



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Решите уравнение

$$6 \operatorname{tg} 2x - 1 + \operatorname{ctg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 0.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $13^{180} \cdot 17^{180}$?

3. [3 балла] Решите неравенство

$$\ln^2(x-1) - (x-2) \ln(3x-3) + (\ln 3) \ln(x-1) \geq 0.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = -\frac{2x^3}{3} + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = 3x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC . Лучи DE и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что $\frac{CF}{DF} = \sqrt{\frac{2}{23}}$.

6. [5 баллов] Числа x , y и z не все равны между собой, и при этом

$$x^3 + \frac{11}{y^3} = y^3 + \frac{11}{z^3} = z^3 + \frac{11}{x^3}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения xyz .

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = \sqrt{15}$, $AD = DC = \sqrt{6}$, $AC = 2\sqrt{3}$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA + SB = 2\sqrt{3} + \sqrt{15}$. Найдите:

а) объём пирамиды;

б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB , SBC и ребра SD .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

$$12 \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} - 1 + \frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x} = 0$$

$$12 \frac{\sin x}{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} - 1 + \frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x} = 0$$

Пусть $\cos x + \sin x = a$,
 $\sin x - \cos x = b$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{a+b}{2} \quad \cos x = \frac{a-b}{2}$$

$$12 \frac{(a+b)}{a-b} - 1 + \frac{a}{b} = 0$$

$$12 \frac{(a+b)}{(a-b)^2 - (a+b)^2} - 1 + \frac{a}{b} = 0$$

$$12 \frac{(a+b)(a-b)}{-4ab} - 1 + \frac{a}{b} = 0 \quad -3a^2 + 3b^2 - ab + a^2 = 0$$

$$2a^2 + ab - 3b^2 = 0 \quad D = b^2 + 24b^2 = 25b^2$$

$$\Rightarrow a = \frac{-b \pm 5b}{4} \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ a = -1,5b \end{cases}$$

$$1) a = b \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{ctg}(x - \frac{\pi}{4}) = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} 2x = 0$$

$$\text{при } x = \frac{\pi}{2} + \pi n \Rightarrow \operatorname{tg}(\pi + 2\pi n) = 0 \quad 0 = 0 \Rightarrow$$

$$1 \text{ серия: } x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$2) a = -1,5b \Rightarrow \operatorname{ctg}(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2} \Rightarrow 6 \operatorname{tg} 2x = \frac{3}{2}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{1}{4} \quad \text{т.к. } a = -1,5b, \text{ то } \sin x = -\frac{b}{2} \quad \cos x = -2,5b$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{5} \Rightarrow \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{2}{5 - 1} = \frac{10}{24} \neq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow a = -1,5b \text{ не подходит}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2

Пусть q - знаменатель протр. Очевидно $q \in \mathbb{Q}$
(т.к. если q - иррац., то $b = a \cdot q$ - ирр., т.к. целое
умножить на ирр. - это ирр. число (если это
целое не равно 0, а оно очев. не равно,
иначе $a = b = c = 0$)).

$$\Rightarrow b = aq \quad c = aq^2 \quad \Rightarrow abc = a^3 q^3 = 13^{180} \cdot 17^{180}$$

$$\Rightarrow aq = 13^{60} \cdot 17^{60} \quad (q > 0 \text{ по определению протр. пр.})$$

т.к. $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{Z}$, $abc \in \mathbb{Z}$, то

$$a = 13^x \cdot 17^y \quad c = 13^t \cdot 17^m \quad x, y, t, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$\Rightarrow q = \frac{b}{a} = \frac{13^{60} \cdot 17^{60}}{13^x \cdot 17^y} = 13^{60-x} \cdot 17^{60-y}$$

$$\Rightarrow c = bq = 13^{120-x} \cdot 17^{120-y} \quad \text{т.к. } a \in \mathbb{Z}, \text{ то } x \geq 0$$

и $y \geq 0$, а т.к. $c \in \mathbb{Z}$, то $120-x \geq 0$ и $120-y \geq 0$

$$\Rightarrow 0 \leq x \leq 120 \quad 0 \leq y \leq 120$$

$$\Rightarrow \text{вар-в выбрать пару } (x, y) - 121^2$$

Очевидно при любой такой паре $abc = 13^{180} \cdot 17^{180}$

и $a \in \mathbb{Z}$, т.к. $x \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow 13^x \in \mathbb{N}$ и аналог.

$17^y \in \mathbb{N}$.

