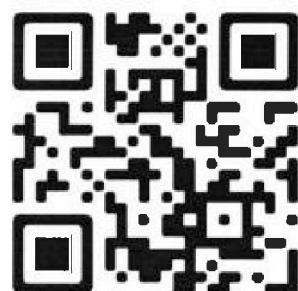




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$ равно $17p^5$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 12$, $\cos(2\angle CEM) = -\frac{1}{4}$.
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наименьшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 10$.
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$$

Задача № 1

1. Уравнение имеет два различных действительных корня $\Rightarrow D > 0$

2. Произведение корней положительно $\Rightarrow$
 $\Rightarrow 4t^2 - 4 > 0$

Решим систему неравенств:

$$\begin{cases} (2\sqrt{3}t)^2 - 4(4t^2 - 4) > 0 \\ 4t^2 - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12t^2 - 16t^2 + 16 > 0 \\ t^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -t^2 + 4 > 0 \\ t^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 > t^2 \\ t^2 > 1 \end{cases} \Rightarrow t^2 \in (1; 4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$$

$$\text{Ответ: } t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$$



1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a \in \mathbb{N}; b \in \mathbb{N}; a+b=40 \\ a^2-2ab+b^2+15a-15b=17p^5, \text{ где } p\text{-простое} \\ \text{(по условию)} \end{cases}$$

Задача № 2

$$a^2-2ab+b^2+15a-15b=(a-b)^2+15(a-b)=(a-b)(a-b+15)$$

Так как 17 -простое и p -простое ~~хотя бы~~ одно из чисел $(a-b)$ или $(a-b+15)$ должно делиться на 17 , и хотя бы одно из этих чисел должно делиться на p .

Предположим, что

$$\begin{cases} a-b = \text{нечётному числу} \\ a+b=40 \end{cases} \text{ сложим}$$

$$2a+b-b=40+\text{нечётное}$$

$$2a = \text{нечётное} \Rightarrow a \notin \mathbb{N}, \text{ значит } a-b = \text{чётному.}$$

Однако, каждое из чисел $(a-b)$ и $(a-b+15)$ может иметь в своём разложении на простые множители или 17^1 или p в степени от 1 до 5 , или единицу. Значит, поскольку $(a-b) = 17^i \cdot p^j$ и $(a-b) = \text{чётному}$ $\Rightarrow p=2$; 2 -единственное чётное простое число.

Тогда:

$$a+b=40; b=40-a$$

$$(a-b)(a-b+15)=17 \cdot 2^5$$

$$(a-40+a)(a-40+a+15)=17 \cdot 32=544$$

$$(2a-40)(2a-25)=544$$

$$4a^2-130a+1000=544$$

$$2a^2-65a+228=0$$

$$D=65^2-4 \cdot 2 \cdot 228=49^2$$

$$a_1 = \frac{65+49}{4} = 57; \quad a+b=40 \Rightarrow b=40-57=-17 \notin \mathbb{N} =$$

$$a_2 = \frac{65-49}{4} = 8; \quad a+b=40 \Rightarrow b=40-8=32=4$$

Ответ: $a=4$; $b=36$.



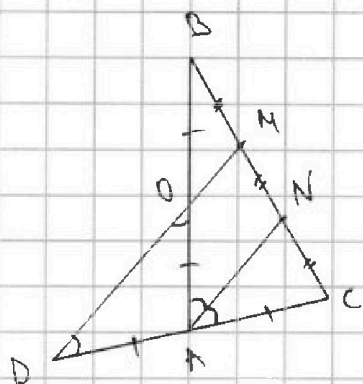
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:

$$BM = MN = NC$$

$$AN \parallel DM$$

$$AB = CD$$

$$BC = 12$$

$$\cos(2\angle CAN) = -\frac{3}{4}$$

Пусть O — точка пересечения DM с BA.

