 4x^3 + 4x^2$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1 = 0$$

$$x^4 + 3x^3 + x^3 + 3x^2 + x^2 + 1$$

$$x^3(x+1) + 3x^2(x+1) + (x+1) = 0$$

$$(x^3 + 3x^2 + x + 1)(x+1) = 0$$