Также $13^{120-x} \in \mathbb{N}$, т.к. $0 \leq x \leq 120$ и

$17^{120-y} \in \mathbb{N}$, т.к. $0 \leq y \leq 120$.

~~Ответ:~~ (Если бы q могло быть отриц., то очев.
ответ был бы b ? раза больше, т.е. $2 \cdot 121^2$)

Ответ: $\neq 121^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$\ln^2(x-1) - (x-2) [\ln 3 + \ln(x-1)] + \ln 3 \cdot \ln(x-1) \geq 0$$

$$\ln^2(x-1) + \ln(x-1) [\ln 3 - (x-2)] - (x-2) \ln 3 \geq 0$$

~~Рассматриваем $\ln(x-1) = t$ как квадратное от-но $\ln(x-1)$. Найдем корни:~~ Рассмотрим данное н-во.

$$\ln^2(x-1) + \ln(x-1) [\ln 3 - (x-2)] - (x-2) \ln 3 = 0$$

$$D = [\ln 3 - (x-2)]^2 + 4(x-2) \ln 3 = [\ln 3 + (x-2)]^2 \Rightarrow$$

$$\ln(x-1) = - \frac{[\ln 3 - (x-2)] \pm [\ln 3 + (x-2)]}{2}$$

$$\begin{cases} \ln(x-1) = x-2 & (1) \\ \ln(x-1) = -\ln 3 = \ln \frac{1}{3} & (2) \end{cases} \quad \begin{cases} e^{x-2} = x-1 & (1) \\ x-1 = \frac{1}{3} & (2) \end{cases} \quad (2): x = \frac{4}{3}$$

$$(1): e^{x-2} - x + 1 = 0 \quad (e^{x-2} - x + 1)' = e^{x-2} - 1 \Rightarrow \text{най-}$$

дем крит. т.: $e^{x-2} = 1 \quad x=2$. Заметим, что при $x=2$
 $\ln(x-1) = 0 = x-2 \Rightarrow$ это единств. реш. (т.к. оно
 находится в единств. крит. т. $\Rightarrow$ либо это экстремум, либо
 ф-ция монотонна). $\Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=\frac{4}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow$ чтоб в н-ве был знак ≥ 0 имеем:

$$x \in (-\infty; \frac{4}{3}] \cup [2; +\infty) \quad \text{ОДЗ: } x > 1 \Rightarrow$$

$$\text{Answer: } x \in (1; \frac{4}{3}] \cup [2; +\infty)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

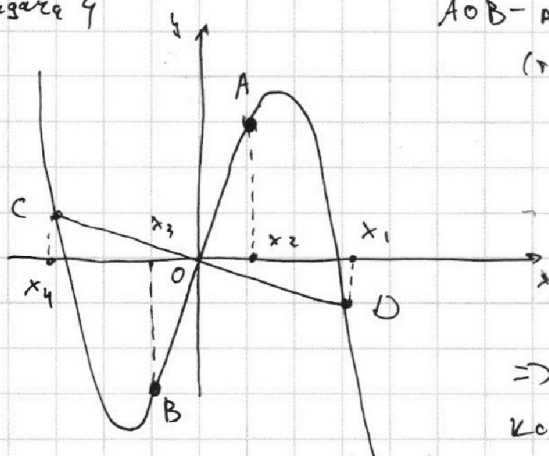
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4



AOB — ~~прямоугольный~~ **диагональ** квадрата
(т.е. т. A ∈ y = 3x и т. B ∈ y = 3x)

$$\Rightarrow -\frac{2}{3}x^3 + ax = 3x$$

(считаем, что x ≠ 0)

$$\Rightarrow -\frac{2}{3}x^2 + a = 3 \quad x^2 = \frac{3a-9}{2}$$

⇒ это ур-ние имеет ≤ 2

корни ⇒ прямая y = 3x пересекает график y = -2/3 x^3 + ax в ≤ 2 т.

(не считая т. O) ⇒ AB и есть диагональ квадрата.

Понятно, что вторая диагональ квадрата ~~лежит~~ **перпендикулярна** первой
⇒ лежит на прямой ⊥ y = 3x ⇒ на y = -x/3

Аналогично пусть C и D — точки пересек.

$$y = -\frac{x}{3} \text{ и } y = -\frac{2}{3}x^3 + ax \Rightarrow ABCD \text{ — квадрат с}$$

$$\text{ц. в т. O} \Rightarrow OC = OD = OA = OB.$$

Пусть точки B, A, C имеют абсциссы

x₁, x₂, x₃ и x₄ соотв.. Понятно, что x₄ = -x₁ и

x₂ = -x₃ (ΔBX₃O = ΔAX₂O т.к. AO = OB и ∠BX₃O = ∠AX₂O = 90° и ∠BOX₃ = ∠AOX₂. Аналогично. ΔCX₄O = ΔDOX₁.)

