



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен $6 - 9x$, шестой член равен $(x^2 - 2x)^2$, а десятый равен $9x^2$. Найдите x .

2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $3y + 6x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$ и $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$ равно $11p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q — простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 6$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 10×10 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 4$, $AN = 5$.



1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

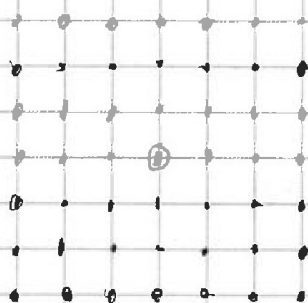
СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1. $a_4 = 6 - 9x$

$$a_6 = (x^2 - 2x)^2$$

$$a_{10} = 9x^2$$



~~См. решение~~

$$\Rightarrow \frac{(x^2 - 2x)^2 - 6 + 9x}{2} = \frac{9x^2 - (x^2 - 2x)^2}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{2(x^2 - 2x)^2 - 12 + 18x}{4} = \frac{9x^2 - (x^2 - 2x)^2}{4}$$

$$\Rightarrow 3(x^2 - 2x)^2 - 12 - 9x^2 + 18x = 0.$$

$$\Rightarrow (x^2 - 2x)^2 - 4 - 3x^2 + 6x = 0.$$

$$\Rightarrow x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4 - 3x^2 + 6x = 0.$$

$$\Rightarrow x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0.$$

$$(x-1)(x^3 - 3x^2 - 2x + 4) = 0$$

$$(x-1)^2(x^2 - 2x - 4) = 0.$$

$$\Rightarrow x=1 \text{ или } x^2 - 2x - 4 = 0.$$

$$D = 4 + 16 = 20$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

Ответ: 1 или $1 + \sqrt{5}$ или $1 - \sqrt{5}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☒☐☐☐☐☐

СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 2y-2 \leq x \leq 2y+2 \\ 2x-1 \leq y \leq 2x+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x+y \geq 2(x+y)-3$$
$$\Rightarrow \{x+y\} \leq 3.$$

$$x \geq 2y-2 \geq 2(2x-1)-2=4x-2-2=4x-4$$

$$\Rightarrow 3x \leq 4.$$

$$3x+3y \leq 9$$

$$\Rightarrow 6x+3y \leq 13. \text{ — Оценки}$$

$$\text{Прим } x=\frac{4}{3}, y=\frac{5}{3}: \text{ — Пример.}$$

$$6x+3y=13.$$

$$\begin{cases} |x-2y| = \left| \frac{4}{3} - \frac{10}{3} \right| = \left| -\frac{6}{3} \right| = 2 \leq 2. \\ |2x-y| = \left| \frac{8}{3} - \frac{5}{3} \right| = \left| \frac{3}{3} \right| = 1 \leq 1. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Наибольшее значение выражения } 6x+3y - 13.$$

$$\text{Ответ: } 13.$$



1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2.

$$\begin{cases} |x-2y| \leq 2 \\ |2x-y| \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2y)^2 \leq 4 \\ (2x-y)^2 \leq 1 \end{cases}$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 4 \leq 0. \quad (1)$$

$$y^2 - 4xy + 4x^2 - 1 \leq 0 \quad (2)$$

Решим нер-во (1) отн. x :

$$D = 16y^2 - 4(4y^2 - 4) = 16.$$

$$x_{1,2} = \frac{4y \pm 4}{2} = 2y \pm 2.$$

$$\Rightarrow 2y-2 \leq x \leq 2y+2.$$

Решим нер-во (2) отн. y :

