



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 12



1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $5^{360} \cdot 7^{90}$?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 3) - x(11y - 34) + 32y - 101 = 0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC . Прямые ED и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что площадь треугольника BCF в 25 раз больше площади треугольника DGF .

5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = -x^5 + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = 2x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа a , b и c не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения abc .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность ω , а на дуге AC , не содержащей точку B , взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F . На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = CF$ и $CY = AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF = 19$, $XY = 36$.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|$$

Пусть $x^3 \geq 9 \Rightarrow x \geq \sqrt[3]{9} > 1 \Rightarrow x^2 > 1$

$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 - 9 + x^2 - 1 \leq |x^3 - x^2 - 8|, \text{ Пусть } x^3 - x^2 - 8 \geq 0$$

$$x^3 + x^2 - 10 \leq x^3 - x^2 - 8 \Rightarrow 2x^2 \leq -8 + 10 = 2 \Rightarrow x^2 \leq 1 \text{ Противоречие,}$$

ведь $x^2 > 1 \Rightarrow x^3 - x^2 - 8 < 0$

$$x^3 + x^2 - 10 \leq 8 + x^2 - x^3 \Rightarrow 2x^3 \leq 18 \Rightarrow x^3 \leq 9$$

$$\begin{cases} x^3 \geq 9 \\ x^3 \leq 9 \end{cases} \Rightarrow x^3 = 9 \Rightarrow \text{Итого, это } x^3 \geq 9 \text{ и } x^3 \leq 9 \Rightarrow x^3 = 9$$

Рассмотрим случай, когда $x^3 \leq 9$ и $x^2 \leq 1 \Rightarrow x^3 - x^2 - 8 \leq 0$

$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8| \Rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow x^3 \leq 1 \Rightarrow x^3 - x^2 - 8 < 0$$

$$9 - x^3 - x^2 + 1 \leq 8 + x^2 - x^3$$

$$10 \leq 8 + 2x^2 \Rightarrow 2x^2 \geq 2 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 \leq 1 \\ x^2 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \text{Итого, это } x^2 = 1$$

Остаток случая, когда $x^3 \leq 9$ и $x^2 \geq 1$

$$\text{Тогда } x^3 - x^2 - 8 \leq 9 - x^2 - 8 \leq 9 - 1 - 8 = 0$$

$$9 - x^3 + x^2 - 1 \leq 8 + x^2 - x^3 \Rightarrow 8 \leq 8 \Rightarrow \text{для всех } x \in (-\infty; -1] \cup$$

$$[1; \sqrt[3]{9}] \text{ верно}$$

Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup [1; \sqrt[3]{9}]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Если a, b, c образуют геом. прогрессию, то $b = ak; c = ak^2$
 $abc = a \cdot ak \cdot ak^2 = a^3 k^3 = 5^{360} \cdot 7^{90} = (ak)^3 \Rightarrow$
 $\Rightarrow ak = 5^{120} \cdot 7^{30}$. Заметим, что k определяется однозначно из значения $a \Rightarrow$ количество троек (a, b, c) , удовл. условиям равно кол-ву возможных значений a , чтобы $ak = 5^{120} \cdot 7^{30}$. Заметим, что $a \in \mathbb{N}$, и $ak^2 \in \mathbb{N}$, $ak \in \mathbb{N} \Rightarrow k$ положительное рациональное.

$ak^2 \in \mathbb{N} \Rightarrow k \nmid 5$ минимальная степень пятёрки в k — 120, а мин степень семерки — 30 иначе $5^{120} \cdot 7^{30} \cdot k \notin \mathbb{N} \Rightarrow$ ~~так как~~ степень 5 в a может принимать любые значения от 0 до 240, а степень 7 от 0 до 60.

~~##: e a~~ ~~##: k~~ След-но по правилу произведения всего возможных значений a $241 \cdot 61 = 14701$.