При этом ещё ΔCX₄O = ΔBOX₃ (так как ∠COX₄ = 90°

и ∠BOX₃ = ∠X₃BO и Δ прямоуго.) ⇒ CX₄ = OX₃. CX₄ — знат.

абсциссе. y = -x/3 в. X₄, а OX₃ имеет длину |x₃|, т.е. -x₃

$$\Rightarrow \text{найдем } x_4: -\frac{2}{3}x^3 + ax = -\frac{x}{3} \quad \frac{2}{3}x^2 = a + \frac{1}{3} \quad x^2 = \frac{3a+1}{2}$$

$$\Rightarrow x_4 = -\sqrt{\frac{3a+1}{2}}, \text{ либо } x_4 = \sqrt{\frac{3a+1}{2}}. \text{ Из равенства } \Delta \text{ мы}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4 (продолж.)

знаем, что $OX_4 = BX_3$, $\Rightarrow BX_3 = |x_4|$, а BX_3 - значение
ице $y = 3x$ в т. x_3 (со знаком "-")

$$\Rightarrow -3 \sqrt{\left| \frac{3a-9}{2} \right|} = -\sqrt{\left| \frac{3a+1}{2} \right|} \Rightarrow \cancel{9 \cdot \frac{3a-9}{2} = \frac{3a+1}{2}}$$

$$\cancel{81a^2 - 6 \cdot 81a + 81 \cdot 9 = 9a^2 + 6a + 1} \quad 9 \left| \frac{3a-9}{2} \right| = \left| \frac{3a+1}{2} \right|$$

$$|27a-81| = |3a+1| \Rightarrow a = 11\frac{1}{4}$$

$$a = \frac{8}{3}$$

Проверим эти a подставив в $-\frac{2}{3}x^3 + ax = 3x$

1) $a = \frac{8}{3} \Rightarrow -\frac{2}{3}x^3 + \frac{8}{3}x = 3x$ ($x=0$ считаем разлр.)

$$\Rightarrow -\frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3} = 3 \Rightarrow -2x^2 + 8 = 9 \quad x^2 = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{8}{3} - \text{н.с.}$$

2) $a = 11\frac{1}{4} \quad -2x^2 + 33\frac{3}{4} = 9 \quad x^2 = 12\frac{3}{8}$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{99}{8}} \Rightarrow x_3 = -\sqrt{\frac{99}{8}} \Rightarrow \text{т. В: } -3\sqrt{\frac{99}{8}} - \text{ордината}$$

$$\Rightarrow B\left(-\sqrt{\frac{99}{8}}; -3\sqrt{\frac{99}{8}}\right) \Rightarrow x_4 = -3\sqrt{\frac{99}{8}} \Rightarrow$$

$$\text{т. С: } -\left(\frac{-3\sqrt{\frac{99}{8}}}{3}\right) = \sqrt{\frac{99}{8}} \Rightarrow C\left(-3\sqrt{\frac{99}{8}}; \sqrt{\frac{99}{8}}\right)$$

$$\Rightarrow OC^2 \text{ по т. Пифагора: } \frac{99}{8} + 9 \cdot \frac{99}{8} = 10 \cdot \frac{99}{8}$$

$$\Rightarrow OC = \sqrt{55} \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow \text{Площадь квадрата: } \frac{(2 \cdot OC)^2}{2} =$$

$$= 2OC^2 = \frac{10 \cdot 99}{4} = \frac{990}{4}$$

Ответ: $a = 11\frac{1}{4}$; Площадь: $\frac{990}{4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

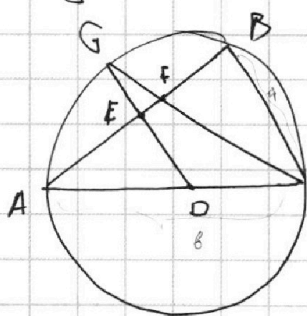
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 15



Мы знаем, что G - точка перес.
двух дуг. $\angle C$ остр. $\Rightarrow G$ - середина
дуги AB . т.к. E - середина AB , то
 $GE \perp AB$ ($\triangle AGB$ - р/б, т.к. G - сер. дуги
т.е. $AG = BG \Rightarrow GE$ - медиана $\Rightarrow$ высота)
 GED - одна прямая по усл. и т.к.
 $AE = EB$ и $AD = DC$, то DE - ср. линия
 $\Rightarrow ED \parallel BC \Rightarrow \angle ABC = \angle AED = 90^\circ$.

