



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 12



1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $5^{360} \cdot 7^{90}$?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 3) - x(11y - 34) + 32y - 101 = 0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC . Прямые ED и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что площадь треугольника BCF в 25 раз больше площади треугольника DGF .

5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = -x^5 + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = 2x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа a , b и c не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения abc .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность ω , а на дуге AC , не содержащей точку B , взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F . На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = CF$ и $CY = AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF = 19$, $XY = 36$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$a = x^3 - 9, \quad b = x^2 - 1 \Rightarrow |x^3 - 9| + |x^2 - 1| = |a| + |b|$$
$$|x^3 - x^2 - 8| = |a - b| \Rightarrow |a| + |b| \leq |a - b|$$

1) $a \geq 0, b \geq 0$

I) $a \geq b$.

$$a + b \leq a - b$$

$$2b \leq 0 \Rightarrow b = 0.$$

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1, \text{ но тогда } a < 0.$$

II) $a < b$.

$$a + b \leq b - a$$

$$2a \leq 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{9}$$

$$(\sqrt[3]{9})^2 - 1 \geq 0$$

$$\sqrt[3]{81} \geq 1.$$

$$81 \geq 1, \text{ значит } x = \sqrt[3]{9}, \text{ подходит}$$

2) $a \geq 0, b < 0$

$$a - b \leq a - b \quad (a - b \geq 0)$$

Но если $b < 0$, то $x^2 < 1 \Rightarrow x \in (-1; 1) \Rightarrow x^3 - 9 < 0$
 $\downarrow$
 $a < 0$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение задачи 1.

3) $a < 0, b \geq 0$.

$$-a + b \leq b - a.$$

Если $a < 0 \Rightarrow x^3 - a < 0 \Rightarrow x < \sqrt[3]{a}$, но т.к.

$$b \geq 0 \Rightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x \in [1; +\infty) \cup (-\infty; -1]. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < \sqrt[3]{a} \\ x \in [1; +\infty) \cup (-\infty; -1] \end{cases} \Rightarrow x \in [1; \sqrt[3]{a}) \cup (-\infty; -1]$$

4) $a < 0, b < 0$.

$$\text{I) } a \leq b.$$

$$-a - b \leq b - a.$$

$$-2b \leq 0, \text{ но } b < 0.$$

II) $a > b$.

$$-a - b \not\leq a - b$$

$$-2a \leq 0, \text{ но } a < 0.$$

$$\text{Ответ: } x \in [1; \sqrt[3]{a}] \cup (-\infty; -1]$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

a, b, c

Т.к. это геометрическая прогрессия, то

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow c = \frac{b^2}{a}.$$

$$abc = a \cdot b \cdot \frac{b^2}{a} = b^3 = 5^{360} \cdot 7^{90} \Rightarrow b = 5^{120} \cdot 7^{30}$$

Т.к. c - натур., то $b^2 : a \Rightarrow a = 5^p \cdot 7^q$, где

$$0 \leq p \leq 240, \quad 0 \leq q \leq 60. \Rightarrow \text{значит есть}$$

241 вариант для p и 61 вариант для q .

Ответ: $241 \cdot 61$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$t = y - 3$$

$$1) t \neq 0$$

$$x^2 t - x(11t - 1) + (32t - 5) = 0$$

$$\begin{aligned} D &= 121t^2 - 22t + 1 - 4t(32t - 5) = \\ &= 121t^2 - 22t + 1 - 128t^2 + 20t = -7t^2 - 2t + 1 \end{aligned}$$

~~Решение~~

Т.к. такое x существует $\Rightarrow D \geq 0 \Rightarrow -7t^2 - 2t + 1 \geq 0$.

$-7t^2 - 2t + 1 \geq 0$ (t лежит между корнями,

$$D = 4 + 4 \cdot 7 = 4 \cdot 8 = 32. \quad \text{Т.к. параболы выпуклая ветвь (или вниз)}$$

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm 4\sqrt{2}}{-14} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{-7} = -\frac{1 \pm \sqrt{2}}{7}$$

Т.к. y — целое, то и t — целое.

$$\frac{1 + \sqrt{2}}{7} > -1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1 + \sqrt{2}}{7} < 1$$

$$\sqrt{2} < 6.$$

$$-\frac{1 - \sqrt{2}}{7} < 1$$

$$\frac{1 - \sqrt{2}}{7} > -1 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} > -7 \Leftrightarrow \sqrt{2} < 8$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Значит, $-1 < t < 1 \Rightarrow$ и t - целое $\Rightarrow t=0$, но

этот случай мы не рассматриваем.

2) $t=0$

$$x-5=0 \Rightarrow x=5$$

Ответ: $(x=5; y=3)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

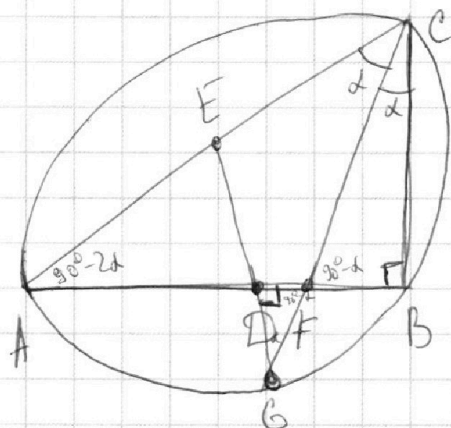
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4



Так как биссектриса
пересекает описанную
окружность, в той
же точке, что пересе-
кается с серединным

перпендикуляром, то ED — с. пер. к $AB \Rightarrow$
 $\Rightarrow ED \perp AB$, т.к. ED — средний перпендикул.
 $ED \parallel CB \Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$. Пусть, $\angle ACF = \alpha$, тогда
 $\angle CAB = 90^\circ - 2\alpha$. Т.к. $ED \perp AB$, то $\angle$