$$D = 16x^2 - 4(4x^2 - 1) = 4.$$

$$y_{1,2} = \frac{4x \pm 2}{2} = 2x \pm 1.$$

$$\Rightarrow 2x-1 \leq y \leq 2x+1.$$



1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$$

$$B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$$

$$1) A = 75q^2, B = 11p^2$$

$$A = (m+2n)^2 - 7(m+2n) = (m+2n)(m+2n-7).$$

Заметим, что $m+2n$ и $m+2n-7$ — разной четности $\Rightarrow$

$$\Rightarrow A \div 2 \Rightarrow 75q^2 \div 2 \Rightarrow q = 2.$$

$$m+2n = x.$$

$$x(x-7) = 75 \cdot 4 = 300.$$

$$x^2 - 7x - 300 = 0.$$

$$D = 49 + 1200 = 1249.$$

Заметим, что 1249 — не квадрат натурального числа.

$$\Rightarrow x \notin \mathbb{N} \Rightarrow m+2n \notin \mathbb{N} \Rightarrow \emptyset.$$

$$2) A = 11p^2.$$

$$B = 75q^2.$$

$$A \div 2 \Rightarrow p = 2.$$

$$m+2n = t.$$

$$t(t-7) = 11 \cdot 2^2 = 44.$$

$$t^2 - 7t - 44 = 0$$

$$(t-11)(t+4) = 0.$$

$$t = 11, t = -4$$

$$\downarrow$$

$$m, n, t \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow t = 11. \Rightarrow m+2n = 11.$$

$$B = mn(m+2n+9) = mn(11+9) =$$

$$= 20mn =$$

$$= 75q^2.$$

$$\Rightarrow 75q^2 \div 2 \Rightarrow q = 2.$$

$$\Rightarrow 20mn = 75 \cdot 4.$$

$$20mn = 300.$$

$$\Rightarrow mn = 15. \left. \begin{array}{l} m+2n = 11 \end{array} \right\} m, n \in \mathbb{N}.$$

$$m = 11 - 2n.$$

$$(11-2n)n = 15.$$

$$2n^2 - 11n + 15 = 0$$

$$D = 121 - 4 \cdot 15 \cdot 2 = 1.$$

$$n = \frac{11 \pm 1}{4} = 3 \text{ или } 2.5$$

$$\downarrow$$

$$\emptyset.$$

$$I. A = 6.$$

$$\Rightarrow m = \frac{15}{2} \notin \mathbb{N} \Rightarrow \emptyset.$$

$$II. A = 5.$$

$$\Rightarrow m = 3.$$

$$\Rightarrow n = 3 \Rightarrow m = 5.$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } (5; 3).$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$yz^2 = AY^2 + Az^2 - 2AY \cdot Az \cos(180^\circ - 2\angle)$$

$$16 = 9 + 9 - 18 \cos(180^\circ - 2\angle)$$

$$\Rightarrow 18 \cos(180^\circ - 2\angle) = 2.$$

$$\cos(180^\circ - 2\angle) = \frac{1}{9}.$$

$$\Rightarrow \cos(2\angle) = -\frac{1}{9}.$$

7) По теореме косинусов в $\triangle CAB$:

$$AB^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(2\angle)$$

$$BC^2 = 36 + 144 + 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot \frac{1}{9} = 36 + 144 + 2 \cdot 2 \cdot 4 =$$

$$= 180 + 16 = 196.$$

$$BC = 14.$$

Ответ: $BC = 14$.

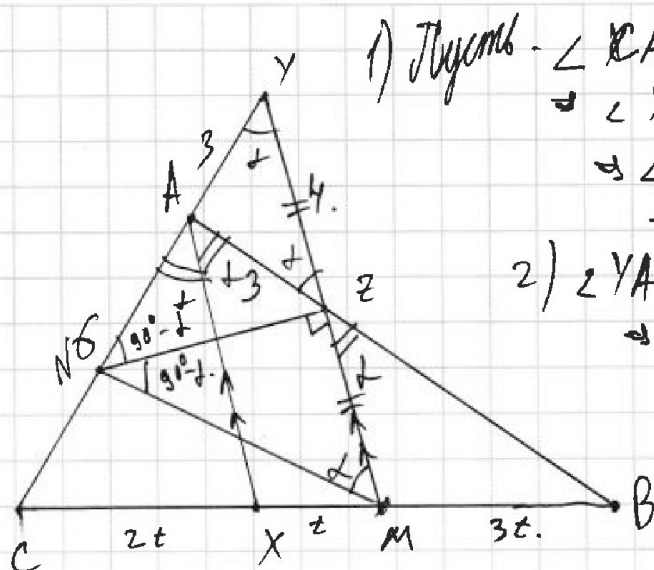


1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4.



