



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 6



1. [4 балла] Решите уравнение

$$4 \operatorname{tg} 2x + 1 + \operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $3^{240} \cdot 7^{240}$?

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\ln^2(x+2) - (x+1) \ln(4x+8) + (\ln 4) \ln(x+2) \geq 0.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = -2x^3 - ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = 5x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC . Лучи DE и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что $\frac{CF}{DF} = \sqrt{\frac{2}{11}}$.

6. [5 баллов] Числа x , y и z не все равны между собой, и при этом

$$x^3 + \frac{10}{y^3} = y^3 + \frac{10}{z^3} = z^3 + \frac{10}{x^3}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения xyz .

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = \sqrt{10}$, $AD = DC = 2$, $AC = 2\sqrt{2}$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA + SB = 2\sqrt{2} + \sqrt{10}$. Найдите:

а) объём пирамиды;

б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB , SBC и ребра SD .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$N1: 4 \operatorname{tg} 2x + 1 + \operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\frac{8 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + 1 + \frac{\cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)}{\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)} = 0$$

$$\frac{8 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + 1 + \frac{\cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4}}{\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4}} = 0$$

$$\frac{8 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + 1 + \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = 0; \quad t = \operatorname{tg} x;$$

$$\frac{8t}{(1-t)(1+t)} + 1 + \frac{(1-t)^2}{(1-t)(1+t)} = 0;$$

$$\frac{8t + 1 - t^2 + 1 - 2t + t^2}{(1-t)(1+t)} = 0; \quad t \neq \pm 1$$

$$2 - 6t = 0$$

$$t = \frac{1}{3};$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}; \quad x = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} 2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x + \frac{\pi}{4} \neq 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2: Пусть $a = 3^\alpha \cdot 7^\beta \cdot k$, $k \nmid 7$, $k \nmid 3$, $k \nmid 7$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$

Предположим, что $k \neq 1$;
тогда $3^{240} \cdot 7^{240} \nmid k$ т.к. $k \nmid 3$, $k \nmid 7$
Но т.к. $b, c \in \mathbb{Z}$ ~~авс~~ $abc : k$
Но $abc = 3^{240} \cdot 7^{240}$ - противоречие.
Значит $k = 1$; ~~предположим, что~~
~~предположим, что~~

Пусть q - общий множитель прогрессии,
образованной числами a, b, c ;
 $q = \frac{b}{a} = \frac{c}{b}$; т.к. $b, c \in \mathbb{Z}$ $q \in \mathbb{Q}$

Предположим, что у дроби q
чисел a, b, c есть простой делитель
 $p \neq 2$; $p \neq 3$; $p \neq 7$;

тогда $abc : p$, но $abc = (3 \cdot 7)^{240} \nmid p$
Значит ~~также~~ у a, b, c нет простых
делителей кроме 3 и 7.

Но тогда $q = 3^x \cdot 7^y$, $x, y \in \mathbb{Z}$ т.к.
иначе у числа $b = aq$ либо появятся
новые простые делители, отличные от
3 и 7, либо оно станет не целым.

тогда $a = 3^\alpha \cdot 7^\beta$; $b = aq = 3^{\alpha+x} \cdot 7^{\beta+y}$;
 $c = bq = 3^{\alpha+2x} \cdot 7^{\beta+2y}$; ~~и~~

$$abc = 3^{3\alpha+3x} \cdot 7^{3\beta+3y} = 3^{240} \cdot 7^{240}$$

$$\begin{cases} 3\alpha+3x=240 \\ 3\beta+3y=240 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha+x=80 \\ \beta+y=80 \end{cases} \quad \begin{cases} x=80-\alpha \\ y=80-\beta \end{cases} \quad (1)$$

Числа α, β, x, y однозначно определяют
 a и q , а значит определяют прогрессию.
т.е. каждой 4-ке (α, β, x, y) соответствует
единственная 3-йка (a, b, c) , при этом
каждой 3-йке (a, b, c) соответствует
какая-то 4-йка (α, β, x, y)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Накжем образом кол-во порхорящих
проек равно кол-ву $\#$ четверок,
при которых числа $a, b, c \in \mathbb{Z}$
т.е. $\begin{cases} x \geq 0 \\ d+x \geq 0 \\ d+2x \geq 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} y \geq 0 \\ b+y \geq 0 \\ b+2y \geq 0 \end{cases}$

