



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{14}7^{13}$, bc делится на $3^{19}7^{17}$, ac делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC = 1$ и $BC = 25$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$5x - y = 3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .

МОТОЦИКЛИСТА

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX = \sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD : DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Реш

Реш

Пусть $a = 3^{a_1} \cdot 7^{a_2} \cdot a_3$, $b = 3^{b_1} \cdot 7^{b_2} \cdot b_3$, $c = 3^{c_1} \cdot 7^{c_2} \cdot c_3$, где $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$

целые ~~и~~ конструктивные числа, a_3, b_3, c_3 не кратны 3 и 7, равны 0.

По условию задачи:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 \geq 14, \\ a_1 + c_1 \geq 23, \\ b_1 + c_1 \geq 19, \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(a_1 + b_1 + c_1) \geq 56 \Rightarrow a_1 + b_1 + c_1 \geq 28.$$

$$\begin{cases} a_2 + c_2 \geq 42 \Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 \geq 42. \\ abc = a_3 b_3 c_3 \cdot 3^{a_1 + b_1 + c_1} \cdot 7^{a_2 + b_2 + c_2} \geq 3^{28} \cdot 7^{42} \end{cases}$$

По условию задачи:

$$a_2 + c_2 \geq 42 \Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 \geq 42.$$

$$abc = a_3 b_3 c_3 \cdot 3^{a_1 + b_1 + c_1} \cdot 7^{a_2 + b_2 + c_2} \geq 3^{28} \cdot 7^{42}$$

$$\text{Пусть } a = 3^9 \cdot 7^{13}, b = 3^5, c = 3^{14} \cdot 7^{28}, abc = 3^{28} \cdot 7^{42}, ab = (3^{14} \cdot 7^{13}) : 3^{11} \cdot 7^{13}, bc = (3^{19} \cdot 7^{28}) : 3^{11} \cdot 7^{13}, ac = (3^{23} \cdot 7^{42}) : 3^{23} \cdot 7^{42}. \text{ А-но, при таких } a, b, c \text{ выполняется условие.}$$

$$\text{Ответ: } 3^{28} \cdot 7^{42}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{3}$

Пусть: $a = 3x^2 + x + 1$, $b = 5 - 6x$.

Тогда $\sqrt{5x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = \sqrt{a - b} - \sqrt{a} = b$;

$\sqrt{a - b} = \sqrt{a} + b$;

$a - b = a + b^2 + 2b\sqrt{a}$; $b^2 + b + 2b\sqrt{a}$;

$b = 0$;

$b^2 + 2b\sqrt{a} + 1 = 0$;

$b = 0$;

$6x - 6 = 2\sqrt{3x^2 + x + 1}$;

$6 - 6x = 0$;

$9x^2 + 9 - 12x = 3x^2 + x + 1$;

$x = \frac{5}{6}$;

$6x^2 + 9 - 12x = 0$;

$x = \frac{5}{6}$;

$x = \frac{1}{2}$;

$x = \frac{8}{3}$.

Ответ: $\left\{\frac{5}{6}, \frac{1}{2}, \frac{8}{3}\right\}$.

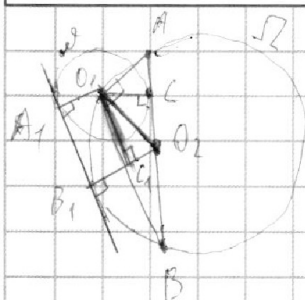
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Реш.

Пусть O_1 - центр ω , O_2 - центр Ω .

$\angle AO_1B = 90^\circ$ - т.к. окружности касаются

$O_1C \perp AB$ - радиус в точку касания.

А-ко, O_1C - высота прямоугольного $\triangle AO_1B$, проведенная к гипотену-
зе. А-ко, $O_1C = \sqrt{AO_1 \cdot BO_1} = 5$.

Пусть A_1, B_1 - точки касания окружностей ω и Ω соответственно.

Пусть C_1 - ортоцентр треугольника AO_1B_1 .

$O_1O_2 = O_1B_1 = \frac{AB}{2} = 8$ - радиусы Ω .