$\angle GDB = 90^\circ$. $\angle CFB = \angle DFB = 90^\circ - \alpha$

$\triangle GDF \sim \triangle CBF \Rightarrow BF = k \cdot FD$ (где k — коэффи-
циент подобия) $\frac{S_{\triangle CBF}}{S_{\triangle GDF}} = k^2$ (по условию) $\Rightarrow$

$\Rightarrow k = 5 \Rightarrow BF = 5FD$. $AF = AD + DF = BD + DF =$
 $= DF + FB + DF = 7FD$.

$$\frac{AF}{\sin \alpha} = \frac{CF}{\sin(90^\circ - 2\alpha)} = \frac{CF}{\cos 2\alpha} \Rightarrow AF = \frac{CF \cdot \sin \alpha}{\cos 2\alpha}$$

$$\frac{FB}{\sin \alpha} = \frac{CF}{\sin 90^\circ} \Rightarrow FB = CF \cdot \sin \alpha$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{AF}{FB} = \frac{\frac{CF \cdot \sin d}{\cos 2\alpha}}{CF \cdot \sin d} = \frac{1}{\cos 2\alpha} = \frac{7DF}{5DF} = \frac{7}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{5}{7} \Rightarrow \text{т.к. } \cos 2\alpha > 0, \text{ и } \alpha < 90^\circ$$

$$\Rightarrow 2\alpha < 180^\circ, \text{ то } 2\alpha = \arccos \frac{5}{7}$$

$$\text{Ответ: } \angle ABC = 90^\circ, \angle ACB = \arccos \frac{5}{7},$$

$$\angle CAB = 90^\circ - \arccos \frac{5}{7}$$

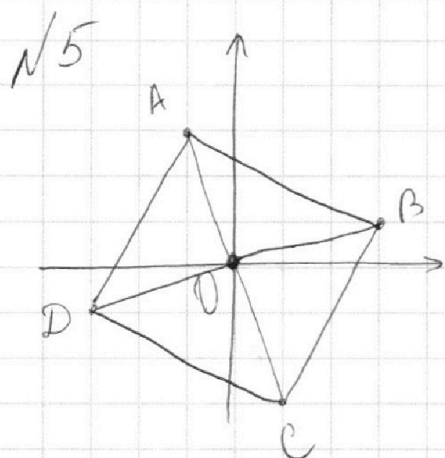
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $A(p; q)$, тогда C
как центрально противополо-
жная имеет координаты $C(-p; -q)$
Аналогично $B(k; l)$ и $D(-k; -l)$
(если $p < 0$ или $k < 0$, то переобозначим точки)

1) AC на $y = 2x$, т.к. $AC \perp BD$, то BD на
 $y = -\frac{1}{2}x$

$$q = 2p, \quad l = -\frac{1}{2}k$$

$y = -x^5 + ax$
подставляем A

$$q = -p^5 + ap$$

$$2p = -p^5 + ap$$

$$2 = -p^4 + a$$

$$p^4 = a - 2$$

$y = -x^5 + ax$
подставляем B

$$l = -k^5 + ak$$

$$-\frac{1}{2}k = -k^5 + ak$$

$$-\frac{1}{2} = -k^4 + a$$

$$k^4 = a + \frac{1}{2}$$

т.к. $ABCD$ — квадрат, то $AC^2 = BD^2$

$$AC^2 = 4p^2 + 4q^2 = 20p^2; \quad BD^2 = 4k^2 + 4l^2 = 5k^2$$

$$5k^2 = 20p^2 \Rightarrow k^2 = 4p^2 \Rightarrow k^4 = 16p^4 \Rightarrow a + \frac{1}{2} = 16(a - 2)$$

$$15a = 32 + \frac{1}{2} \Rightarrow 15a = \frac{65}{2} \Rightarrow a = \frac{13}{6}$$

$$AB^2 = (k-p)^2 + (q-l)^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$k > 0, p > 0 \Rightarrow k = 2p \text{ (из } k^2 = 4p^2)$$

$$q = 2p, \quad l = -\frac{1}{2}k = -p.$$

$$\begin{aligned} AB^2 &= p^2 + 9p^2 = 10p^2 = 10\sqrt{p^4} = 10\sqrt{\frac{13}{6} - 2} = \\ &= 10\sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{10}{\sqrt{6}} = \frac{10\sqrt{6}}{6} = \frac{5\sqrt{6}}{3}. \end{aligned}$$

~~1) AB~~

2) BD на $y = 2x$. Аналогично, предыдущему случаю.

Ответ: $a = \frac{13}{6}$, сторона квадрата $-\sqrt{\frac{5\sqrt{6}}{3}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}, \quad a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0.$$

1) $a = b$.

$$a + \frac{7}{a} = a + \frac{7}{c} \Rightarrow a = c = b. \text{ Противоречие.}$$

2) $a \neq b$.