Порставляем значения x и y из сист. (1):

$$\begin{cases} d \geq 0 \\ d+80-d \geq 0 \\ d+160-2d \geq 0 \\ 0 \leq d \leq 160 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b \geq 0 \\ b+80-b \geq 0 \\ b+160-2b \geq 0 \\ 0 \leq b \leq 160 \end{cases}$$

Каждое из чисел d, b может
принимать орно из 161 значений
значит всего ~~пар~~
существует 161^2 пар (d, b)

При этом из системы (1) по
~~Морфологическому~~ d и b орножачно
уставия вливается x и y т.е.
всего существует 161^2 чок (d, b, x, y) ,
ад при которых $a, b, c \in \mathbb{Z}$, и
значит существует 161^2 проек
 (a, b, c) порхорящих по условию

Ответ: 161^2

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3}: \ln^2(x+2) - (x+1)\ln(4x+8) + (\ln 4)\ln(x+2) \geq 0$$

$$y = x+2; \quad y > 0; \quad x = y-2$$

$$\ln^2 y - (y-1)\ln 4y + (\ln 4)\ln y \geq 0;$$

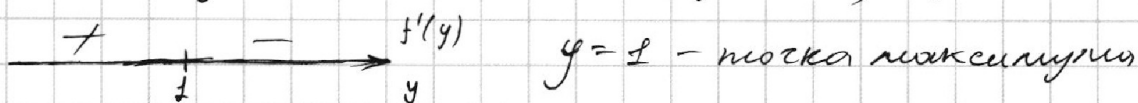
$$\ln y(\ln y + \ln 4) - (y-1)\ln 4y \geq 0$$

$$\ln y \cdot \ln 4y - (y-1)\ln 4y \geq 0$$

$$\ln 4y(\ln y - y + 1) \geq 0$$

Рассмотрим функцию $f(y) = \ln y - y + 1$;

$$f'(y) = \frac{1}{y} - 1; \quad f'(y) = 0; \quad \frac{1}{y} - 1 = 0; \quad y = 1$$



т.к. $f(y)$ непрерывна на области определения

$$f(y) \leq f(1) = \ln 1 - 1 + 1 = 0;$$

Таким образом $f(y)$ всегда неположительна,
принимает равна 0 только при $y = 1$ т.к.
при $y > 1$ ф-я убывает, а при $y < 1$ — возрастает.

Поэтому при $y = 1$ ($x = -1$) — решение $\exists$ e.

При $y \neq 1$:

$$\ln 4y(\ln y - y + 1) \geq 0$$

$$\ln 4y \leq 0$$

$$0 < 4y \leq 1; \quad 0 < y \leq \frac{1}{4}; \quad -2 < x \leq -\frac{7}{8}$$

$$\text{Ответ: } x \in (-2; -\frac{7}{8}] \cup \{-1\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

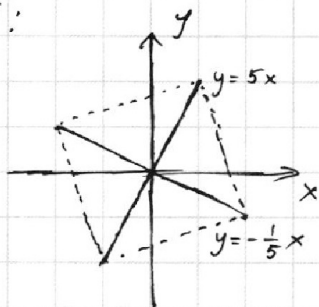
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



✓ 4:



~~5. Даны две функции~~
~~и требуется найти на~~
~~их произведение~~

Если центр квадрата -
точка $(0;0)$, а один из
диагоналей лежит на
прямой $y = 5x$, другая

диагональ лежит на прямой, перпендикулярной
к первой, и пересекающей ее в точке
 $(0;0)$ т.е. на прямой $y = -\frac{1}{5}x$.

~~Данные~~ Данные прямые перпендикулярны
т.к. произведение их угловых коэффициентов
 $5 \cdot (-\frac{1}{5}) = -1$; и они пересекаются в точке
 $(0;0)$; $-\frac{1}{5} \cdot 0 = 5 \cdot 0 = 0$;

Пусть $(d; 5d)$ - одна из вершин квадрата,
лежащих на прямой $y = 5x$;

Расстояние от этой точки до центра
квадрата $d = \sqrt{d^2 + 5^2 d^2} = |d| \sqrt{26}$.