$O_1A_1 = O_1C = 5$ - радиусы ω .

$O_1A_1 \perp A_1B_1$, $O_2B_1 \perp A_1B_1$ - радиусы в точку касания.

В прямоугольнике $O_1A_1B_1C_1$ при $\angle A_1 = 90^\circ$ - прямом, А-ко O_1A_1, B_1C_1 - противо-
положные. А-ко $O_1C_1 = A_1B_1$, $B_1C_1 = O_1A_1 = 5$.

$O_2C_1 = O_2B_1 - B_1C_1 = 3$.

$A_1B_1 = O_1C_1 = \sqrt{8^2 - 3^2} = \sqrt{55}$.

Ответ: $\sqrt{55}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ДР

Пусть v_{12} - скорость велосипедиста, v_{22} - скорость мотоциклиста, S - путь от А до В, $v_1 \neq v_2$, $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$, $S \neq 0$, $v_1 < v_2$

Тогда, по условию:

$$\begin{cases} \frac{S}{v_1} = \frac{S}{v_2} + 1, (1) \\ \frac{v_1 S}{v_2} = \frac{v_2 S}{v_1} - 49, (2) \\ \frac{S}{v_1 + 7} = \frac{S}{v_2 + 7} + 0,6. (3) \end{cases}$$

$$(1) \frac{S}{v_1} = \frac{S}{v_2} + 1 \Rightarrow S v_2 = S v_1 + v_1 v_2 \Rightarrow S = \frac{v_1 v_2}{v_2 - v_1}$$

$$(2) \frac{v_1 S}{v_2} = \frac{v_2 S}{v_1} - 49 \Rightarrow v_1^2 S = v_2^2 S - 49 v_1 v_2 \Rightarrow S = \frac{49 v_1 v_2}{(v_2 - v_1)(v_2 + v_1)}$$

$$(3) \frac{S}{v_1 + 7} = \frac{S}{v_2 + 7} + 0,6 \Rightarrow S v_2 + 7 S = S v_1 + 7 S + 0,6 v_1 v_2 + 0,6 v_1 v_2 + 4,2(v_1 + v_2) \Rightarrow \frac{5 v_1 v_2 + 21(v_1 + v_2) + 147}{5(v_2 - v_1)}$$

$$S = \frac{v_1 v_2}{v_2 - v_1} = \frac{49 v_1 v_2}{(v_2 - v_1)(v_2 + v_1)} = \frac{3 v_1 v_2 + 21(v_1 + v_2) + 147}{5(v_2 - v_1)} \Rightarrow v_1 v_2 = 49 \frac{v_1 + v_2}{v_2 - v_1} = \frac{3 v_1 v_2 + 21(v_1 + v_2) + 147}{5}$$

$$v_1 v_2 = \frac{49 v_1 v_2}{v_2 - v_1} \Rightarrow v_1 + v_2 = 49.$$

$$v_1 \cdot v_2 = \frac{3 v_1 v_2 + 21(v_1 + v_2) + 147}{5} \Rightarrow 2 v_1 v_2 = 21 \cdot 49 + 147 = 1176 \Rightarrow v_1 v_2 = 588$$

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = 49, \\ v_1 v_2 = 588. \end{cases}$$

По теореме Виета, v_1, v_2 - корни уравнения $x^2 - 49x + 588 = 0$

т.к. $v_1 < v_2$, то $v_1 = 21$, $v_2 = 28$.

$$S = \frac{v_1 v_2}{v_2 - v_1} = \frac{588}{7} = 84.$$

Ответ: 84 км.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$EX = \sqrt{FX^2 + EF^2} = 2r, \omega = \omega_0, YX = r\sqrt{2}$$

$$EY \cdot YD = YX \cdot XF \text{ — по сл. подобиям,}$$

$$EY \cdot YD / (YD + ED) = r\sqrt{2} \cdot 2r\sqrt{2};$$

$$YD^2 + YD \cdot ED = 4r^2$$

$$ED = \frac{-YD^2 + 4r^2}{YD}$$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{YD}{ED} = \frac{YD^2}{-YD^2 + 4r^2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