!! $a \nmid 5$ и k не содержит степеней других чисел кроме 5 и 7, ведь иначе $ak \nmid$ либо a , либо $ak^2 \notin \mathbb{N}$

$$a = 5^i \cdot 7^j \Rightarrow k = 5^{120-i} \cdot 7^{30-j}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 = 0$$

$$x^2(y-3) - 11x(y-3) + x + 30(y-3) + 2y = 11$$

$$(x^2 - 11x + 30)(y-3) + 11 + x + 2y = 0$$

$P(x) = x^2 - 11x + 30$ имеет 2 корня 5 и 6, т.к. $P(5) = 0$ и $P(6) = 0$

$$\Rightarrow \text{по т. Безу } x^2 - 11x + 30 = (x-5)(x-6)$$

$$(x-5)(x-6)(y-3) + 11 + x + 2y = 0$$

$$(x-5)(x-6)(y-3) + 2(y-3) + (x-5) = 0$$

Далее, это если $x=5, y=3$, то все выполняется

$$((x-5)(x-6)+2)(y-3) + (x-5) = 0$$

$$(x^2 - 11x + 32)(y-3) + (x-5) = 0$$

Заметим, что дискриминант $x^2 - 11x + 32 < 0$ и
ст. коэф $> 0 \Rightarrow$ при всех x $x^2 - 11x + 32$ принимает поз.

значения, $x^2 - 11x + 32 = x - k$ ^{Пусть $y-3 \neq 0, y-3 = k$}
 $kx^2 - 11kx + 32k + x - 5 = 0$

$$D = (32k-5)^2 - 4(-128k-20) = 128k^2 - 128k + 20 + 1024k + 80 = 128k^2 + 900k + 100$$

$$128k^2 - 22k - 128k + 20 = 128k^2 - 150k + 20$$

Есть ли здесь целые корни? без $y=3$ условие

$D = 150^2 - 4 \cdot 128 \cdot 20 = 12336 = 2^4 \cdot 771$ 771 не квадрат
 $\Rightarrow D$ не квадрат $\Rightarrow$ корни $\notin \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ т.к. целые коэф $\Rightarrow$ нет. з.ч.
Ответ: ~~$x=5, y=3$~~ $x=5, y=3$

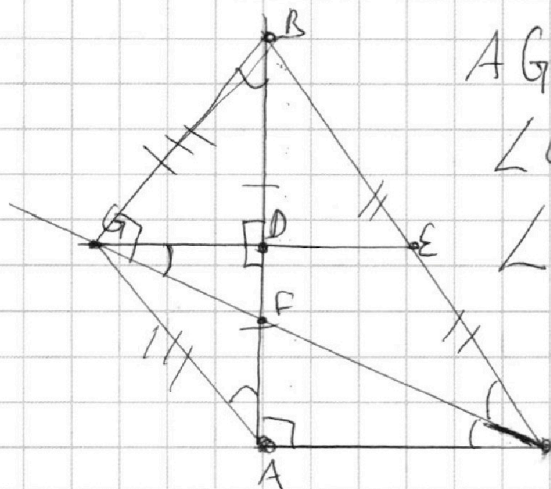
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$AG \perp BC$ вписанный $\Rightarrow$

$$\angle GCB = \angle GAB, \angle GCA =$$

$$\angle GBA, \text{ а т.к. } \angle GCB = \angle GCA,$$

то $\triangle AGB$ - р/б

GD медиана в р/б $\Rightarrow$

$$\Rightarrow GD \perp AB \Rightarrow DE \perp AB, \text{ а т.к.}$$

DE средняя линия, то $DE \parallel AC \Rightarrow AC \perp AB \Rightarrow \angle A$ прямой

$AG \perp BC$ вписанный $\Rightarrow \angle BAC = \angle BGC \Rightarrow \triangle BGC$ - р/б $\Rightarrow$

GE медиана в р/б $\triangle \Rightarrow GE = BE = EC$

$$S_{BFC} = S_{BGE} - S_{BGF} = \frac{1}{2} BG \cdot GC - \frac{1}{2} BG \cdot GF =$$

$$= \frac{1}{2} BG (GC - GF) = \frac{1}{2} BG \cdot CF = 25 \cdot \frac{1}{2} GD \cdot DF$$