Заметим, что точка $(5d; -d)$ ~~лежит~~
лежит на прямой $y = -\frac{1}{5}x$ и

расстояние от этой точки до центра
квадрата $\sqrt{5^2 d^2 + d^2} = d$ значит $(5d; -d)$ -
вершина квадрата

т.к. обе вершины лежат на графике
функции $y = -2x^3 - ax$ выполняются равенства:

$$\begin{cases} -2d^3 - da = 5d \\ -2 \cdot 5^3 d^3 - 5ad = -d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2d^3 + ad + 5d = 0 \\ +2 \cdot 5^3 d^3 + 5ad - d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10d^3 + 5da + 25d = 0 \\ 2 \cdot 5^3 d^3 + 5da - d = 0 \end{cases} \Rightarrow (2 \cdot 5^3 - 10) d^3 = 26d$$

При $d=0$ все вершины
квадрата совпадают
с точкой $(0;0)$ значит $d \neq 0$;

$$240 d^2 = 26$$

$$d = \pm \frac{\sqrt{26}}{4\sqrt{15}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2d^3 + ad + 5d = 0; \quad ad = -2d^3 - 5d$$
$$a = -2d^2 - 5 = -\sqrt[3]{\frac{2 \cdot 26}{240}} \sqrt{5} = -\frac{2 \cdot 26}{240} - 5 =$$
$$= -\frac{52 + 240 \cdot 5}{240} = -\frac{1252}{240} = -\frac{626}{120} = -\frac{313}{60}$$

$$a = -\frac{313}{60}$$

При этом $d = 12/\sqrt{26}$ — расстояние
от центра квадрата, до его вершин
т.е. половина диагонали; тогда диагональ
квадрата $D = 2d$; Сторона квадрата $b = \frac{D}{\sqrt{2}}$

$$\text{Площадь квадрата } S = b^2 = \frac{D^2}{2} = \frac{4d^2}{2} = 2d^2;$$
$$S = 2d^2 \cdot 26 = \frac{26^2 \cdot 2}{240} = \frac{13^2 \cdot 8}{240} = \frac{13^2}{30} = \frac{169}{30}$$

$$\text{Ответ: } a = -\frac{313}{60}; \quad S = \frac{169}{30}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

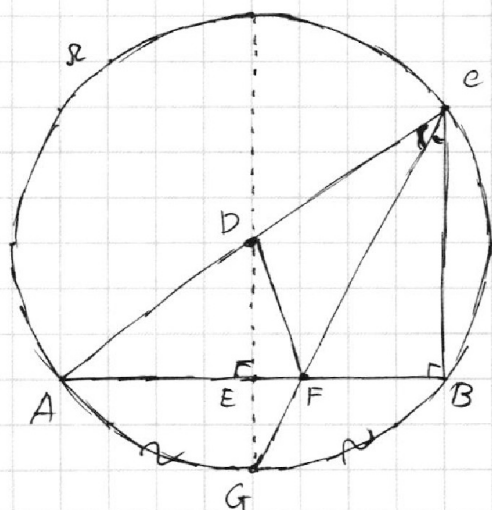
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№5:



Биссектриса $\angle C$ пересекает описанную окр. $\triangle ABC$ в точке G .
значит G - середина дуги AB .
 GE проходит через середину отрезка AB и через середину хорды AB описанной окр. $\triangle ABC$.
значит EG - серединный перпендикуляр к AB . $\Rightarrow \angle AED = 90^\circ$

$\triangle ABC$ и $\triangle AED$ - подобные треугольники. значит $\triangle ABC \sim \triangle AED \Rightarrow \angle ABC = \angle AED = 90^\circ$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

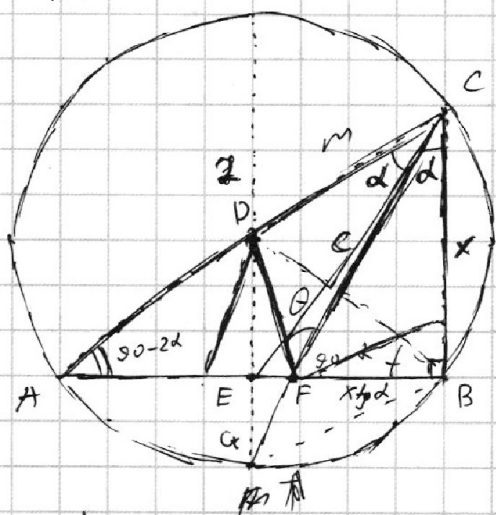
1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{x}{2} = \frac{FB}{AF}$$



$$\frac{CF}{DF}$$

$$CF = \frac{x}{\cos \alpha}$$

$$DF^2 = BC^2 + CF^2 - 2CF \cdot BC \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{DF^2}{CF^2} = \frac{BC^2}{CF^2} + 1 - 2 \frac{BC}{CF} \cos \alpha$$

