



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$ равно $17p^5$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 12$, $\cos(2\angle CEM) = -\frac{1}{4}$.
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наименьшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 10$.
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел (x, y) , удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Уравнение будет иметь 2 корня тогда когда его

$$\text{Дискриминант} \geq 0, \text{ т.е. } (25t)^2 - 4(4t^2 - 4) \geq 12t^2 - 11t + 16 > 0$$

$$16 - 4t^2 > 0$$

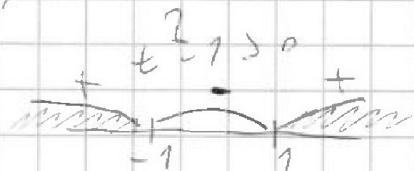
$$4 - t^2 > 0$$

$$(2 - t)(2 + t) > 0$$



$$\text{т.е. } t \in (-2; 2)$$

По т. Внета найдем значение корней от $4t^2 - 4$, но
условно оно должно быть > 0 , т.е. $4t^2 - 4 > 0$



$$\text{т.е. } t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$

Объединим два множества решений



Получим ответ: $t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = (a-b)^2 + 15(a-b) = (a-b)(a-b+15) = 12p$$

Положим $40 = a+b > a-b$, и $40 = a+b > b-a$.

Заметим, что $a \neq b$ т.к. иначе $(a-b)(a-b+15) = 0 \neq 12p > 0$.

Пусть $a > b$. Мы знаем, что $(a-b)(a-b+15) = 12$.

12 разное значит $a-b = 12$ или $a-b+15 = 12$

если $a-b = 12$, то $a-b \neq 12$ или $a-b = 12$ или $a-b = 34$, т.к.

$40 > a-b > b$.

$$\begin{cases} a-b=12 \\ a+b=40 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{52}{2} \text{ не целое число}$$

$$\begin{cases} a-b=34 \\ a+b=40 \end{cases} \Rightarrow a=37 \text{ Тогда: } 34 \cdot (34+15) = 12p$$

$$2 \cdot 49 = p$$

~~не целое~~ противоречие.

если $a-b+15 = 12$, то $a-b+15 = 12$ или $a-b+15 = 34$ или $a-b+15 = 57$

$$a-b=2$$

$$a-b=19$$

$$a-b=36$$

т.к. $55 > a-b+15 > 15$

$$\begin{cases} a-b=2 \\ a+b=40 \end{cases} \Rightarrow a=21 \text{ Тогда } 2 \cdot (2+15) = 12p$$

$$p=2$$

~~не целое~~ противоречие.



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a-b = -15 \\ a+b = 40 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{25}{2} \text{ противоречие}$$

Получили только 1 решение $a=4, b=36, p=2$
Ответ: $a=4, b=36$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a-b=15 \\ a+b=40 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{55}{2} \text{ - противоречие}$$

$$\begin{cases} a-b=36 \\ a+b=40 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=38 \\ b=2 \end{matrix} \text{ Проверка: } 36 \cdot (36+15)=1296 \\ 31 \cdot 2=62$$

~~1296 - противоречие~~

Пусть $b > a$ ~~получим, что если между $b-a=15$, то~~
~~еще будем складывать~~

если $a-b=17$

п.к. $40 > b-a > 0$, то $0 > a-b > 40$. Значит $a-b=-17$

или
 $a-b=-34$

$$\begin{cases} a-b=-12 \\ a+b=40 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{28}{2} \text{ - противоречие}$$

$$\begin{cases} a-b=-34 \\ a+b=40 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=3 \\ b=37 \end{matrix} \text{ Проверка: } -34(-34+15)=-1296 \\ -2 \cdot 15 = -30$$

~~1296 - не подходит~~

если $a-b+15=17$, п.к. $15 > a-b+15 > -25$, то $a-b+15=-17$

$$\begin{cases} a-b=-32 \\ a+b=40 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=4 \\ b=36 \end{matrix} \text{ Проверка: } -32(-32+15)=-1296 \\ p=32 \text{ или } a-b+15=0 \\ p=2 \text{ - не подходит. } a-b=15$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Введём обозначения

1-й ряд	2-й ряд	3-й ряд
a	b	c
d	e	f
g	h	i

Введём названия партей a, d, g - предники

~~b, e, h - задники~~ b, e, h - средники; c, f, i - задники.

Заметим, что в каждой расстановке будет 2 ряда

где сидит 3 человека, и 1 ряд где сидит 2 в.с.