1) Пусть $\angle CAB = 2\alpha$.

$$\Rightarrow \angle XAB = \angle XAC = \alpha$$

$$\Rightarrow \angle MZB = \alpha$$

$$\Rightarrow \angle AZY = \alpha$$

$$2) \angle YAZ = 180^\circ - 2\alpha$$

$$\Rightarrow \angle AYZ = \alpha = \angle AZY$$

$$\Rightarrow AZ = AY$$

$$\Rightarrow AY = 3$$

3) По теореме Менелая:

$$\frac{BM}{BC} \cdot \frac{CA}{AX} \cdot \frac{YZ}{ZM} = 1$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{YZ}{ZM} = 1 \Rightarrow YZ = ZM$$

4) Пусть $N \in AC, NZ \perp YM$.

$$\Rightarrow NZ \perp YM, YZ = ZM \Rightarrow NY = NM, \angle ZMN = \alpha$$

$$\Rightarrow \angle YMN = \angle YZA \Rightarrow MN \parallel AZ \Rightarrow \text{т.к. } YZ = ZM, \text{ то}$$

$$YN = AN = 3 \Rightarrow NC = 3 = AN$$

$$5) AX \parallel YM \Rightarrow \frac{CA}{AY} = \frac{CX}{XM} \Rightarrow CX = 2XM$$

$$\Rightarrow \frac{CX}{XM} = 2 \Rightarrow \frac{CX}{XB} = \frac{1}{2}, \text{ т.к. } AX - \text{бис-са, то}$$

$$\frac{CX}{XB} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AB = 12$$

6) По теореме косинусов в $\triangle YAZ$:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x = -2 \quad \emptyset, \text{ т.к. } \sqrt{2x} \text{ — не определен.}$$

$$x = 7:$$

Подставим $x = y = 7$

$$3 - 0 + 7 = 0.$$

$$10 = 0 \quad \emptyset.$$

$$2) a = -2.$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} = -2.$$

$$\sqrt{x+2} = \sqrt{7-x} - 2.$$

$$x+2 = 7-x+4 - 4\sqrt{7-x}$$

$$2x+2-4-7 = -4\sqrt{7-x}$$

$$2x-9 = -4\sqrt{7-x}$$

$$9-2x = 4\sqrt{7-x}$$

$$81 - 36x + 4x^2 = 16(7-x)$$

$$4x^2 - 36x + 16x + 81 - 112 = 0$$

$$4x^2 - 20x - 31 = 0.$$

$$D = 400 + 16 \cdot 31 = 400 + 496 = 896.$$

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{896}}{8} \quad 1) x = \frac{20 - \sqrt{896}}{8} < 0$$

Ответ: $\emptyset$, т.к. $\sqrt{2x}$ не определен.