Задача № 3

1. $BM = MN$ и $MO \parallel NA \Rightarrow BO = OA$ (по Th о пропорциональных отрезках)
 $MN = NC$ и $MD \parallel NA \Rightarrow DA = AC$ (по Th о пропорциональных отрезках)
 $BA = DC \Rightarrow BO = OA = DA = AC \Rightarrow \triangle DAO$ — равнобедренный,
 $\triangle DOC$ — прямоугольный (медиана равна половине гипотенузы)
2. $\angle NAC = \angle MDC$ ($NA \parallel MD$)
 $\Rightarrow \angle DOA = \angle ODA = \angle NAC \Rightarrow \angle BAC = 2\angle NAC$ (как внешний угол $\triangle DAO$)
 $\Rightarrow \angle OAN = \angle NAC$ и AN — биссектриса $\angle BAC$.

$$3. \text{ по Th косинусов } BC^2 = BA^2 + \frac{1}{4}AB^2 - 2 \cdot BA \cdot \frac{1}{2}BA \cdot \cos(2\angle NAC)$$

$$BC^2 = (2AC)^2 + AC^2 - 2 \cdot AC \cdot 2AC \cdot \cos(2\angle NAC) \quad (\text{в } \triangle ABC)$$

$$12^2 = 5AC^2$$

$$AC^2 = \frac{2^2 \cdot 6^2}{5} = 24$$

$$AC = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$AB = 2AC = 4\sqrt{6}$$

Ответ: $4\sqrt{6}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

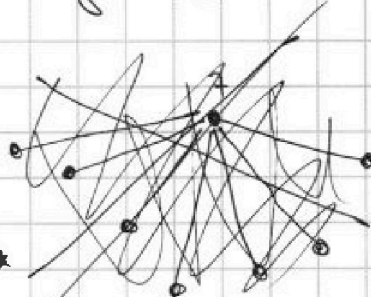
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. Представим деревья вершинами графа, а дороги — рёбрами.
2. Так как из любой деревни можно добраться в любую другую, то граф связный (состоит из одной компоненты связности).
3. Так как из любой деревни до другой можно добраться единственным образом, то граф не имеет циклов.

4. Связный граф без циклов — дерево.

5. ~~Подвешим граф за вершину степени 1.~~

Заметим, что две вершины степени 1 не могут быть соединены рёбрами, так как граф станет несвязным. $\Rightarrow$ каждая вершина степени 1 присоединена к вершине степени 3, 4, 5 или 7.



6. Теперь каждая из вершин степени 3, 4, 5, 7 присоединена к какой-то вершине степени ≥ 3 . ~~Или как выходит не более $2+3+4+7$ рёбер. Степень 1. Из вершин степени 7 выходит ровно 7 вершин, а из 4 — 4 вершин. Так же между вершинами степени которых ≥ 3 проведено не более 3 рёбер, если меньше, то из какой-то вершины нельзя добраться в другую (пусть проведено меньше трёх рёбер, тогда они содержат не больше 3 вершин, а их 4). $\Rightarrow$ Количество вершин степени 1 не больше. Если больше, то образуется цикл. $\Rightarrow$ Кол-во рёбер вершин степени 1 равно $2+3+4+7-3=13$. А всего вершин $13+4=17$ (13 степени 1 и ещё со степенями 3, 4, 5, 7).~~

~~Решение 12~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1



2



3



4



5



6



7



СТРАНИЦА

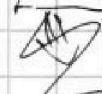
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5. Подвесим граф за вершину степени 7.

Заметим, что каждая вершина со степенью 3, 4, 5 соединена хотя бы с одной вершиной степени, которая больше 4. Тогда в этом дереве $3+3+3+4$ ребер $\rightarrow 3+3+3+4+1$ вершин

В дереве с n ребрами $n+1$ вершинами
(Трибунальный факт из теории графов)



Ответ: 17.

В нашем графе 17 вершин

Всего ~~высчитаем~~ ребер в графе $3+4+5+7$.
Заметим, что некоторые ребра посчитали дважды, те что между вершинами степени > 1 . Их ровно 3 (если меньше, то несвязность, если больше, то цикл). Значит в нашем дереве $3+4+5+7-3=16$ ребер.