$$\frac{x}{1} = \frac{FB}{AB}$$

$$FB = x \cdot \frac{1}{d}$$

$$BF = d$$

$$CF = c$$

$$d = qc$$

$$d^2 = 1 + c^2 - 2c \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{CF}{x}$$

$$q^2 c^2 = 1 + c^2 - 2c \cos \alpha$$

$$(q^2 - 1)c^2 = 1 - 2c \cos \alpha$$

$$CF =$$

$$\frac{x}{2} = \frac{BF}{AF}$$

$$\cos \alpha = \frac{q}{x} \cdot \frac{x}{c}$$

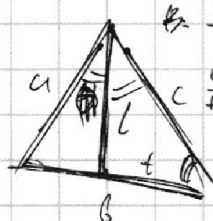
$$\cos 2\alpha = \cos 2\alpha = \frac{2}{x}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{2}{x} \cdot \frac{x}{2} = \frac{c}{2}$$

$$2c \cos \alpha = 4 \cos \alpha \left(\frac{c}{2}\right) = \frac{4 \cos^2 \alpha}{\cos 2\alpha} = 4$$

$$1 = c^2 + d^2 - 2dc \cos \theta = q^2 c^2 + c^2 - 2qc^2 \cos \theta$$

$$2 = \frac{x}{\sin(90-2\alpha)} = \frac{x}{\cos 2\alpha}$$



$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\cos(180-2\alpha)} = \frac{1}{-\cos 2\alpha}$$

$$x = 2 \cos 2\alpha =$$

$$= 4 \cos^2 \alpha - 2 = x$$

$$4 \cos^2 \alpha - 2 = x$$

$$4 \frac{x^2}{c^2} - 2 = x; \quad 4x^2 = (x+2)c^2$$

$$1 = d^2 + c^2 + 2$$

$$\cos \alpha = x$$

$$\cos 2\alpha =$$

$$\frac{1}{c}$$

$$x = 1$$

$$d^2 = m^2 + c^2 - 2mc \cos \alpha$$

$$d^2 = m^2 + c^2 - 2m$$

$$d^2 = m^2 + c^2 - 2m$$

$$(q^2 - 1)c^2 = m^2 - 2m$$

$$c^2 = x^2 + x^2 + \frac{1}{q^2} \left(\frac{x^2}{\cos 2\alpha} + \right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\cos 4t + 2\cos t + 1 + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

(!) ОФД

$$\cos 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{2\cos x}{1 - \tan^2 x}$$

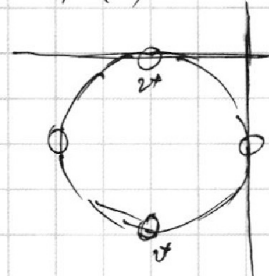
$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4}}{\cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x} = \frac{\tan x + 1}{1 - \tan x}$$

$\tan x = 1$

$$4 \frac{2t}{1-t^2} + 1 + \frac{(t+1)}{1-t} = 0 \quad 4 \frac{2t}{1-t^2} + 1 + \frac{1-t}{1+t} = 0$$

$$\frac{8t}{1-t^2} + \frac{1-t^2}{1-t^2} + \frac{(1-t)^2}{(1+t)(1-t)} = 0$$

$$8t + 1 - t^2 + 1 - 2t + t^2 = 0$$



$a; b; c$

$a; aq; aq^2$

$$abc = a^3 q^3 = 3^{240} \cdot 7^{240}; \quad aq = 3^{80} \cdot 7^{80}$$

$$aq = 3^{80} \cdot 7^{80}$$

$$q = \frac{x}{y}$$

$aq \in \mathbb{Z}$ (1) $y \in \mathbb{Z}$

$$b; bq; b/q \in \mathbb{Z};$$

$$3^d 7^{\beta} \quad 3^{d+\frac{x}{2}} 7^{\beta+y}$$

$$3 \cdot 7^{d+2y}$$

$$d + d + 2x + d + x = 240$$

$$d + x = 80$$

$$d = 80 - x$$

$$\beta + y = 80$$

$$x = 80 - d$$

$$d + 2x \geq 0$$

$$\ln^2(x+2) - (x+1) \ln(4x+8) + \ln 4 \ln(x+2) \geq 0$$

$$\ln^2(x+2) - x \ln(4x+8) - \ln(4x+8) + \ln 4 \ln(x+2) \geq 0$$

$$\ln^2(x+2) - x \ln 4 - x \ln(x+2) - \ln 4 \ln(x+2) + \ln 4 \ln(x+2) \geq 0$$

$$\ln^2(x+2) - x \ln 4 - \ln(x+2) x \geq 0$$

$$\ln^2(x+2) - x \ln(4x+8) \geq 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\ln^2(x+2) \geq -x \ln(4x+8) \geq 0$$