Из подобия $\triangle AGD$ и $\triangle GDF$ $\frac{GD}{DF} = \frac{AD}{GD} \Rightarrow$

$$GD^2 = DF \cdot AF \cdot DF.$$

Из подобия $\triangle BGF$ и $\triangle ACF$

$$\frac{AF}{BG} = \frac{CF}{BF} \Rightarrow BF \cdot AF = CF \cdot BG = 25 GD \cdot DF$$

$$\frac{AF}{BF} = \frac{AC}{BC} \text{ по т. о биссектрисе}$$

$$\frac{AF^2}{BF^2} + 2AF = 25GD$$

$$AF^2 + 2AF \cdot DF = 25DF \cdot GD$$

$$AF (AF + 2DF) = 25$$

$$AF \cdot BD + DF \cdot AF = 25 GD \cdot DF$$

$$AF \cdot BD = 25 DF (GD - AF)$$

$$AF \cdot BD = AF \cdot DF$$

$$AF^2 + AF \cdot DF = 25 DF \cdot GD - DF \cdot AF$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что 2-я диагональ квадрата перпендикулярна первой,
а значит лежит на графике линейной функ., перпендикулярном
графику $y = 2x$. $\Rightarrow$ Если эта функция $y = kx + b$, то $2k = -1$, $\Rightarrow$
 $k = -\frac{1}{2}$, т. к. диагонали проходят через начало координат, то
 $b = 0$. Рассмотрим вершины квадрата, находящиеся в I и
II четвертях, их координаты равны x_1, y_1 и x_2, y_2 .

$$(x_1, y_1) \in y = -\frac{1}{2}x \Rightarrow y_1 = -\frac{1}{2}x_1; (x_2, y_2) \in y = 2x \Rightarrow y_2 = 2x_2$$

Заметим, что ни одна вершина не лежит на осях, иначе диагонали
бы совпадали с осями. $\Rightarrow x_1, x_2 \neq 0$

$$\text{У квадрата диагонали равны} \Rightarrow \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 \Rightarrow \frac{5}{4}x_1^2 = 5x_2^2 \Rightarrow \frac{1}{4}x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow |x_2| = \frac{1}{2}|x_1|$$

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in y = -x^5 + ax \Rightarrow y_2 = 2x_2 = -x_2^5 + ax_2 \quad x_2 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 = -x_2^4 + a \Rightarrow a = x_2^4 + 2$$

$$y_1 = -\frac{1}{2}x_1 = -x_1^5 + ax_1 \Rightarrow x_1 \neq 0 \Rightarrow x_1^4 + a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = x_1^4 - \frac{1}{2}$$

$$x_2^4 + 2 = x_1^4 - \frac{1}{2} \Rightarrow x_2^4 + 2 = (-2x_2)^4 - \frac{1}{2} \Rightarrow x_2^4 + 2\frac{1}{2} = 16x_2^4 \Rightarrow$$

$$15x_2^4 = \frac{5}{2} \Rightarrow x_2^4 = \frac{1}{6} \Rightarrow x_1^4 = \frac{16}{6}; a = 2\frac{1}{6}$$

$$\text{Сторона квадрата равна } \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (2x_2 + \frac{1}{2}x_1)^2}$$

$$x_2 > 0 \Rightarrow x_2 = \sqrt[4]{\frac{1}{6}}; x_1 < 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt[4]{\frac{16}{6}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt[4]{6}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\right)^2} = \sqrt{\frac{10}{\sqrt[4]{6}}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt[4]{6}} = \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt[4]{216}}{6} = \frac{\sqrt{21600}}{6} = \frac{2\sqrt{1350}}{6} = \frac{\sqrt{1350}}{3}$$

$$\text{Ответ: } a = 2\frac{1}{6}; \text{Сторона} = \frac{\sqrt{1350}}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 = 0$$