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c}$$

$$a - b = \frac{7}{c} - \frac{7}{b} \Rightarrow a - b = \frac{7(b - c)}{bc} \Rightarrow b - c = \frac{(a - b)bc}{7}$$

$$b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}$$

$$b - c = \frac{7(c - a)}{ac} \Rightarrow c - a = \frac{(b - c)ac}{7}$$

$$c - a = \frac{(b - c)ac}{7} = \frac{(a - b)abc^2}{49}$$

$$c + \frac{7}{a} = a + \frac{7}{b}$$

$$c - a = \frac{7(a - b)}{ab} \Rightarrow \frac{(a - b)abc^2}{49} = \frac{7(a - b)}{ab} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{abc^2}{49} = \frac{7}{ab} \Rightarrow a^2 b^2 c^2 = 343 \Rightarrow \max abc = \sqrt{343}$$

Пример: $a = -2\sqrt{7}, b = \sqrt{7}, c = \frac{-\sqrt{7}}{2}$

$$abc = \sqrt{343}.$$

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a} = -\sqrt{7}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

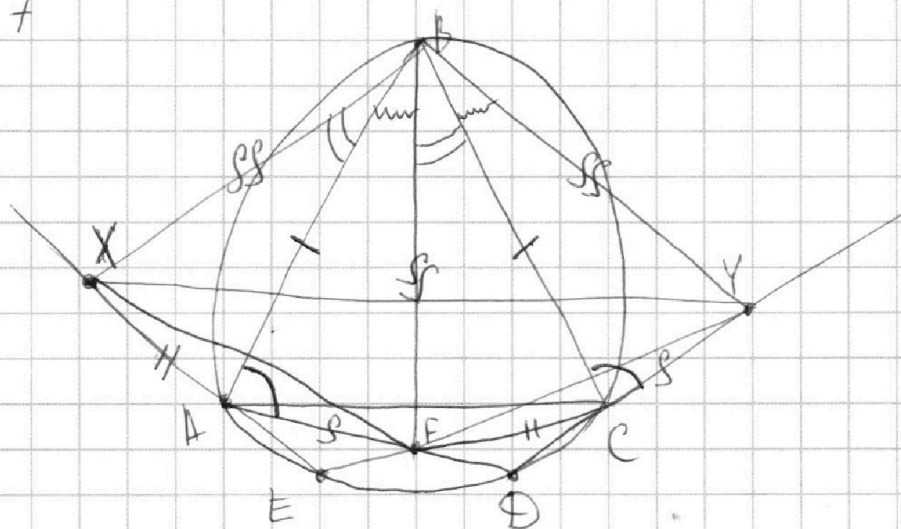
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 7



$$AB = BC, AX = CF, CY = AF$$

$$\angle BCY = 180^\circ - \angle FCB = 180^\circ - (180^\circ - \angle BAF) = \angle BAF$$



$$\triangle BAF = \triangle BCY \Rightarrow BF = BY$$

$$\angle XAB = \angle FCB \text{ (акановично)} \Rightarrow \triangle XAB = \triangle BFC$$



$$BX = BF$$

~~Решение задачи~~

Т.к. $\triangle XAB = \triangle BFC \Rightarrow \angle XBA = \angle FBC$

$$\triangle ABF = \triangle CBY \Rightarrow \angle ABF = \angle CBY$$

Пусть $\angle XBY = 2\alpha$, тогда по теореме косинусов

$$XY^2 = BX^2 + BY^2 - 2 \cos 2\alpha \cdot BX \cdot BY$$

$$XY = 36, BX = BY = BF = 19$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$36^2 = 19^2 + 19^2 - 2 \cdot \cos 2\beta \cdot 19^2$$

$$36^2 = 19^2(2 - 2 \cos 2\beta)$$

$$\left(\frac{36}{19}\right)^2 = 2 - 2 \cos 2\beta$$

$$2 \cos 2\beta = 2 - \left(\frac{36}{19}\right)^2$$

$$2 - \frac{36^2}{19^2} = \frac{2 \cdot 19^2 - 36^2}{19^2} = \frac{2 \cdot 361 - 1296}{19^2} = \frac{-574}{19^2}$$

$$\cos 2\beta = \frac{-287}{19^2}$$

$$\cos 2\beta = 1 - 2 \sin^2 \beta$$

$$1 - 2 \sin^2 \beta = \frac{-287}{19^2}$$

$$2 \sin^2 \beta = 1 + \frac{287}{19^2}$$

$$2 \sin^2 \beta = \frac{648}{361}$$

$$\sin^2 \beta = \frac{324}{361}; \text{ T.K. } \beta < 90^\circ, \text{ то } \sin \beta > 0.$$

$$\sin \beta = \frac{18}{19}$$

$$S_{\Delta XBF} = S_{\Delta YBF} = \frac{1}{2} \cdot XB \cdot BF \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot 19^2 \cdot \frac{18}{19} =$$
$$= \frac{18 \cdot 19}{2}$$

$$S_{BXFY} = S_{\Delta XBF} + S_{\Delta YBF} = \frac{18 \cdot 19}{2} + \frac{18 \cdot 19}{2} = 18 \cdot 19 = 342.$$

Ответ: 342.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a} ; \max abc$
 $a - b = \frac{7}{c} - \frac{7}{b}$
 $a - b = 7(\frac{1}{c} - \frac{1}{b})$
 $a - b = 7(\frac{b-c}{bc})$
 $b - c = \frac{(a-b)bc}{7}$
 $b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}$
 $b - c = \frac{7}{a} - \frac{7}{c}$
 $\frac{(a-b)bc}{7} = \frac{7}{a} - \frac{7}{c}$
 $c - a = \frac{(a-b)abc^2}{49}$
 $a + \frac{7}{b} = c + \frac{7}{a}$
 $c - a = \frac{7}{b} - \frac{7}{a}$
 $\frac{(a-b)abc^2}{49} = 7 \cdot \frac{a-b}{ab}$
 $\frac{abc^2}{49} = 7 \cdot ab$
 $abc^2 = 343$
 $abc = \sqrt[3]{343} = 7$
 $a = 1, b = \sqrt[3]{7}, c = 7$
 $a + \frac{7}{b} = 1 + \sqrt[3]{7}$
 $b + \frac{7}{c} = \sqrt[3]{7} + 1$
 $c + \frac{7}{a} = 14$
 $abc = 343$
 $ab^2 - \sqrt[3]{343} = ab\sqrt[3]{7} - b^2\sqrt[3]{7}$
 $ab^2 + b^2\sqrt[3]{7} = ab\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{343}$
 $b^2(a + \sqrt[3]{7}) - b \cdot a\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{343} = 0$
 $2c\sqrt[3]{7} = ac + a\sqrt[3]{7}$
 $2c = \sqrt[3]{7} + a$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