$$t^2 \geq (e^t - 2)$$

$$\begin{aligned} \ln(x+2) &= t \\ x+2 &= e^t \\ x &= e^t - 2 \end{aligned}$$

$$\ln^2(x+2) \geq x(\ln 4 + \ln(x+2))$$

$$\ln^2(x+2) - x \ln(4x+8) - \ln(4x+8) + \ln 4 \ln(x+2) \geq 0$$

$y = x+2$ $y > 0$

1283:
 $x > -2$

$$\ln^2 y - (y-1) \ln 4y - \ln 4 \ln y \geq 0$$

$$f(y) = \ln^2 y - (y-1) \ln 4y - \ln 4 \ln y$$

$y=1$ - корень.

$$\ln^2 y \geq (y-1) \ln 4y + \ln 4 \ln y \leq \frac{2 \ln y}{y}$$

$$= (y-1) \ln 4 + (y-1) \ln y + \ln 4 \ln y =$$

$$\ln^2 y \geq (y-1 + \ln 4) \ln y + (y-1) \ln 4$$

$$\ln y > y$$

$$e^y > y$$

$$\begin{aligned} f(y) &= e^y - y \\ f'(y) &= e^y - 1 \end{aligned}$$

$$\ln^2 y - (y-1) \ln 4y + (\ln 4) \ln y \geq 0$$

$$f' = \frac{2 \ln y}{y}$$

$$\ln^2 y - y \ln 4y + \ln 4y + \ln 4 \cdot \ln y \geq 0$$

$$\ln^2 y - y \ln 4 - y \ln y + \ln 4 + \ln y \geq 0$$

$$\ln^2 y + \ln y + \ln 4 \geq y(\ln 4 + \ln y)$$

$$t^2 + \ln(4) \cdot t \geq e^t (\ln 4 + t)$$

$$f(t) = t^2 + t \ln 4 - e^t \ln 4 - t e^t$$

$$f'(t) = 2t + \ln 4 - e^t \ln 4 - (t+1)e^t$$

$$t = \ln y$$

$$f e^t =$$

$$t e^t + e^t = (t+1)e^t$$

$$f' \quad \ln^2 y - (y-1) \ln 4y + \ln 4 \cdot \ln y \geq 0$$

$$\begin{aligned} y &\leq \frac{1}{4} \\ y &\geq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + \\ - \\ + \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^3 + \frac{10}{y^3} = d$$

$$y^3 + \frac{10}{z^3} = d$$

$$z^3 + \frac{10}{x^3} = d$$

$$x^6 y^3 z^3 + 10 x^3 z^3 =$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^3}$$

$$\frac{z^3 x^3 y^3 - 10 z^3}{z^3 y^3}$$

$$x = y$$

$$3d = x^3 + y^3 + z^3 + \frac{10}{x^3} + \frac{10}{y^3} + \frac{10}{z^3}$$

$$x^3 + \frac{10}{x^3}$$

$$a + \frac{10}{b} = b + \frac{10}{c} = c + \frac{10}{a}$$

$$a^2 bc + ac \cdot 10 = b^2 ac + 10 ab = c^2 ab + 10 bc$$

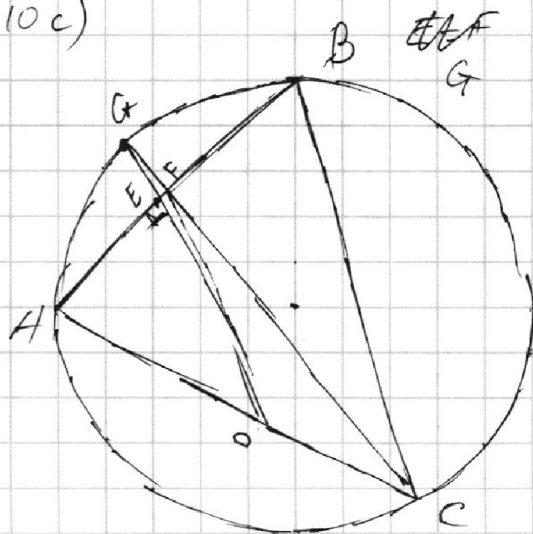
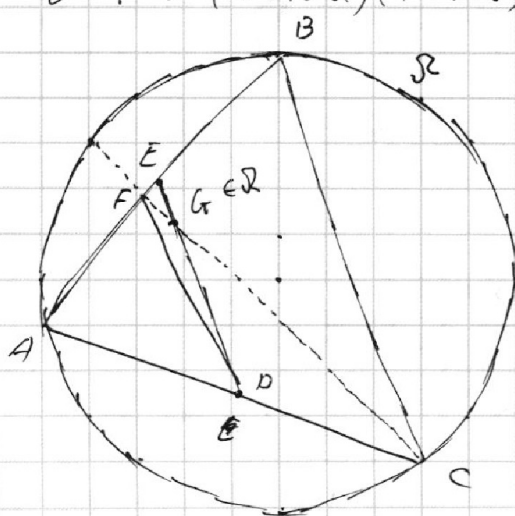
$$x^3 + \frac{10}{y^3} = y^3 + \frac{10}{z^3}$$