Ответ: 17.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x+y-2|} = 1$$

Задача № 7

~~ANS: 22 (x=1)~~

$\sqrt{n} \geq 0$ Корень не может принимать отрицательные значения $\Rightarrow$

$$1 \geq \sqrt{2x+2y-x^2-y^2} \geq 0 \Rightarrow 1 \geq 2x+2y-x^2-y^2 \geq 0$$

Но, так как x и y целые числа, то складывая целые числа мы можем получить только целое число $\Rightarrow$ возможны лишь два случая

$$1. 2x+2y-x^2-y^2=0 \Rightarrow 1-|x+y-2|=1$$

$$\begin{cases} x+y \geq 2 \\ x+y=2 \\ 2(x+y)=x^2+y^2 \\ x \in \mathbb{Z} \\ y \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2=4 \\ x \in \mathbb{Z} \\ y \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \\ y=0 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y < 2 \\ x+y=2 \\ 2(x+y)=x^2+y^2 \\ x \in \mathbb{Z}; y \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad ! - \quad \emptyset$$

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 2(x+y)=x^2+y^2 \\ x \in \mathbb{Z}; y \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

$$2. 2x+2y-x^2-y^2=1 \Rightarrow 1-|x+y-2|=0$$

$$\begin{cases} x+y \geq 2 \\ x+y=3 \\ 2(x+y)=x^2+y^2+1 \\ x \in \mathbb{Z}; y \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 6=x^2+y^2+1 \\ x \in \mathbb{Z} \\ y \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset$$

$$\begin{cases} x+y < 2 \\ x+y=1 \\ 2(x+y)=x^2+y^2+1 \\ x \in \mathbb{Z}; y \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2=1 \\ x \in \mathbb{Z}; y \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ x=2 \\ y=1 \\ x=0 \\ y=1 \\ x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

Проверка: $(0;2): \sqrt{4-4} + \sqrt{1-|2-2|} = 1$ (вер.)

$(2;0): \sqrt{4-4} + \sqrt{1-|2-2|} = 1$ (вер.)

~~$(1;1): \sqrt{4-4} + \sqrt{1-|2-2|} = 1$~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(0; 1) : \sqrt{2-1} + \sqrt{1+|1-2|} = 1 \text{ (вер.)}$$

$$(1; 0) : \sqrt{2-1} + \sqrt{1-|1-2|} = 1 \text{ (вер.)}$$

$$(2; 1) : \sqrt{4+1-4-1} + \sqrt{1-|2+1-2|} = 1 \text{ (вер.)}$$

$$(1; 2) : \sqrt{1+4-1-4} + \sqrt{1-|1+2-2|} = 1 \text{ (вер.)}$$

Ответ: $(0; 1); (1; 0); (0; 2); (2; 0); (1; 2); (2; 1)$.