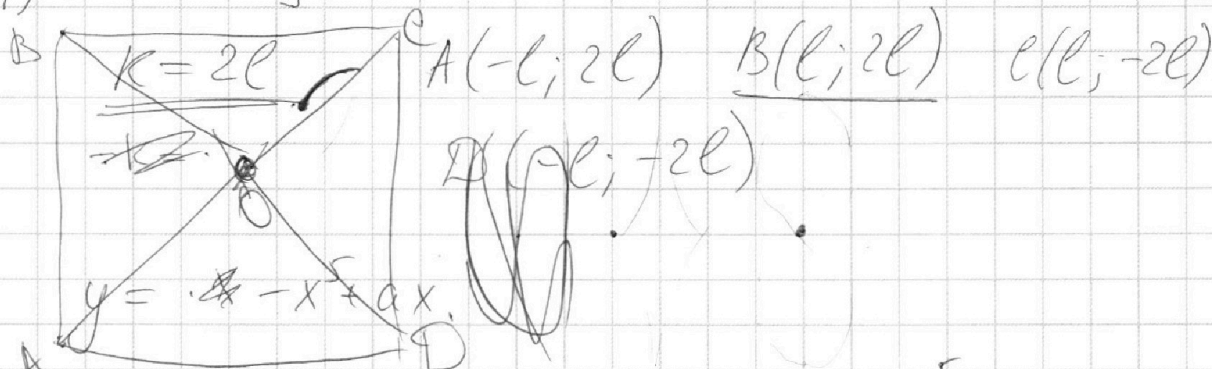
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

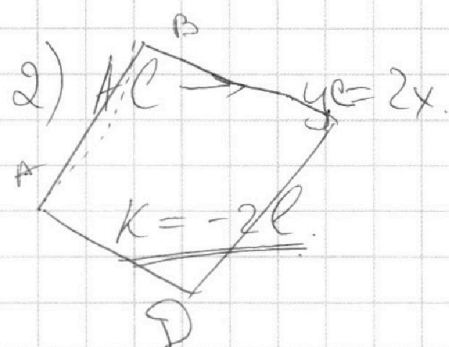
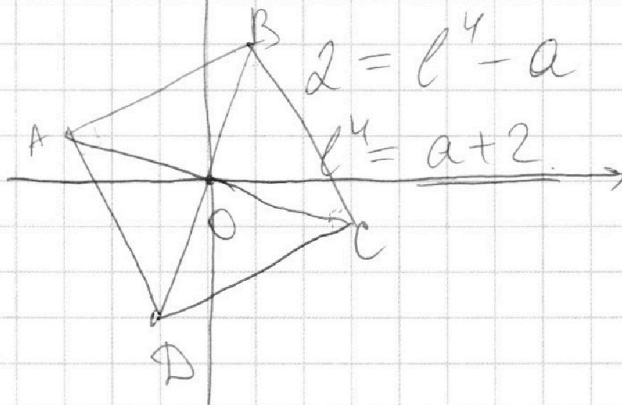
1) $BD \rightarrow y = 2x$



B: $2l = -l^5 + al$
 $2 = -l^4 + a$
 $l^4 = a - 2$

A: $2l = -(-l)^5 - al$
 $2l = l^5 - al$
 $2 = l^4 - a$

$a - 2 = a + 2$



A(-l; -2l) B(l; -2l)
C(l; 2l) D(-l; 2l)

$y = -x^5 + ax$

C: $2l = -l^5 + al$
 $2 = -l^4 + a$
 $l^4 = a - 2$

A: $-2l = -l^5 + al$
 $-2 = -l^4 + a$
 $l^4 = a - 2$

D: $2l = l^5 - al \Rightarrow l^5 = 2l + al \Rightarrow l^4 = a + 2$
 $a - 2 = -a - 2$
 $a = 0$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$y = 3$$

$$1 - x(33 - 34) + 36 - 101 = 0$$

$$\begin{array}{r} 361 \\ x \quad 2 \\ \hline 722 \end{array}$$

$$x - 5 = 0$$

$$x = 5$$

$$36 \cdot 36 =$$

$$= (40 - 4)^2 = 1600$$

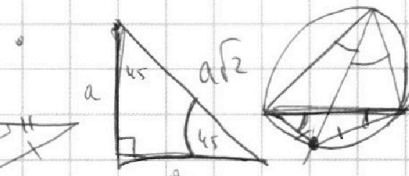
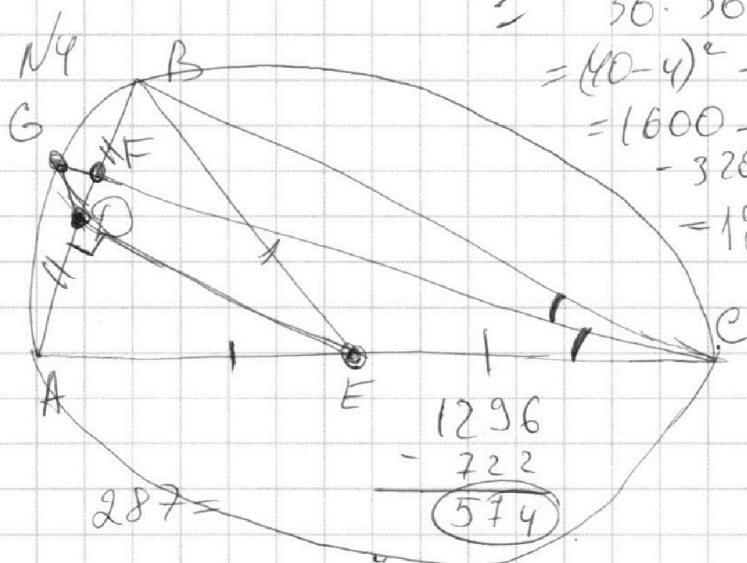
$$= 1600 -$$