$$2) x = \frac{20 + \sqrt{896}}{8} > 24.$$

$$\Rightarrow \sqrt{7-x} \text{ — не определено.}$$

Ответ: $\left(\frac{5+\sqrt{17}}{2}, \frac{5+\sqrt{17}}{2} \right), \left(\frac{5-\sqrt{17}}{2}, \frac{5-\sqrt{17}}{2} \right).$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2\sqrt{(x+2)(7-x)} = -(\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x})^2 + 9$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = -(\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x})^2 + 9$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} = a$$

$$a + 7 = -a^2 + 9$$

$$a^2 + a - 2 = 0$$

$$(a-1)(a+2) = 0$$

$$1) a = 1$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} = 1$$

$$\sqrt{x+2} = 1 + \sqrt{7-x}$$

$$x+2 = 1 + 2\sqrt{7-x} + 7-x$$

$$2x+2-1-7 = 2\sqrt{7-x}$$

$$2x-6 = 2\sqrt{7-x}$$

$$x-3 = \sqrt{7-x}$$

$$x^2 - 6x + 9 = 7 - x$$

$$x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 = 17$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

При обоих значениях x значение выражения определено.

$$2) a = 3$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} = 3$$

$$x+2-7-x-2\sqrt{(x+2)(7-x)} = 9$$

$$\sqrt{(x+2)(7-x)} = 0$$

$$x = -2 \text{ или } x = 7$$

~~Handwritten calculations and scribbles, including the expression $\sqrt{(x+2)(7-x)} = 0$ and the solutions $x = -2$ or $x = 7$.~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2} \\ x^3+3x-\sqrt{2y} = y^3-\sqrt{2x}+3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2} \\ x^3+3x+\sqrt{2x} = y^3+3y+\sqrt{2y} \end{cases}$$

$$x^3-y^3+3(x-y)+\sqrt{2x}-\sqrt{2y}=0.$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})+3\sqrt{x}\cdot(x^2+xy+y^2)+3(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x^2-y^2})+\sqrt{2}\dots = \\ = (\sqrt{x}-\sqrt{y})((\sqrt{x}+\sqrt{y})(x^2+xy+y^2)+3(\sqrt{x}+\sqrt{y})+\sqrt{2})=0. \end{aligned}$$

$$\sqrt{x}=\sqrt{y}.$$

$$x=y.$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2} = \\ = 2\sqrt{(x+2)(7-x)}. \end{aligned}$$

$$x+2+7-x-2\sqrt{(x+2)(7-x)}=4\sqrt{(x+2)(7-x)}$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{(x+2)(7-x)} =$$

$$a^2+a-2=0.$$

$$D=1+8=9.$$

$$\frac{-1 \pm 3}{2} = 1, -2$$

$$1-2\sqrt{(x+2)(7-x)} = -a$$

$$a+7=-a^2+9.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2} \\ x^2+3x-\sqrt{2y} = y^3-\sqrt{2x}+3y \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^3 - y^3 + 3x - 3y + \sqrt{2x} - \sqrt{2y} = 0$$

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x^2+xy+y^2) + 3(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y}) + \sqrt{2}(\sqrt{x}-\sqrt{y}) = 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{y}) \left((\sqrt{x}+\sqrt{y})(x^2+xy+y^2) + 3(\sqrt{x}+\sqrt{y}) + \sqrt{2} \right) = 0$$

Вторая

$$x^2+xy+y^2$$

$$D = y^2 - 4y^2 \leq 0, \text{ если } D=0, \text{ то } y=0 \\ \Rightarrow x^2+xy+y^2 = x^2 \geq 0 \\ \text{если } D < 0, \text{ то } x^2+xy+y^2 > 0$$

$$\Rightarrow x^2+xy+y^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \text{Вторая скобка} > 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}-\sqrt{y}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=\sqrt{y} \Rightarrow x=y$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2}$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} = 2\sqrt{(x+2)(7-x)}$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{(x+2)(7-x)}$$

$$a - b + 7 = 2ab$$

$$a + 7 = b(2a+1) \Rightarrow b = \frac{a+7}{2a+1}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