v_1 v_2

$$\frac{S}{v_1} = \frac{S}{v_2} + 1$$

$$\frac{49v_1^2}{v_2^2 - v_1^2} = \frac{49v_2^2}{v_2^2 - v_1^2} + 1$$

$$49 + \frac{v_1 S}{v_2} = \frac{S v_2}{v_1}$$

$$49v_2 = 49v_1 + v_2^2 - v_1^2$$

$$v_1(49 - v_1) =$$

$$\frac{S}{v_1 + 7} = \frac{S}{v_2 + 7} + 0,6$$

$$\frac{36}{60} = \frac{6}{10}$$

$$49v_1^2 + v_2^2 = S(v_2 - v_1)$$

$$49v_1^2 + S v_1^2 = S v_2^2 + 0,6 \cdot 49v_2^2 / (v_2 + v_1) + 7$$

$$v_2^2 - 49v_2 - v_1^2 + 49v_1 = 0$$

$$\frac{49v_1 v_2}{v_1 v_2 - v_1^2} = \frac{49v_1 v_2}{v_2^2 - v_1 v_2} + 1$$

$$49^2 + 4v_1^2 - 49v_1(49 - 2v_1) =$$

$$49 \pm (49 - 2v_1) \cdot v_1 \cdot v_2 \cdot 0,6$$

$$\frac{49v_1 v_2^2 / (v_2 - v_1)}{49v_2} = \frac{49v_1}{v_2 - v_1} + 1$$

$$S v_2 + 7S = S v_2 + 7S + 0,6$$

$$S = 20 + 0,6 \cdot 49 = 29,94$$

$$49v_2 = 49v_1 + v_2^2 - v_1^2$$

$$48v_2 = 46v_1 + 126$$

$$S = \frac{49(v_1 - v_2)}{v_1 - 49v_1} = \frac{2v_1 - 49}{v_1 - 49v_1}$$

$$\frac{v_1 v_2}{(v_1 + 7)(v_1 - 7)}$$

$$\frac{49v_1 - v_1^2}{(v_1 + 7)(2v_1 - 49)} = \frac{49v_1 - v_1^2}{(v_2 + 7)(2v_1 - 49)} \neq 0,6$$

$$v_1(49 - v_1)(154 - v_1) = v_1(49 - v_1)(v_1 + 7) + 0,6(v_1 + 7)(154 - v_1)(2v_1 - 49)$$