Также заметим, что не возможно как сидит

люди на разных рядах, поэтому можно считать,

что на 1 и 2-ом рядах сидит 3 человека, а на 3-ем сидит 2.

В конце нужно ~~написать~~ ^{написать} who-to-consider ~~написать~~

предположить ряды. ^{написать}

В 1-ом и 2-ом ряду людей можно рассадить следующим

образом, например в 1-ом ряду человек за партией

а ^{напис} ~~then~~ ^{напис} ~~then~~ за b, а за b ~~then~~ ^{напис} ~~then~~ за c т.е. рассадить

их можно только в порядке возрастания $a < b < c$.

А в 3-ем ряду есть 4 сидеть рассадим.

1-й: за i никто не сидит, g ^{напис} ~~then~~ ^{напис} ~~then~~ h.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2-ой: за g человек не сидит, h человек;

3-ий: за h человек не сидит, g человек;

4-ий: за h человек не сидит, g человек;

Поскольку рассадит 10-го человек.

Рассадит за 1-ый раз - выберем человека g -го человек
Рассадит единственного h $C_1^g = \frac{g \cdot 1 \cdot 6}{6} = 56$

Рассадит за 2-ой раз - выберем человека g -го из 5
оставшихся. Рассадит единственного h $C_5^g = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 10$

Рассадит за 3-ий раз - оставшихся 3 человек рассадит h человек.

В первом раз уже будут сидеть 2 человека (3 человека).

Выбором одного человека $C_2^g = \frac{g \cdot 2}{2} = 18$ человек и 10-го

человек - $4, 3, 4 \cdot 18 = 336$. Поскольку в первом раз

первый свободный раз и выберем одного из 3 человек

которые можно рассадит единственного человека $C_3^g =$

$= \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{6} = 10$ оставшихся 3 человек - 1 человек.

Итого: $336 + 10 = 6720$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

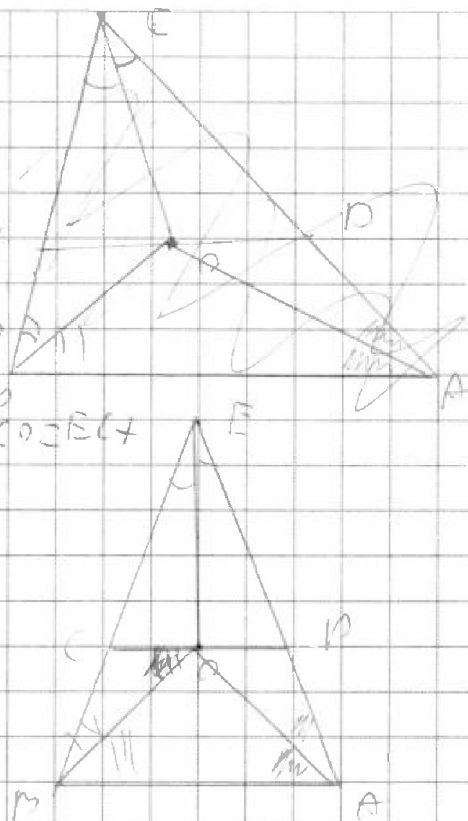
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Зависимость достигается когда
треугольник равнобедрен. т.к. тогда
 $AB \parallel CD$ - следовательно углы $\angle CBA = \angle CAD = \angle CAB$
Значит $CB = CA$ и $ED + DC = EC + CD = EC + CB = EB = 10$.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим граф, где деревья это вершины, а
дуги ребра, т.к. каждая дуга единственна, то
есть вершины смежные, то ≤ 1 ребро. т.е. из двух
ребер нет.

Вершины степени 1 не могут быть смежными
дуги (дуги) т.к. иначе они образуют
компоненту связности которая не смежная с
другими вершинами.