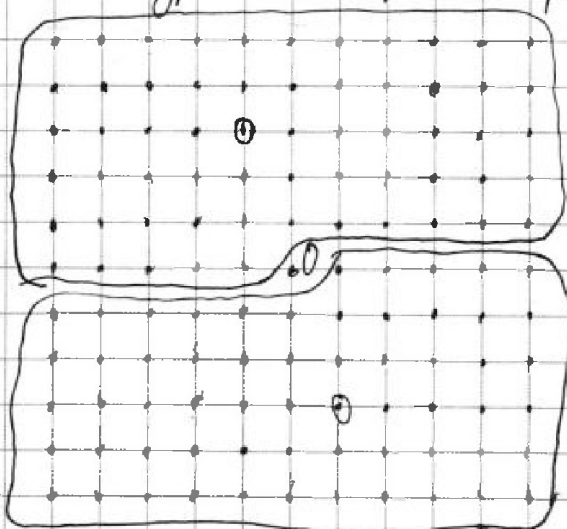
Пара точек

Заметим, что если точка в паре не симметрична относительно центра квадрата, то при поворотах этой пары на $360^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ и 270° (а это все возможные повороты) мы получим 4 разн. пары раскраски.

пары раскраски

симметрично

Рассмотрим пары точек, симметричные относительно центра квадрата. При поворотах её на $360^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$



мы получим лишь две различные раскраски.

Таким образом, (в общем) 60 (берем точку

из нижней обведенной половины и зеркально-чаем симм-ю). Т.к. поворачивая получаем две разные, то среди них $\frac{60}{2} = 30$ - различных.

Всего раскрасок $\binom{12}{2}$

$\Rightarrow$ Несимметричных $\binom{12}{2} - 30 = 30$. Поворачивая несимметричную получаем 4 разные $\Rightarrow$ среди них



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{\binom{121}{2} - 60}{4}$$

различий.

→ ~~Всего~~ всего различий -

$$- \frac{\binom{121}{2} - 60}{4} + \frac{60}{2} = \frac{\binom{121}{2} + 60}{4} =$$

$$= \frac{\frac{120 \cdot 121}{2} + 60}{4} = \frac{60 \cdot 121 + 60}{4} = \frac{60 \cdot 122}{4} =$$

$$= 30 \cdot 61 = 1830 \text{ раскрасок.}$$

Ответ: 1830 раскрасок.

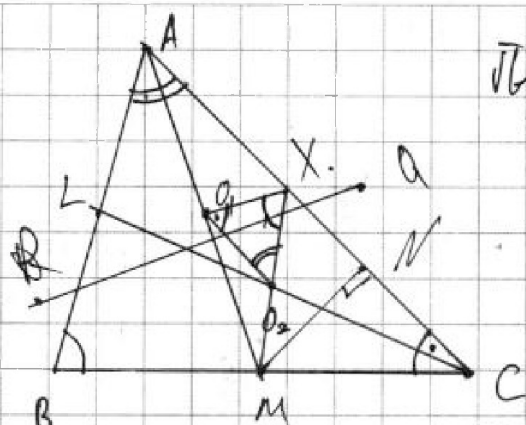


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть O_1 — середина AM ,
 O_2 — середина CL .
 $\Rightarrow O_1O_2$ — линия центров Ω и ω ,
а PQ — их рад. ось.

$\Rightarrow O_1O_2 \perp PQ$, но из условия задачи $PQ \parallel$ высоте из B
 $\Rightarrow PQ \perp AC$.

$\Rightarrow PQ \perp AC, PQ \perp O_1O_2 \Rightarrow O_1O_2 \parallel AC$.

Пусть $X = MO_2 \cap AC$.

MO_2 — средн. линия $\triangle LCB \Rightarrow XM \parallel AB \Rightarrow XM$ — средн.-
линия $\triangle BCA \Rightarrow X$ — середина AC .

$\Rightarrow XO_1 \parallel BC$, как ср. линия.

$\Rightarrow XO_2 \parallel AB$, и $O_1O_2 \parallel AC$.

$XO_1 \parallel BC, XO_2 \parallel AB, O_1O_2 \parallel AC$

$\Rightarrow \triangle XO_1O_2 \sim \triangle BCA$.