$$x^2y - 3x^2 - 11xy + 34x + 32y - 101 = 0$$

$$(11y-34) \cdot 33y - 102 = 11y - 121$$

$$x^2 - 11x + 30 = 11 - x$$

$$x^2y - 3x^2y - (x-3)(11y-34) = 11 - 12$$

$$(x^2-1)(y-3) - (x-3)(11y-34) = -2$$

$$x^2y - 3x^2 - x(11y-34) + (11y-34) + 21y - 67 = 0$$

$$(x^2+21)(y-3) - (x-1)(11y-34) = 4$$

$$x^2y - 3x^2 - x(11y-34) + (22y-68) + 10y - 33 = 0$$

$$(x^2+10)(y-3) - (x-2)(11y-34) = 3$$

$$x^2 - 11x + 32$$

$$x^2(y-3) - 11x(y-3) + 30y - 90 = 11 - 2y - x$$

$$(y-3)(x^2 - 11x + 30) = 11 - 2y - x \quad x(y+2)(x-1) + x + 2(y+2)$$

$$121 - 120 = 1 \quad (y-3)(x-5)(x-6) = 11 - 2y - x \quad (x^2 - x + 2)$$

$$\frac{11-1}{2} = 5 \quad (y-3)(xy - 3x - 5y + 16)(x-6) = 5 \quad (y+2) + x$$

$$xy(x-2) + (x-2) + 2y$$

$$(xy+1)x + y = 0$$

$$-y + 2y - 1$$

$$-2 + 2y = 0$$

$$-y - 1 + 2y = 0$$

$$y - 1 = 0$$

$$(y-3)(x-5)(x-6) + (x-5) + 2(y-3) = 0$$

$$(y-3)(x^2 - 11x + 32) = 5 - x$$

$$(x-5)(xy - 6y - 3x + 19) + 2(y-3) = 0$$

$$2y = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c}$$

$$c(7 - b^2) + b(ac - 7) = 0$$

$$abc + 7c = b^2c + 7b$$

$$b^2 \geq 7, \text{ либо } ac \geq 7 \text{ и } ac < 7$$

$$abc + 7c - b^2c - 7b$$

$$a^2 > 7, \text{ либо } bc < 7$$

$$a^2, b^2, c^2 < 7; \text{ ~~ab~~ } \Rightarrow ab, bc, ac < 7$$

Противоречие

$$a^2 \geq 7, bc \geq 7$$

$$150^2 \quad a \geq b \geq c$$

22500 - 4

$$\begin{array}{r} \sqrt{21} \\ 84 \\ \hline 484 \\ 968 \\ \hline 10164 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1 & 2 \\ 6 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 5 \\ 7 & 7 \\ \hline 3 & 6 \\ 6 & 8 \\ 8 & 4 \\ 4 & 2 \\ 2 & 1 \\ \hline 2 & \end{array}$$



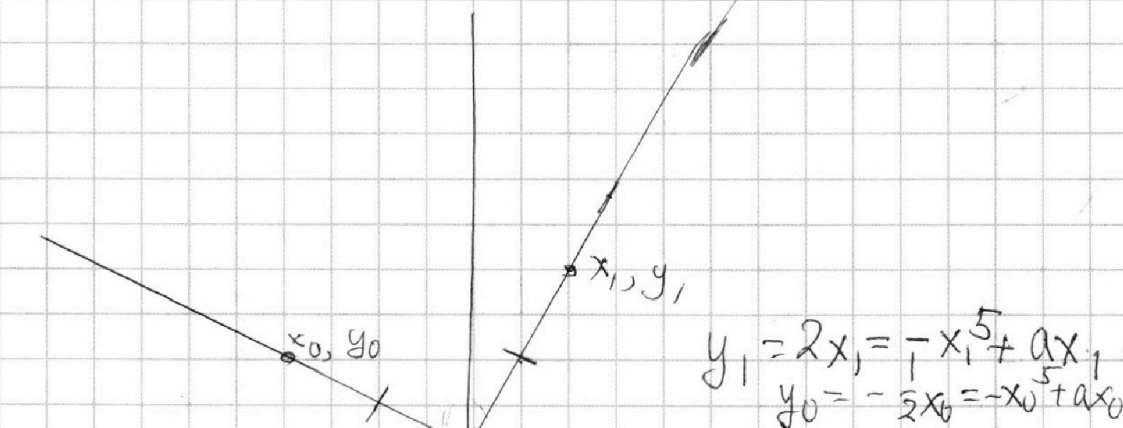
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x_0^2 = y$$