$$- 320 + 16 =$$

$$= 1296$$

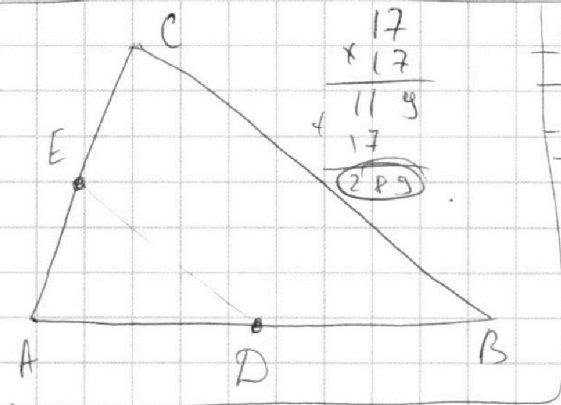
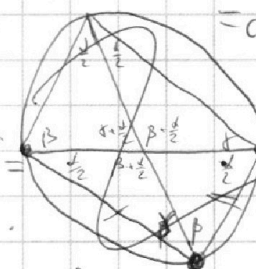
$$19^2 = 381$$

$$36^2 = 1296$$



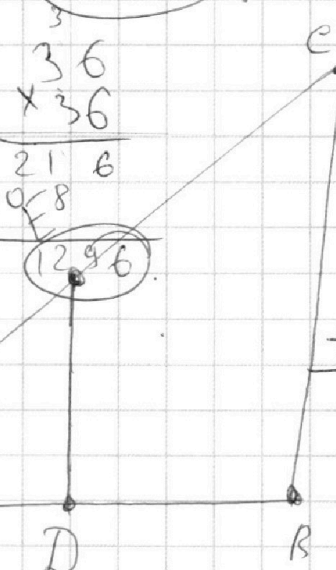
$$a^2 = a^2 + a^2 - 2 \cos 45^\circ \cdot a \cdot a$$

$$= a^2 + 2a^2 - 2a^2 = a^2$$



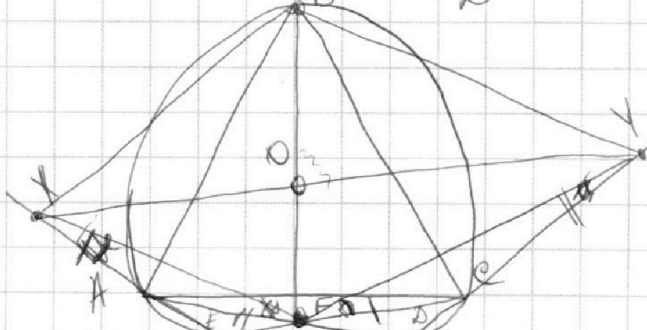
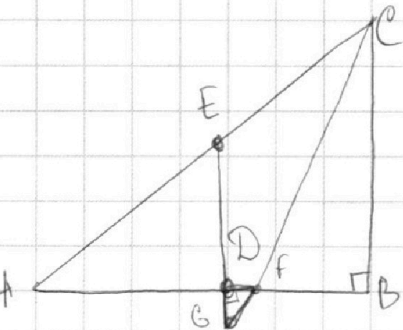
$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 574/2 \\ - 4 \\ \hline 17 \\ - 16 \\ \hline 14 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 36 \\ \hline 216 \\ 216 \\ \hline 1296 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 361 \\ + 287 \\ \hline 648 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 152 \\ \times 18 \\ \hline 342 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x_{1,2} = \frac{11t - 1 \pm \sqrt{-7t^2 - 2t + 1}}{2t}$$

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times 28 \\ \hline 448 \\ + 1120 \\ \hline 1568 \end{array}$$

$$\begin{aligned} -7t^2 - 2t + 1 &= -7(y-3)^2 - 2(y-3) + 1 = -7(y^2 - 6y + 9) - 2(y-3) + 1 = \\ &= -7y^2 + 42y - 63 - 2y + 6 + 1 = \\ &= -7y^2 + 40y - 56 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= 1600 - 4 \cdot (-7) \cdot (-56) = 1600 - 28 \cdot 56 = \\ &= 1600 - 1568 = 32. \end{aligned}$$

$$y_{1,2} = \frac{-40 \pm 4\sqrt{2}}{-14} = \frac{-20 \pm 2\sqrt{2}}{-7} =$$

$$= \frac{20 \pm 2\sqrt{2}}{7}$$

$$\frac{20 - 2\sqrt{2}}{7} > 2$$

$$20 - 2\sqrt{2} > 14$$

$$6 > 2\sqrt{2}$$

$$3 > \sqrt{2}$$

$$20 + 2\sqrt{2} < 28$$

$$2\sqrt{2} < 8$$

$$8 < 64$$

$$\cos x = \frac{5}{7}$$

$$abc(a+b+c) \neq$$

$$y=3, x \neq 0 \Rightarrow t=0$$

$$a^2bc + 7ac = ab^2c + 7ab =$$

$$abc(a-b) = \frac{7ab - 7ac}{7c(a-b)} = \frac{ab^2c + 7ab}{7c(a-b)} = \frac{ab^2c + 7bc}{7c(a-b)} = k$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|$$