Заметим, что: $XO_1 = \frac{MC}{2} = \frac{BC}{4}$, но $\frac{XO_1}{BC} = \frac{XO_2}{AB}$

$\Rightarrow XO_2 = \frac{AB}{4}$. Но $XO_2 = \frac{AL}{2} \Rightarrow AL = \frac{AB}{2}$

$\Rightarrow L$ — середина $AB \Rightarrow CL$ — медиана, бис-са. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BAC$ — равнобедр., $AC = BC$.

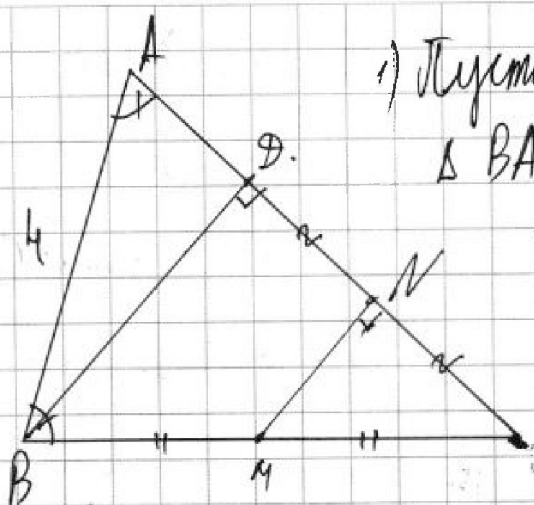


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) Пусть BD — высота из B в $\triangle BAC$.

2) $\angle ANM = 90^\circ$, т.к. опирается на диаметр.

$\Rightarrow MN \parallel BD$.

$\Rightarrow DN = NC$, т.к. $BM = MC$.

Пусть $AC = x$. $\Rightarrow NC = x - 5$.
 $\Rightarrow DC = 2x - 10$
 $\Rightarrow AD = 10 - x$.

$$BD^2 = AC^2 - AD^2 = DC^2 \quad BC = AC = x$$

$$\left. \begin{aligned} BD^2 &= AB^2 - AD^2 \\ BD^2 &= CB^2 - CD^2 \end{aligned} \right\} \text{— из т. Пифагора.}$$

$$\Rightarrow AB^2 - AD^2 = CB^2 - CD^2$$

$$4^2 - (10 - x)^2 = x^2 - (2x - 10)^2$$

$$16 - 100 + 20x - x^2 = x^2 - 4x^2 + 40x - 100$$

$$2x^2 - 20x + 16 = 0$$

$$x^2 - 10x + 8 = 0$$

$$D = 100 - 4 \cdot 8 = 100 - 32 = 68$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{68}}{2} = 5 \pm \sqrt{17}$$

Ответ: $AC = BC = 5 \pm \sqrt{17}$
 Ответ: $AC = BC = 5 + \sqrt{17}$

$$1) x = 5 - \sqrt{17} < 1$$

$$\Rightarrow AC + BC < 2 < 4$$

$\triangle$ с нерав-ми Δ .

$$\Rightarrow x = 5 + \sqrt{17}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(m, n). \quad A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = (m+2n)^2 - 7(m+2n) = (m+2n)(m+2n-7)$$