Заметим, что в нашей графе нет циклов иначе
существовали бы вершины в цикле между
которыми 2 пути, т.е. наш граф дерево и в нём
 k вершин, а значит $k-1$ ребро. С другой стороны
есть 4 вершины степени 3, 4, 5, 7 и $k-4$ степени 1.
Значит всего ребер $3+3+5+7+k-4 = 15+k$, но т.к.
граф дерево в нём $k-1$ ребро т.е.

$$\frac{15+k}{2} = k-1 \Rightarrow 15+k = 2k-2 \Rightarrow k = 17.$$



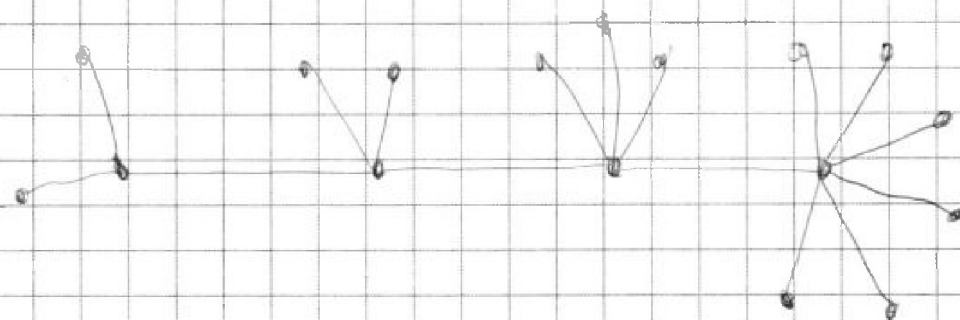
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пример на 17:



Видно, что от удовлетворяет условию и
т.к. от дерева, то для любого 7-го вершин
попарно единичный.

Ответ: 17



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

т.к. x и y целые то выражение $2x+2y-x^2-y^2$ и
 $1-|x+y-2|$ также целые, но каждое из них ≥ 0
т.к. корни нельзя извлечь из отрицательных
чисел. ~~Но~~ каждое выражение также ≤ 1 т.к.
иначе корни из числа больше 1 также больше 1.
~~В~~ ^{то т.к.} каждое из выражений ≥ 0 и тогда
сумма этих двух > 1 , а по условию равна 1.
Тогда каждое из заданных выражений равно 1.
При этом из них равно 1 может быть 0, а второе из них
1.

$$\begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2=0 \\ 1-|x+y-2|=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2(x+y)=x^2+y^2 \\ |x+y-2|=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2=2 \cdot 2=4 \\ x+y=2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= 2-y \\ y^2 + (2-y)^2 &= 4 \end{aligned}$$

$$y^2 - 4y + 4 = 4$$

$$\begin{aligned} y^2 - 4y &= 0 & \Rightarrow & \begin{cases} y=2 \Rightarrow x=0 \\ y=0 \Rightarrow x=2 \end{cases} \end{aligned}$$

Подставляя пары $(2; 0)$ и $(0; 2)$
в первое в правой
уравнение можно заметить
что они подходят.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2=1 \\ 1-|x+y-2|=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+2y=x^2+y^2+1 \\ |x+y-2|=1 \Rightarrow \begin{cases} x+y-2=1 \Rightarrow x+y=3 \\ x+y-2=-1 \Rightarrow x+y=1 \end{cases} \end{cases}$$

1. $x+y=3 \Rightarrow x=3-y$

$$2(x+y)=x^2+y^2+1$$

$$5=(3-y)^2+y^2+1$$

$$5=(3-y)^2+y^2$$

$$2y^2-6y+5=5$$

$$2y^2-6y+4=0$$

$$y^2-3y+2=0$$

$$y=1 \text{ и } x=2$$

$$y=2 \text{ и } x=1$$

или перебором

или

2. $x+y=1 \Rightarrow x=1-y$

$$2(x+y)=x^2+y^2+1$$

$$2=(1-y)^2+y^2+1$$

$$1=(1-y)^2+y^2$$

$$10^{-1}y^2+y^2+1=1$$

$$y^2-y^2=0$$

$$y-y=0$$

$$y=1 \text{ и } x=0$$

$$y=0 \text{ и } x=1$$

$$y=0 \text{ и } x=1$$

или перебором

Ответ: $(2,0); (0,2); (2,1); (1,2); (0,1); (1,0)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper, featuring geometric diagrams and calculations.

Top Left: Calculations involving $9 \cdot 6 - 56$ and 6 . A circled number 1 is present.

Top Right: A diagram of a cone with a circular base and a point F above it. The base is labeled with points A, B, C, D . Calculations include $94 \cdot 42$ and $329 - 110 = 219$.

Middle Left: A diagram of a circle with points A, B, C, D on its circumference. Calculations include $24 \cdot 42$ and $690 + 22$.

Middle Right: A diagram of a cone with a circular base and a point F above it. The base is labeled with points A, B, C, D . Calculations include $9 \cdot 2 = 18$ and 1680 .