$$v_1^2 - 49v_1 + 2Sv_1 - 49S = 0$$

$$48^2 - 8 \cdot 49S$$



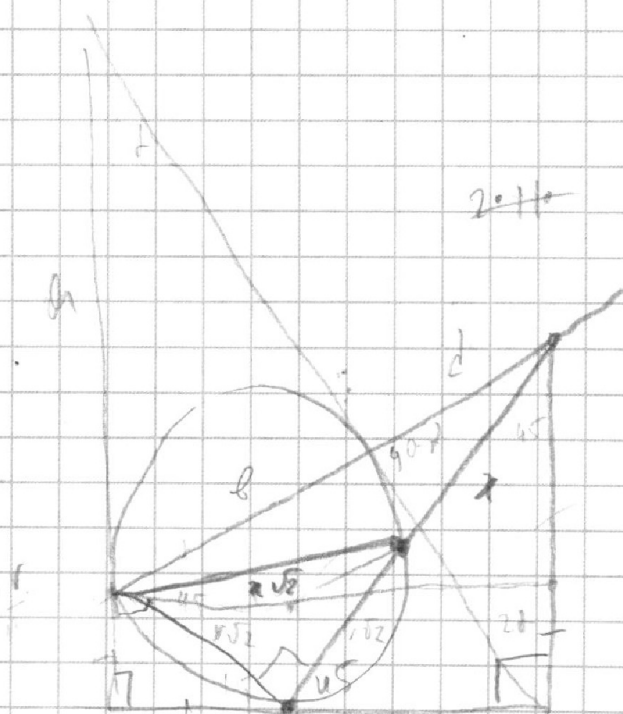
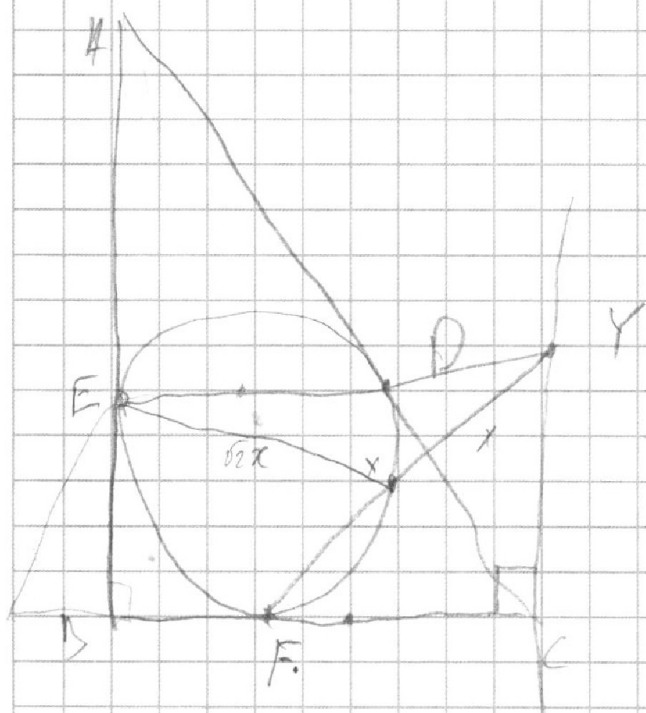
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$d^2 + b^2 =$$

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{b}$$

$$t/(t+d)$$

$$\frac{2r^2 + 2x^2 - 4rx\sqrt{2}}{\sqrt{2}(x^2 + 2r\sqrt{2})} = x$$

$$\frac{11}{20} = \frac{r}{11}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

[illegible]

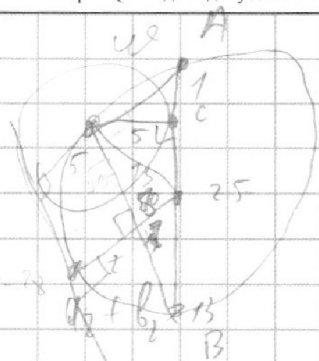
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a = 3 \cdot a_1 \cdot a_2$$

$$2a + 1 = 10a + 1 \Rightarrow 9a = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$a + 10a + 1 = 11a + 1 = 14$$

$$a^2 - 9ab + b^2 - a - b = 0 \Rightarrow b_1 + c_1 = 19$$

$$a_1 - b_1 = 4$$

$$b_2 + c_2 = 17$$

$$a_2 - b_2 = 25$$

$$a_1 + c_1 = 23$$

$$2a_1 = 18 \Rightarrow a_1 = 9$$

$$a_2 - c_2 = 42$$

$$a_2 = 18$$

$$a_2 = 21$$

$$a_1 = 9, b_1 = 5$$

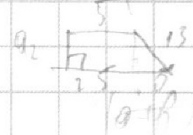
$$a_1, b_1, c_1, a_2 \geq 59$$

$$b_2 = 12$$

$$c_1 = 14$$

$$a_1 + c_1 = 23$$

$$a_2 + c_2 = 42$$



$$a_2 + c_2 = 42$$

$$a_2 + c_2 = 42$$

$$a_2 + c_2 = 42$$

$$a_2 + c_2 = 42$$

$$a_2 + c_2 = 42$$

$$a_2 + c_2 = 42$$

$$a_2 + c_2 = 42$$

$$a_2 + c_2 = 42$$

$$a_2 + c_2 = 42$$

$$a^2 - 9ab + b^2 - a - b = 0$$

$$a^2 - 9ab + b^2 - a - b = 0$$

$$3a^2 - 9a + b^2$$

$$a + b - a = 105$$

$$b = 4a - 5$$

$$3a^2 + 6a - 5$$

$$3a^2 + 6a + 5 + 11 = 18$$

$$a = 3a^2 + 6a + 1$$

$$b = 5 - 6a \Rightarrow b^2 - 2a + b = -20a - ab$$

$$a + b = a^2 + b^2 + 185a$$

$$b^2 + 2b + 1 = 0$$

$$b + 2b + 1 = 0$$

$$a - b + \sqrt{a^2 - b^2} = b$$

$$b^2 = a - b + \sqrt{a^2 - b^2} \Rightarrow a - b = b^2 - \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$b^2 + b - 2a = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$b^2 + b^2 + 4a^2 + 2b^2 - 4ab^2 - 4ab = a^2 - ab$$