$$B = m^2n + 2mn^2 + 9mn = mn(m+2n+9)$$

$$1) (m+2n)(m+2n-7) = 11p^2 \quad 11p^2 \quad 11p^2$$

$$mn(m+2n+9) = 75q^2$$

$$x(x-7) = 11p^2$$

$$x \text{ и } p = 2$$

$$x(x-7) = 44$$

$$x^2 - 7x - 44 = 0$$

$$(x-11)(x+4)$$

$$x = 11 \Rightarrow m+2n = 11$$

$$20mn = 75q^2$$

$$q = 2$$

$$20mn = 75 \cdot 4 = 15 \cdot 5 \cdot 4$$

$$mn = 15$$

$$m+2n = 11 \Rightarrow m = 11-2n, (11-2n)n = 15$$

$$11n - 2n^2 = 15$$

$$2n^2 - 11n + 15 = 0$$

$$D = 121 - 120 = 1$$

$$\frac{11 \pm 1}{2} = 6 \text{ и } 5$$

$$m = 5, n = 6$$

$$2) (m+2n)(m+2n-7) \Rightarrow 5q^2$$

$$mn(m+2n+9) = 11p^2$$

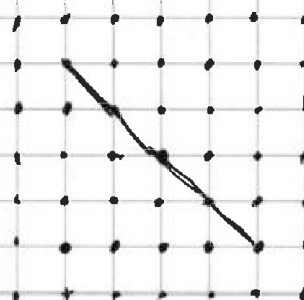
$$q = 2$$

$$x(x-7) = 300$$

$$x^2 - 7x - 300 = 0$$

$$49 + 1200 = 1249$$

$$\begin{array}{r} 37 \\ \times 37 \\ \hline 259 \\ 1110 \\ \hline 1369 \end{array}$$



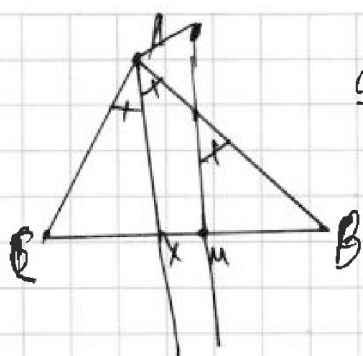


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

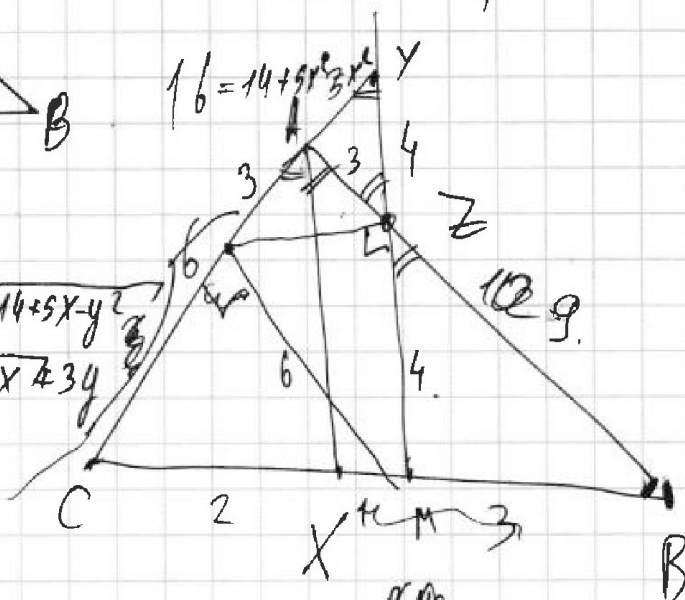
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$g - 2\sqrt{14+5x-y^2} = 1$$