Bottom Left: A diagram of a circle with points A, B, C, D on its circumference. Calculations include 1680 and 1680 .

Bottom Right: A diagram of a cone with a circular base and a point F above it. The base is labeled with points A, B, C, D . Calculations include 1680 and 1680 .

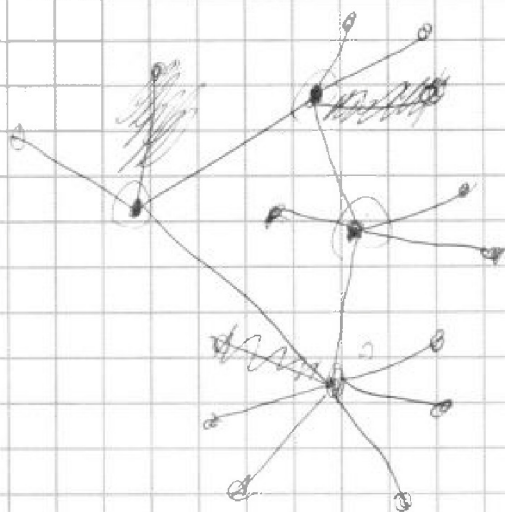


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



177

173

$$K + 4.$$

$$K + 3 = \frac{17 + K}{2}$$

$$17 + 3 = 17 + K$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 2\sqrt{3}x + 4x^2 - 4 = 0$$

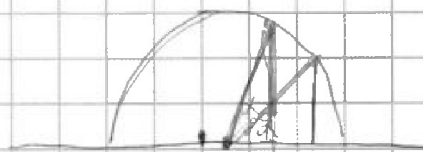
$$\cos 2\alpha$$

$$4t^2 - 4 > 0$$

$$t^2 > 1 > 0$$

$$(t-1)(t+1)$$

$$t \in (-\infty; -1); (1; +\infty)$$



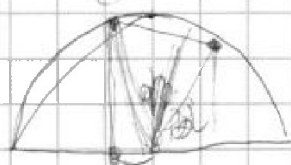
$$\sin -\beta$$
$$\cos -\alpha$$

$$D = 12t^2 - 16t + 16 = 16 - 4t^2$$

$$(a-t)(a+t)$$

$$\frac{-2}{1}$$

$$(\cos \beta - \cos \alpha) + (\sin \beta - \sin \alpha) = a(1 - \cos \alpha)$$



$$a - 9ab + b + 15a - 15b$$

$$(a-b)^2 + 15(a-b)$$

$$(a-b)(a-b+15) = 15a^2$$

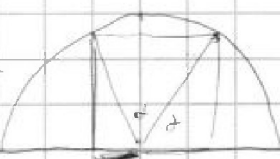
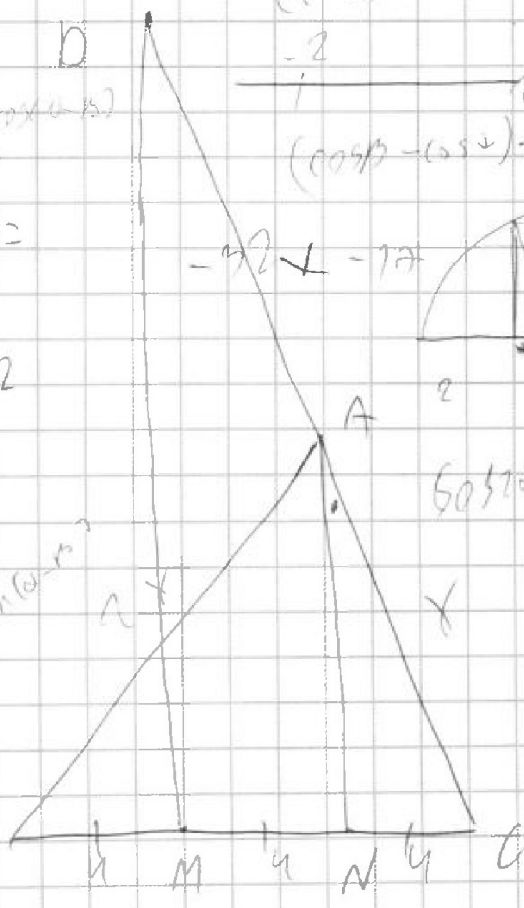
$$a-b=0$$

$$a-b=12$$

$$a-b=34$$

$$a+b=40$$

$$\cos 2\alpha = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$



$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