$$x_0^2 + y_0^2 = x_1^2 + y_1^2$$
$$5x_0^2 = x_0^2 + \frac{1}{4}x_0^2$$

$$x_1^2 = \frac{1}{4}x_0^2$$

$$|x_1| = \frac{1}{2}|x_0|$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_0$$
$$x_0 = -2x_1$$

$$\frac{1}{2} = x_0^4 - a$$
$$a = x_0^4 - \frac{1}{2}$$

$$ax_1 - x_1^5 = 2x_1$$

$$a - x_1^4 = 2 + x_1^4 = x_0^4 - \frac{1}{2}$$

$$2 + x_1^4 = 16x_1^4 - \frac{1}{2}$$

$$15x_1^4 = 2,5$$

$$x_1^4 = \frac{1}{6}$$

$$x_0^4 = \frac{16}{6}$$

$$\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$$

$$a = \frac{13}{6}$$

$$-\frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\left(-\frac{3}{\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{9}{6} = \frac{3\sqrt{6}}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

$$\frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\sqrt{\frac{10\sqrt{6}}{6}} = \frac{\sqrt{10\sqrt{6}}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{10}\sqrt{\sqrt{6}}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{10}\sqrt{6}}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{10}\sqrt{2}}{6}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 = 101$$

$$x^2y - 3x^2 - 11xy + 34x + 32y = 101$$

$$xy(x-11) - 3x(x-11) + x + 32y = 101$$

$$xy(x-11) - 3x(x-11) = 3$$

$$xy(x-11) - 3x(x-11) = 3$$

$$(y-3) - 31x + 31y$$

$$121 - 3 - 121 - 121 \cdot 3 +$$

$$(x^2 - 11x)(y-3) + 32(y-3) = 5x$$

$$34 \cdot 11 + 32 \cdot 3 = 101$$

$$(x^2 - 11x + 32)(y-3) = 5x$$

$$-363 + 96 + 374$$

$$107$$

$$121 - 4 \cdot 32 = 7$$

$$x^2y - 3x^2 - 11xy + (33-1)y + (33+1)x = 101$$

$$x(xy - 3x - 11y + 33) + (33-1)y + x = 101 + x \cdot y - x$$

$$x(x-11)(y-3) + (33-1)y + x - 11 = 90$$

$$(xy - 3x + 1)(x-11) + 32y = 90$$

$$x^2y - 3x^2 - 11xy + 33y + 33x = 101 + y - x$$

$$(x-11)(x-3)(y-3) + 9x + 99 = 101 + y - x$$

$$(x-11)(x-3)(y-3) = 2 + y - 10x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2(y-3) - 11xy + x + 32y = 101$$