$$16 = 14 + 5x - y^2$$



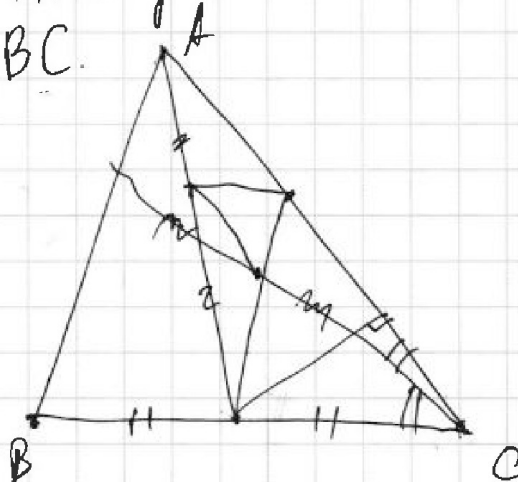
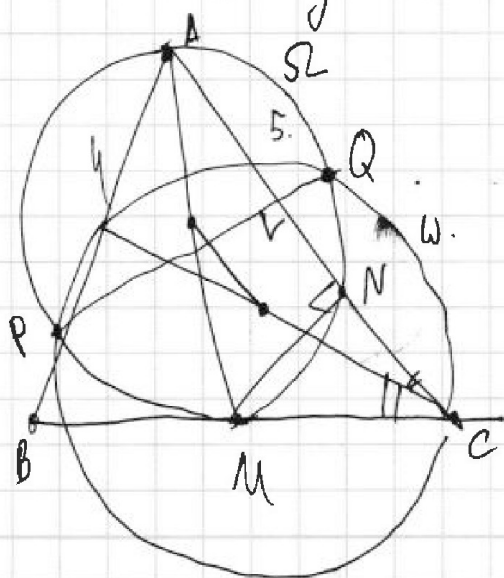
$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2} \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^3 + \sqrt{2x} + 3x &= \\ &= y^3 + \sqrt{2y} + 3y. \end{aligned}$$

$$\frac{CX}{CM} = \frac{2}{3}$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}$$

AC, BC.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

33-33 $(40-3)^2 = 1600 - 240 + 9$ $x \leq 2y+2 \leq$

$990+99$ $1600-231 \leq 4x+4$

$2y-2$ $2y+2$ y

$2x-1$ $2x+1$

$16-100+20x-x^2=x^2-4x^2+10x-100$

$2y-2 \leq x \leq 2y+2$

$2x+1 \leq y \leq 2x+1$

$2x^2-20x+16=0$

$x^2-10x+8=0$

$3y+6x=13$

$x=\frac{4}{3}$

$y=\frac{5}{3}$

$3x \geq 16 - (10-x)^2$

$= x^2 - (2x-10)^2$

$3x \leq 4$

$x+y \leq 3$

$3x+3y \leq 9$

$x \geq 2y-2 \geq$

$\geq 2(2x-1)-2=$

$= 4x-4$

$x \geq 4x-4$

$3 \geq x+y$

$x+y \leq 2(x+y)+3$

$x+y \geq -3$

13

$10-x$

$2x-10$

5

B X C



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2(x-1)^2 - 2x^3 + x^2 + 6x - 4 =$$

"

~~BC + 2AC~~

$$x^4 - x^3 - 3x^3 + 3x^2 - 2x^2 + 2x + 4x - 4 =$$

$$\frac{4y \pm 4}{2}$$

$$x = (x-1)x^3 - 3x^2(x-1) - 2x(x-1) + 4/(x-1) =$$

$$= (x-1)(x^3 - 3x^2 - 2x + 4) =$$

$$= (x-1)(x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x - 4x + 4) =$$

$$= (x-1)((x-1)x^2 - 2x(x-1) - 4/(x-1))$$

$$= (x-1)^2(x^2 - 2x - 4).$$

$$D = 4 + 16.$$

$$|x - 2y| \leq 2.$$

$$|2x - y| \leq 1.$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 \leq 4.$$

$$4x^2 - 4xy + y^2 \leq 1.$$

$$3y + 6x.$$

$$D_1 = 16y^2 - 4(4y^2 - 4) =$$

$$= 16.$$

$$D_2 = 16y^2 - 4y^2 + 4 =$$

$$= 12y^2 + 4.$$

$$1 \quad x^2 - 4xy + 4y^2 - 4 \leq 0.$$

$$2 \quad 4x^2 - 4xy + y^2 - 1 \leq 0.$$

$$\frac{4x \pm 2}{2}$$

$$y^2 - 4yx + 4x^2 - 1 \leq 0$$

$$D_1 = 16x^2 - 16x^2 + 4 = 4$$