$$b = 0$$

$$1) x^3 > 9 \Rightarrow x^2 > 1$$

$$x = \pm 1, \text{ но } a < 0.$$

(X)

$$x^3 - 9 = a, \quad x^2 - 1 = b$$

$$|a| + |b| \leq |a - b| \quad \sqrt[3]{8} - 1$$

$$a = 0$$

$$x = \sqrt[3]{9}$$

$$b = (\sqrt[3]{9})^2 - 1$$

$$(\sqrt[3]{9})^2 - 1 \geq 0$$

$$(\sqrt[3]{9})^2 \geq 1 \quad (V)$$

$$1) a \geq 0, b \geq 0, a \geq b$$

$$a + b \leq a - b \Rightarrow$$

$$134 + 24 \quad 8 = b \leq -b$$

$$125 - 25 \quad 2b \leq 0 \Rightarrow \underline{b = 0}$$

$$2) a \geq 0, b \geq 0, a \leq b$$

$$a + b \leq b - a$$

$$a \geq 0, b < 0$$

$$-1 < x < 1$$

$$a \leq -a \quad 2a \leq 0 \Rightarrow \underline{a = 0} \quad a < 0$$

$$3) a \geq 0, b < 0$$

$$a - b \leq a - b \quad (V)$$

$$a < 0, b \geq 0$$

$$x^3 < 9$$

$$x \in (-\infty; -1] \cup [1; \infty)$$

$$x \in (-\sqrt[3]{9}; \sqrt[3]{9})$$

$$4) a \leq 0, b \geq 0$$

$$-a + b \leq b - a \quad (V)$$

$$5) a < 0, b < 0, a < b$$

$$-a - b \leq b - a$$

$$-2b \leq 0 \quad (X)$$

$$\begin{array}{r} 241 \\ \times 61 \\ \hline 241 \\ 1446 \\ \hline 14701 \end{array}$$

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{a}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(a, b, c) \quad abc = 5^{360} \cdot 7^{90}$$

$$d = \frac{b}{a}$$

$$a, b, \frac{b^2}{a}$$

$$abc = a \cdot b \cdot \frac{b^2}{a} = b^3 = 5^{360} \cdot 7^{90}$$

$$b = 5^{120} \cdot 7^{30}$$

$$\frac{b^2}{a} = \frac{5^2 \cdot 7}{a} \quad 0, 1, 2, 3$$

$$a = 5^p \cdot 7^q \quad 0 \leq p \leq 2$$

$$a = 7 \cdot 5, 7 \cdot 5^2 \quad 0 \leq q \leq 1$$

$$a = 5, 5^2 \quad a = 1$$

$\frac{b^2}{a}$ - катет, a - катет.

$$\frac{b^2}{a} = \frac{5^{240} \cdot 7^{60}}{a} \Rightarrow a = 5^p \cdot 7^q, \quad 0 \leq p \leq 240, 0 \leq q \leq 60$$

(x, y)

$$x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y-101=0$$

$$t = y-3, \quad t \neq 0.$$

$$x^2 t - x(11t-1) + (32t-5) = 0$$

$$D = (11t-1)^2 - 4t(32t-5) =$$

$$= 121t^2 - 22t + 1 - 128t^2 + 20t =$$

$$= -7t^2 - 2t + 1 \geq 0$$

$$7t^2 + 2t - 1 \leq 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-2 \pm 4\sqrt{2}}{14} = \frac{-1 \pm 2\sqrt{2}}{7}$$

$$D = 4 - 4 \cdot 7 \cdot (-1) = 32$$

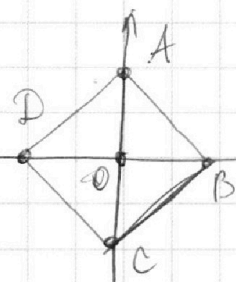
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$O(0;0)$ ~~$A(-p; q)$~~

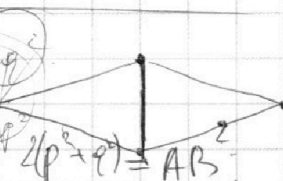
$A(-p; q)$ $B(p, q)$
 ~~$C(p; -q)$~~ $D(-p; -q)$

$(2p)$

~~AC~~ $AC: y = -\frac{2q}{2p} = -\frac{q}{p}$

$AC^2 = 2 \cdot AB^2$

$4p^2 + 4q^2 = 2(p^2 + q^2)$



1) AC ка $y = 2x$

$AC^2 = 4p^2 + 4q^2$

$q = -2p \Rightarrow A(-p; -2p)$ $B(p; -2p)$

$C(p; 2p)$ $D(-p; 2p)$

$b_x = p(1-\sqrt{2})$
 $b_y = q(1-\sqrt{2})$

$y = -x^5 + ax$

$AB^2 = BC^2 \Rightarrow (b_x + p)^2 + (b_y - q)^2 = (b_x p)^2 + (b_y + q)^2$

$A(-p; q)$ $C(p; -q)$

$2b_x p + 2b_y q = -2b_x p + 2b_y q$

$b_x = p(\sqrt{2}-1)$
 $b_y = q(1-\sqrt{2})$

$4b_x p = 4b_y q$
 $b_x p = b_y q$

$b_x^2 + b_y^2 + 2b_x p + 2b_y q = p^2 + q^2$

$b_x^2 + 2b_x p + p^2 + b_y^2 + 2b_y q + q^2 = p^2 + q^2$
 $2b_x p + 2b_y q = 0$

$\frac{q^2}{p^2} b_y^2 + b_y^2 + 4b_y q = p^2 + q^2$

$b_y^2 \cdot \left(\frac{q^2 + p^2}{p^2} + 4b_y q - (p^2 + q^2) \right) = 0$

$D = 16q^2 + 4 \cdot \frac{q^2 + p^2}{p^2} (p^2 + q^2)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$A(p; q) \quad C(p; -q) \quad B(k; l) \quad D(-k; -l)$$