$$b^2 + 2b + 4ab^2 + 9a + b^2 - 3ab = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

§2

П.к. дробь $\frac{a}{b}$ несократима, то $\text{НОД}(a, b) = 1$.

П.к. мы хотим найти наибольший m , при котором $\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$ числителем
наименее $\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$ можно сократить на m , то $m = \text{НОД}(a+b, a^2-9ab+b^2)$.

П.к. $(a+b) : m$, $\text{НОД}(a, b) = 1$, то $\text{НОД}(a, m) = 1$, $\text{НОД}(b, m) = 1$.

П.к. $(a+b) : m$, $(a^2-9ab+b^2) : m$, то $(a^2-9ab+b^2 - (a+b)) : m$

$$a^2-9ab+b^2 - (a+b) = a^2-10ab+b^2 = a(a-10b).$$

П.к. $\text{НОД}(a, m) = 1$, то $(a-10b) : m$.

П.к. $(a+b) : m$, $(a-10b) : m$, то $(a+b) - (a-10b) : m$

$$(a+b) - (a-10b) = 11b.$$

П.к. $\text{НОД}(b, m) = 1$, то $11 : m$. А-ко, $m \leq 11$.

Таким же, если $a+b = 11k$, $k \in \mathbb{Z}$, то дробь $\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2} = \frac{11k}{a^2-9(11k-a)+11k-b^2} =$
 $= \frac{11k}{11a^2-99k+11b^2-11ak} = \frac{11k}{11(a^2-9k+11b^2-10ak)}$ сократим на 11.

Ответ: 11.

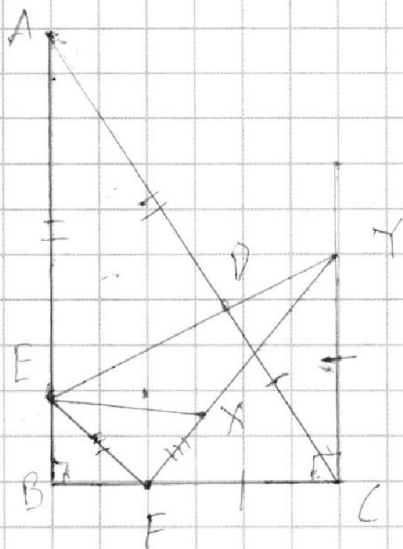
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



7
7

Пусть $AD = a$, $\angle X Y = x$, r - радиус ω , $CP = c$
 $EX = r\sqrt{2}$ - по условию.

$EB = BF = r$ - по св-ву радиуса касательного кр-ка.

~~так~~ $AE = a$, $CF = c$ - по св-ву касательной

Из $\triangle AED \sim \triangle CYD$ - тк $YC \parallel AE$

$$\text{по кр. } \frac{ED}{DA} = \frac{YC}{AE} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{YC}{a} \Rightarrow YC = a$$

по кр., $YC = FC = c$. по кр., $\triangle YCF$ - прямоугольный и равнобедренный

по кр., $\angle YFC = 45^\circ$

$\angle FEY = \angle CFY = 45^\circ$ - угол между кас. и хордой

$\angle FEB = 45^\circ$, тк $\triangle EBF$ - прямоугольный равнобедренный.

$$\angle EFY = 180^\circ - \angle BFE - \angle YFC = 90^\circ$$

по кр. $\triangle EFY$ - прямоугольный равнобедренный.

$$XF = EF = \sqrt{EB^2 + BF^2} = r\sqrt{2}.$$