$$x^3 y^3 z^3 = 10$$

$$f = abc$$

$$\begin{cases} a + \frac{10}{b} = d \\ b + \frac{10}{c} = d \\ c + \frac{10}{a} = d \end{cases} \quad \begin{cases} abc + 10c = dabc \\ abc + 10a = dabc \\ abc + 10b = dabc \end{cases}$$

$$d^3 f^2 = (1 + 10a)(1 + 10b)(1 + 10c)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$\ln y - (y-1) \ln 4y + \ln 4 \ln y =$$

$$= \ln y (\ln y + \ln 4) - (y-1) \ln 4y \geq 0$$

$$\ln y \ln 4y - (y-1) \ln 4y \geq 0$$

$$\ln 4y (\ln y - y + 1) \geq 0$$

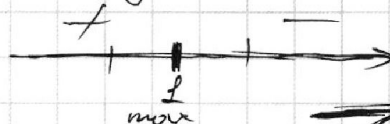
$$\ln ey \geq 0$$

$$f(y) \leq 0$$

$$\ln ey' = \frac{e}{ey} = \frac{1}{y}$$

$$f(y) = \ln ey - y$$

$$f' = \frac{e}{ey} - 1 = \frac{1}{y} - 1;$$



$$240 =$$

$$24 \cdot 10 =$$

$$8 \cdot 3 \cdot 10 = 16 \cdot 3 \cdot 5$$

$$4 \sqrt{15}$$

$$240 \quad 40$$

$$5 \quad 5$$

$$1200 \quad 200$$

$$\frac{1}{y} = 1$$

$$y = 1$$

$$12 \cdot 52 \cdot 2$$

$$5 \cdot 2 \cdot 126$$

$$12$$

$$6 \cdot 26 \cdot 12$$

$$6 \cdot 3$$

$$\ln 4y < 0$$

$$4y < 1$$

$$y < \frac{1}{4}$$

$$x + 2 < \frac{1}{4}$$

$$x < \frac{1}{4} - 2 = \frac{1-8}{4} =$$

$$x = y - 2$$

$$\frac{13}{13} \cdot \frac{13}{13} = \frac{169}{13}$$

$$(-2, -\frac{7}{4})$$

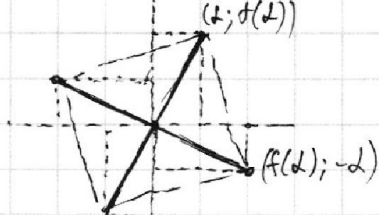
$$4+4+5+4+6+5+6 = 13$$

$$12+10+12 = 34$$

$$y = -2x^3 - ax$$

$$2x^3 + ax = -5x$$

$$y = 2x^3 + ax + 5x = 0$$



$$y = 5x$$

$$y = -\frac{1}{5}x$$

$$x(2x^2 + a + 5) = 0$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{a+5}{2}} = d$$

$$y = 5d$$

$$(5d, -d)$$

$$d = \sqrt{\frac{a+5}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{26}{2}} = \sqrt{13}$$

$$-2d^3 - ad = +5d$$

$$-2 \cdot 5^3 d^3 - 5d = -d$$

$$2 \cdot 5^3 d^3 + 5d - d = 0$$

$$10d^3 + 5da + 25d = 0$$

$$(2 \cdot 5^3 - 10)d^3 = +26d$$

$$2 \cdot 5^3 d^3 + 5da - d = 0$$

$$d^2 = \frac{\sqrt{2 \cdot 5^3 - 10}}{526}$$

$$d = \left(\frac{4 \sqrt{15}}{526} \right)^{-1}$$

$$ad = -(2d^3 + 5d); \quad a = -2d^2 + 5$$