1) AC и $y = 2x \Rightarrow BD$ и $y = -\frac{1}{2}x$

$$q = 2p; \quad l = -\frac{1}{2}k \quad l^2 = \frac{1}{4}k^2$$

$$y = -x^5 + ax$$

$$q = -p^5 + ap$$

$$2p = -p^5 + ap$$

$$2 = -p^4 + a$$

$$p^4 = a - 2$$

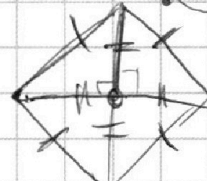
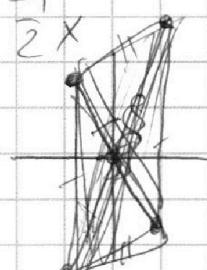
~~$$y = -x^5 + ax$$~~

~~$$l = -k^5 + ak$$~~

~~$$-\frac{1}{2}k = -k^5 + ak$$~~

~~$$-\frac{1}{2} = -k^4 + a$$~~

~~$$k^4 = a + \frac{1}{2}$$~~



$$AB^2 = BC^2$$

~~$$k^2 - 2pk + p^2 + q^2 - 2ql + l^2 = k^2 + 2pk + p^2 + q^2 + 2ql + l^2$$~~

$$p^4 = 16k^4$$

$$a - 2 = 16a + 8$$

$$-15a = 10$$

~~$$k^2 - 2pk + p^2 + q^2 - 2ql + l^2 = k^2 + 2pk + p^2 + q^2 + 2ql + l^2$$~~

$$0 = 4pk + 4ql$$

$$pk + ql = 0$$

$$\frac{13}{6} + \frac{1}{2} = \frac{16}{6}$$

$$16(a - 2) = a + \frac{1}{2}$$

$$AC^2 = 4p^2 + 4q^2 = 4p^2 + 16p^2 = 20p^2$$

$$16a - 32 = a + \frac{1}{2}$$

$$BD^2 = 4k^2 + 4l^2 = 4k^2 + k^2 = 5k^2$$

$$15a = 32 + \frac{1}{2}$$

$$4p^2 = k^2$$

$$16p^4 = k^4$$

$$30a = 65$$

$$a = \frac{13}{6}$$

$$15a = \frac{65}{2}$$

$$p^2 = \frac{1}{16}; \quad k^2 = \frac{4}{16}$$

$$p^4 = \frac{1}{6}; \quad k^4 = \frac{16}{6}$$

$$AB^2 = (k - p)^2 + (l - q)^2$$

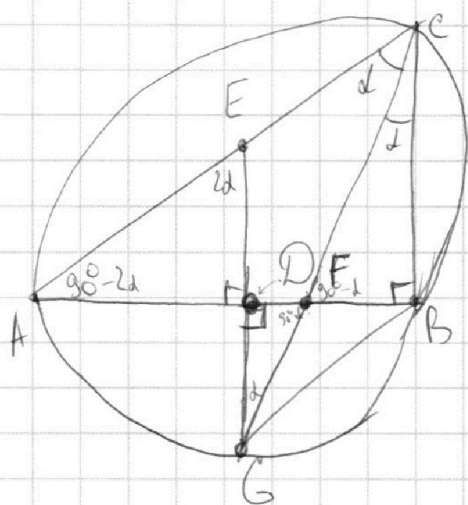
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{\triangle DGF}$$

$$\triangle DGF \sim \triangle BCF$$

коэффициент подобия

$$\frac{S_{\triangle DGF}}{S_{\triangle BCF}} = k^2 = 25$$

$$k = 5$$

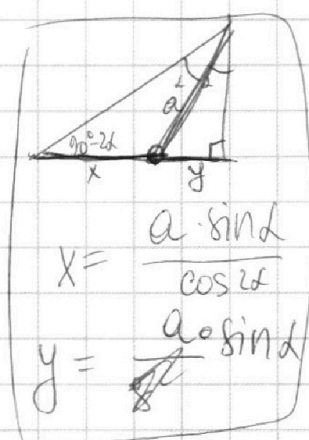
$$BC = 5 DG, \quad \underline{BD = 5 DF}$$

Теорема синусов

$$AF = \frac{CF \cdot \sin \alpha}{\cos 2\alpha}$$

$$BF = CF \cdot \sin \alpha$$

$$\triangle ACF \text{ и } \triangle BCF$$



$$AF = AD + DF = BD + DF = 6 DF$$

$$BF = BD - DF = 4 DF$$

$$\frac{AF}{BF} = \frac{3}{2} = \frac{1}{\cos 2\alpha} \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow 1 - 2 \sin^2 \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\sin^2 \alpha = t$$

$$1 - 2t = \frac{2}{3} \Rightarrow 2t = \frac{1}{3} \Rightarrow t = \frac{1}{6} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{1}{6}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 2\alpha = \frac{2}{3}$$