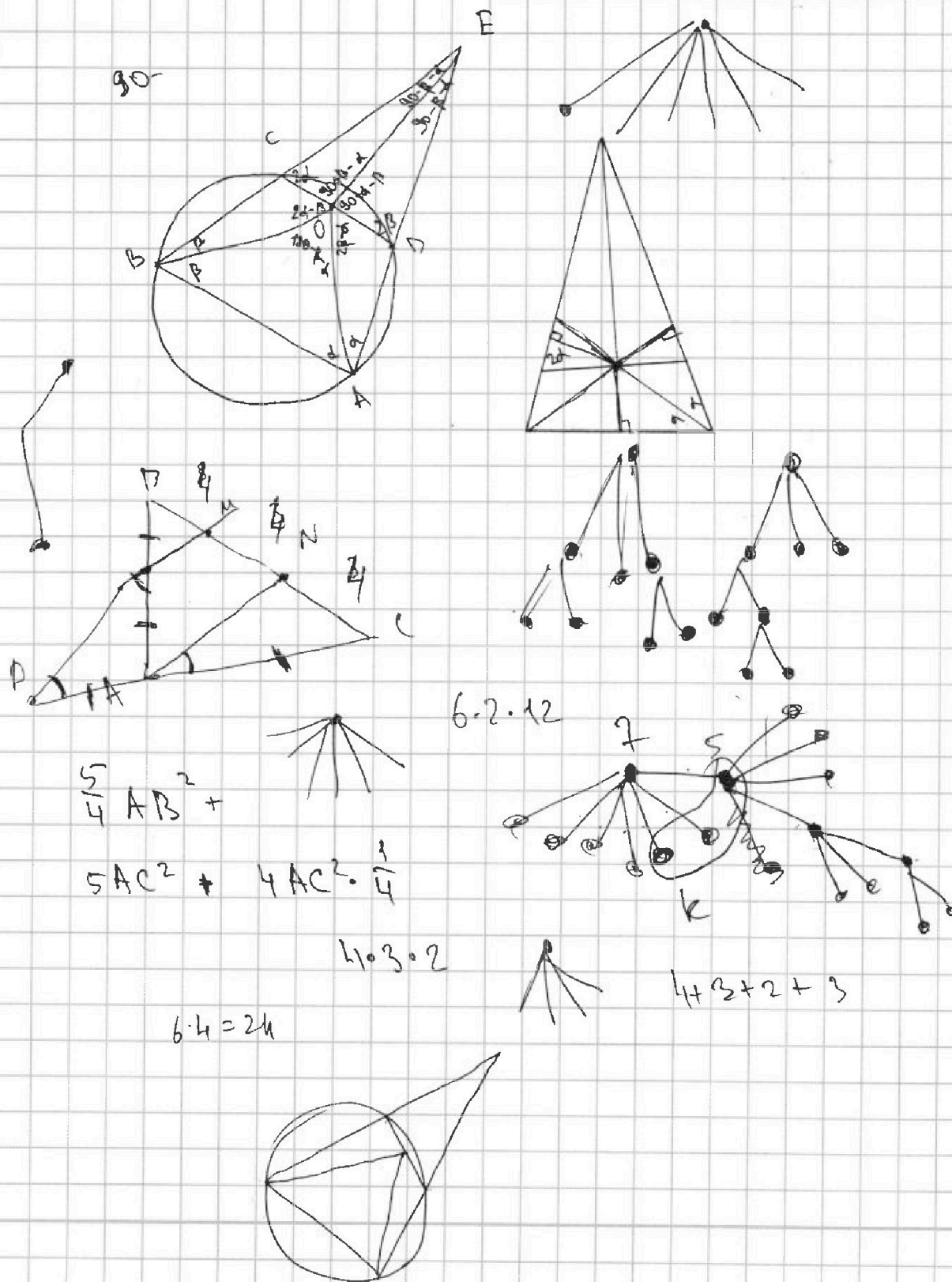


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2}$$

$$2x+2y-x^2-y^2 \geq 0$$

$$(1-x)^2 + (1-y)^2 \geq 0$$

$$2 \geq -2x+2y+x^2+y^2+2$$

$$2 \geq (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0$$

$$1 = |x+y-2| \geq 0$$

$$1 - x + y + 2$$

$$3 - x - y \geq 0$$

$$3 \geq x+y$$

$$x \leq 2$$

$$1 + x + y - 2 \geq 0$$

$$x+y \geq 1$$

$$x=1 \quad y=1$$

$$2 - x^2 - y^2$$

$$x=0$$

$$y=1$$

$$1 > 1 - |x+y-2| \geq 0$$

$$\sqrt{x} = \frac{m}{n} \quad \frac{m^2}{n^2} = x$$

$$x+y-2=0$$

$$x+y=2$$

$$x+y-2=1$$

$$x+y=3$$

$$x+y-2=-1$$

$$x+y=1$$

$$3 \geq x+y \geq 2$$

$$1 \leq x+y \leq 2$$

$$x^2 - y^2 + 2x + 2y = 0$$

$$6 - x^2 - y^2$$

$$x=\frac{1}{2} \quad y=\frac{1}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos(\angle CAN) = -\frac{1}{4}$$