$$x^2(y-3) - x(11y-3)$$

$$x^2y - 3x^2 - 11xy$$

~~x-term~~ ~~y-term~~ ~~x-term~~

$$x^2y - 11xy + x - y - 2 = 0$$

$$x : 3 \Rightarrow y \equiv 2$$

$$x - 11xy = 2$$

$$x(1-11y) = 2$$

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}$$

$$a^2bc + 7bc = b^2ac + 7ab =$$

$$c^2ab + 7bc$$

$$b^2ac + 7ab - c^2ab - 7bc = 0$$

$$ab(7-c^2) + bc(ab-7) = 0$$

$$ab \cdot bc + 7ab - bc \cdot ac - 7bc = 0$$

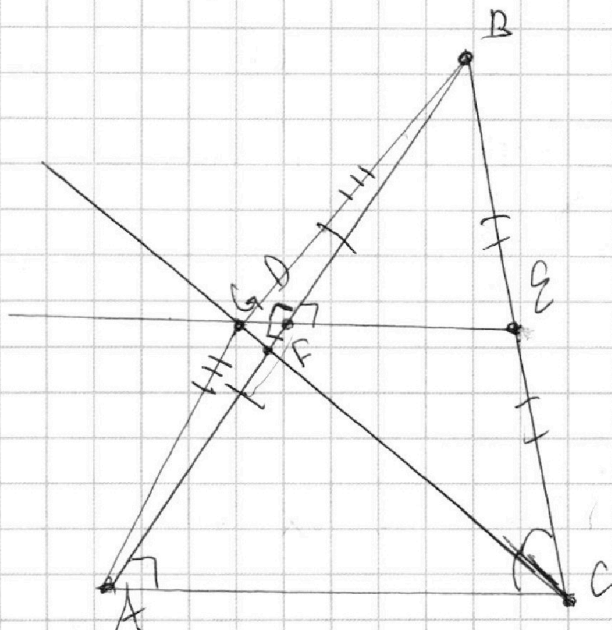
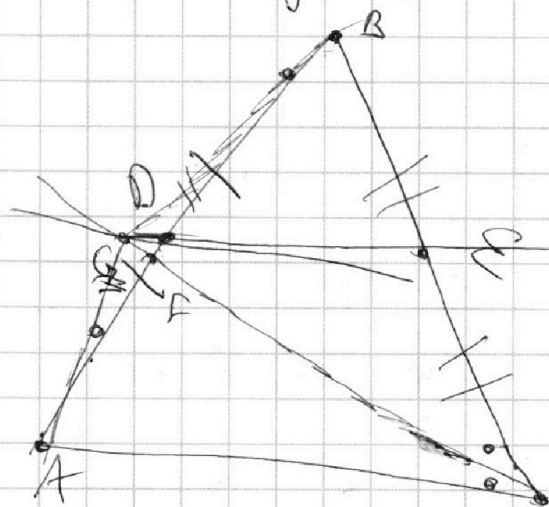
$$(ab-7)(7-bc)$$

$$ab(ab-7) = ab(7-bc)$$

$$\frac{BF}{BC} = \frac{AC}{7F}$$

25

$$\frac{1}{2} DG \cdot DF = \frac{1}{2} BF$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|$$

$$x^3 - 9 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 1 > 0 \quad x^3 - x^2 - 8 \leq 0$$

$$x \geq 2$$

$$x^3 + x^2 - 10 \leq x^3 - x^2 - 8$$

~~1 + 3~~

$$2x^2 \leq 2 \quad \text{Противоречие}$$

$$x^2 \leq 1, \text{ т. к. } x^2 > 1$$

$$x^2 \leq 1$$

$$9 - x^3 - x^2 + 1 \quad x=1$$

$$x^3 + x^2 - 10 \leq x^2 + 8 - x^3$$

$$10 - x^3 - x^2 \leq 8 + x^2 - x^3$$

$$2x^2 \leq 18$$

$$x^3 \leq 9 \quad x^3 \geq 9 \Rightarrow x \geq 9$$

$$x^3 \leq 9$$

$$2x^2 \leq 18$$

$$-2x^2 \leq -2$$

$$x^2 \geq 1$$

$$x \in [1; \sqrt[3]{9}]$$

$$x \in [1; \sqrt[3]{9}]$$

$$9 - x^3 - x^2 + 1 \leq 8 + x^2 - x^3$$

$$x^2 \leq 1$$

$$9 - 1 \leq 8$$

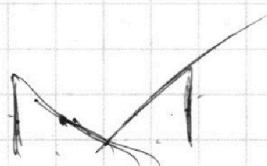
$$8 \leq 8$$

$$9 - 2^3 + 2^2 - 1 \leq 8 + 2^2 - 2^3$$

$$1 + 3 \leq 4$$

$$\begin{array}{r} 241 \\ \times 61 \\ \hline 241 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1446 \\ \times 14701 \\ \hline 14701 \end{array}$$



$$\frac{-x}{y_1} = \frac{y_2}{x}$$

$$-x^2 = y_1 y_2$$

$$\frac{y_1}{-x} = \frac{y_2}{x}$$

$$y_1 x = \frac{y_1 y_2}{-x}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a, ak, ak^2$$