$$\cos^2 2\alpha = 1 - \sin^2 2\alpha$$

$$\cos^2 2\alpha = \frac{4}{9}$$

$$1 - \sin^2 2\alpha = \frac{4}{9}$$

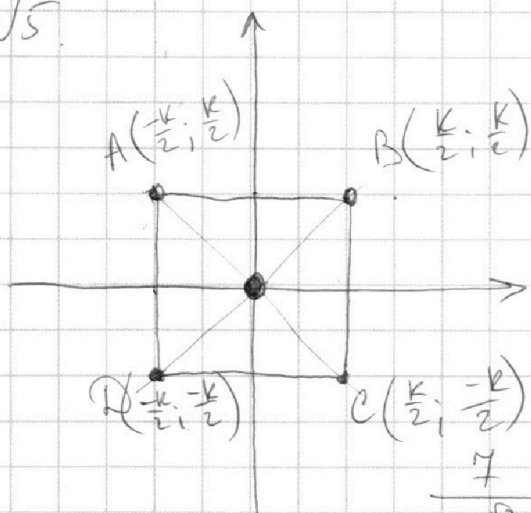
$$\sin^2 2\alpha = \frac{5}{9} \Rightarrow 2\alpha = \arcsin \sqrt{\frac{5}{9}}$$

$$c = \frac{a+b}{2} \quad (b = \sqrt{7})$$

$$\sqrt{7} \cdot \left(\frac{a+\sqrt{7}}{2}\right) a = \sqrt{343}$$

$$\frac{a+\sqrt{7}}{2} a = 7 \quad a(a+\sqrt{7}) = 14$$

N5.



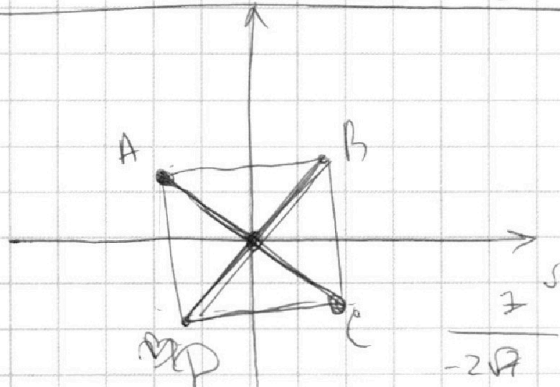
1) BD $y = 2x$. $P = \frac{7}{2} - \frac{4\sqrt{7}}{2} = \frac{7-4\sqrt{7}}{2}$

$$\frac{k}{2} = 2 \cdot \frac{k}{2} \Rightarrow k = 0$$

2) AC $y = 2x$.

$$\frac{k}{2} = -k \Rightarrow k = 0$$

$$\frac{7}{-\frac{\sqrt{7}}{2}} = \frac{2-7}{-\sqrt{7}} = -\frac{5}{\sqrt{7}}$$



$$A(-l; k) \quad A(-l; -k)$$

$$C(-l; k) \quad C(l; k)$$

$$B(l; k) \quad D(-l; k)$$

$$A(-l; k) \quad B(l; k) \quad C(l; -k)$$

$$D(-l; -k)$$

$$a + \frac{7}{b} = -2\sqrt{7} + \sqrt{7} = -\sqrt{7}$$

$$b + \frac{7}{a} = \sqrt{7} + 2\sqrt{7} = 3\sqrt{7}$$

$$c + \frac{7}{a} = \frac{-\sqrt{7}}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

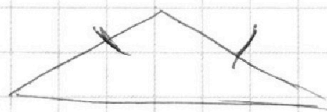
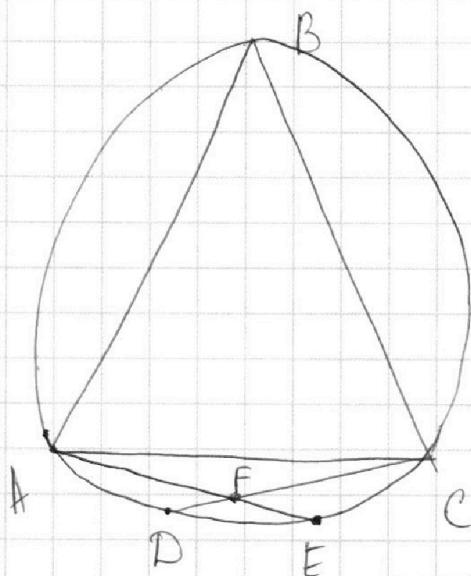
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

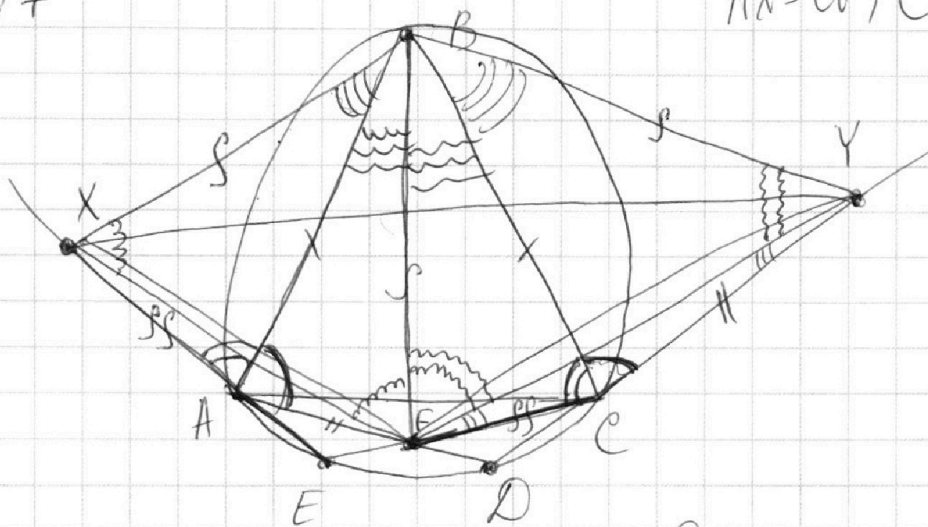
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N7



N7

$AX = CF; CY = AF.$



$$\angle BCY = 180^\circ - \angle DCB = 180^\circ - (180^\circ - \angle BAD) = \angle BAD$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