$$x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4$$

~~4.8.13~~

$$(2\sqrt{3}t)^2 - 4(4t^2 - 4) > 0$$

$$12t^2 - 16t^2 + 16 > 0$$

$$-4t^2 + 16 > 0$$

$$-t^2 + 4 > 0$$

$$4 > t^2 > 0$$

$$t \in [0; 2) \cup [0; -2)$$

$$4t^2 = 4 > 0$$

$$t^2 - 1 > 0$$

$$t^2 > 1$$

$$a, b \quad a+b=40$$

$$(a-b)^2 + 15(a-b)$$

$$(a-b)^2 + 15(a-b)$$

$$(a-b)(a-b+15) = 17p^5$$

$$a-b=17$$

$$a-b=17$$

$$a+b=40$$

$$2a=$$

$$228 \mid 2$$

$$114 \mid 2$$

$$57 \mid 1$$

$$88 \mid 1$$

$$49 \mid 1$$

$$149 \mid 1$$

$$441 \mid 1$$

$$196 \mid 1$$

$$2401$$

$$p=2$$

$$-10$$

$$4225$$

$$-1824$$

$$2401$$

$$-32 \mid 32$$

$$-15$$

$$17$$

$$32 \cdot 17$$

$$1$$

$$32$$

$$17$$

$$224$$

$$32$$

$$544$$

$$D$$

$$65 = x_1 + x_2$$

$$26$$

$$228$$

$$8$$

$$1824$$

$$65$$

$$65$$

$$325$$

$$390$$

$$4225$$

$$p=2$$

$$228 \mid 2$$

$$a-b=17$$

$$a+b=40$$

$$1$$

$$65$$

$$+49$$

$$11457$$

$$-500 - 800$$

$$-1300$$

$$65$$

$$2$$

$$25$$

$$40$$

$$1000$$

$$-101010$$

$$1000$$

$$544$$

$$456 \mid 2$$

$$4$$

$$-4$$

$$228$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☐☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

○ ○ ○

○ ○ ○

✓ ○ ✓ ○ ✓ ○

$$180 - 90 + \beta + \alpha - 2\beta$$
$$180 - 180 + 2\beta - \alpha$$
$$90 + \alpha - \beta$$

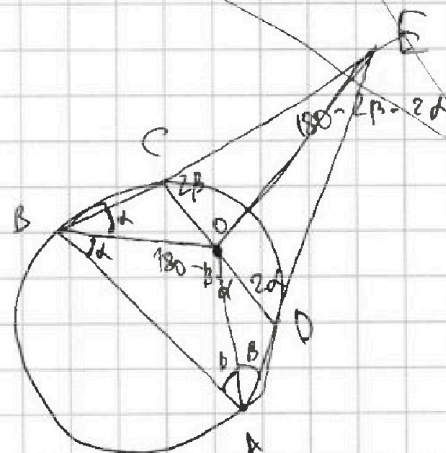
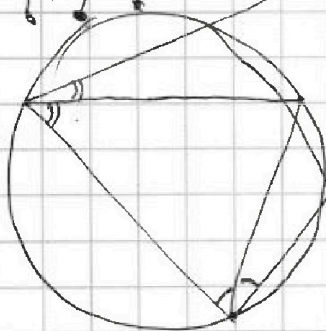
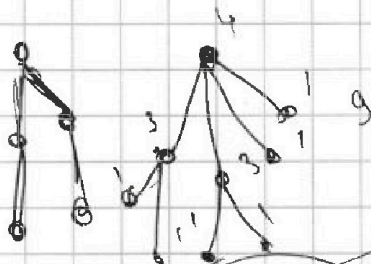
$$90 + \beta - \alpha + 2\alpha - \beta$$
$$90 + \alpha$$

$$\frac{BE}{\sin(90+\alpha)} = \frac{DE}{\sin(\beta)}$$

$$\frac{DE}{\sin(\alpha)} = \frac{AE}{\sin(90+\beta)}$$

$$\frac{BE}{\sin(90+\alpha)} = \frac{\sin(\alpha) \cdot AE}{\sin(90+\beta) \cdot \sin(\beta)}$$

$$6 + 4 + 16 \quad A$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черпунком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