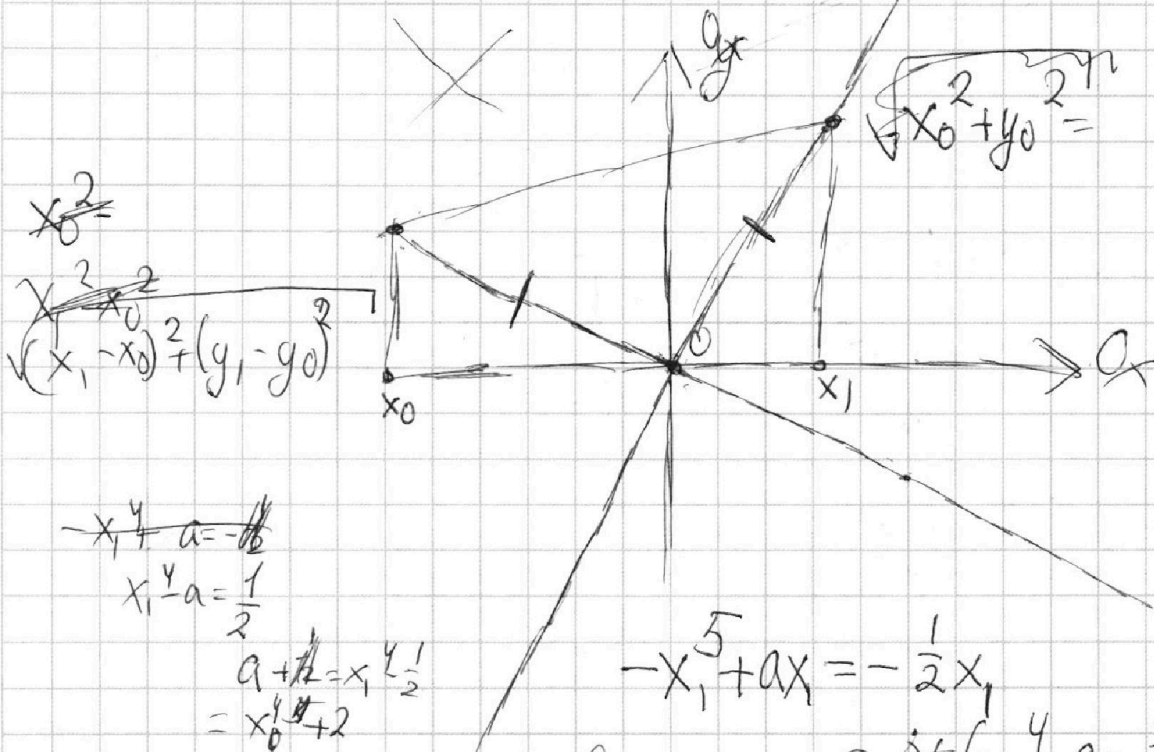
$$(2^2)^3$$

$$a^3 k^3 = 5^{360} \cdot 7^{90}$$

$$(ak)^3 = 5^{360} \cdot 7^{90}$$

$$ak = 5^{120} \cdot 7^{30}$$

$$a = 1, 5, 7, 5^2, 5 \cdot 7, 7^2 \quad (21 \cdot 31)$$



$$-x_1^4 - a = -\frac{1}{2}$$

$$x_1^4 - a = \frac{1}{2}$$

$$a + \frac{1}{2} = x_1^4 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= x_0^4 + 2$$

$$x_0^4 + 2 = x_1^4 - \frac{1}{2}$$

$$x_0^4 - x_1^4 = \frac{1}{2} (x_1 - x_0) (x_1^3 + x_1^2 x_0 + x_1 x_0^2 + x_0^3) \quad -x_0^5 + ax_0 = 2x_0$$

$$x_0^2 x_1^2 + x_0^3 \quad -x_0^4 + a = 2$$

$$-x_1^4 - a = -\frac{1}{2}$$

$$x_1^4 - x_0^4 = \frac{5}{2}$$