Пусть $AC = b$, $BC = a$, $AB = \sqrt{b^2 - a^2}$ (по т. Пифагора)

т.к. CF - дуга, то $BF = \frac{a \sqrt{b^2 - a^2}}{a + b} = \frac{a \sqrt{b - a}}{\sqrt{b + a}}$

$$\Rightarrow CF^2 \text{ по т. Пифагора: } BF^2 + BC^2 =$$

$$= \frac{a^2(b-a)}{b+a} + a^2 = \frac{a^2b - a^3 + a^2b + a^3}{a+b} = \frac{2a^2b}{a+b}$$

аналогично $AF = \frac{b \sqrt{b^2 - a^2}}{a+b} = \frac{b \sqrt{b-a}}{\sqrt{b+a}}$ $AE = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{2}$

$$\Rightarrow EF = AF - AE = \frac{b \sqrt{b-a}}{\sqrt{b+a}} - \frac{\sqrt{b-a} \sqrt{b+a}}{2} = \frac{2b \sqrt{b-a} - (a+b) \sqrt{b-a}}{2 \sqrt{b+a}} =$$

$$= \frac{(b-a) \sqrt{b-a}}{2 \sqrt{b+a}}$$

$$ED - \text{ср. л.} \Rightarrow ED = \frac{a}{2} \Rightarrow DF^2 = EF^2 + ED^2 =$$

$$= \frac{(b-a)^3}{4(b+a)} + \frac{a^2}{4} = \frac{CF^2}{4} - \frac{2}{23} = \frac{2a^2b}{(b-a)^3} = \frac{8a^2b}{(b-a)^3}$$

$$= \frac{(b-a)^3 + a^2(a+b)}{4(a+b)} \Rightarrow \frac{CF^2}{DF^2} = \frac{2}{23} = \frac{\frac{2a^2b}{a+b}}{\frac{(b-a)^3 + a^2(a+b)}{4(a+b)}} =$$

$$= \frac{8a^2b}{b^3 - 3b^2a + 4a^2b} = \frac{8a^2}{b^2 - 3ab + 4a^2} \Rightarrow 184a^2 = 2b^3 - 6ab + 8a^2$$

$$b^2 - 3ab + 4a^2 = 92a^2 = 0 \quad b^2 - 3ab - 88a^2 = 0$$

$$D = 9a^2 + 4 \cdot 88 \cdot a^2 = a^2 \cdot 361 = (19a)^2 \Rightarrow b = \frac{3a \pm 19a}{2}$$

$$\Rightarrow b = 11a \quad (-8a - \text{нет. ч.н.}) \Rightarrow \angle C = \arccos \frac{1}{11}, \quad \angle A = \arcsin \frac{1}{11}$$

ответ: $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = \arcsin \frac{1}{11}$, $\angle C = \arccos \frac{1}{11}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 6

Пусть $x^3 = a$, $y^3 = b$, $z^3 = c \Rightarrow a + \frac{11}{b} = b + \frac{11}{c} = c + \frac{11}{a}$

Перемножим три равенства $\Rightarrow abc + \frac{11^3}{abc} + 11a + \frac{121}{a} +$

$+ \frac{11b + 121}{b} + \frac{11c + 121}{c}$

~~Покажем, что $a, b, c > 0$ (т.к. если равно + меньше 0, то $xyz < 0$, а у нас будет отрицат., где $\rightarrow 0$, если равно 3, то a, b, c умножим все. Пусть 1) $a, b, c > 0$. Тогда по нер-ву о средн.~~

~~$abc + \frac{11^3}{abc} > 3\sqrt[3]{11^3} = 33$ $11a + \frac{121}{a} > 2\sqrt{11a \cdot \frac{121}{a}} = 22$ $11b + \frac{121}{b} > 22$~~

$\Rightarrow$ произв. трех слага.

По нер-ву о средн. $xyz \leq \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3}$ (рав-во не достигается, т.к. они не все =)

Пусть ~~$a > b > c$~~ . $a, b, c > 0$. Если a - наиб из них (без огр. общности), то c - наим., т.к. если b - наим., то $a + \frac{11}{b} > c + \frac{11}{a}$ (т.к. $a > c$ и $b \leq a$)

$\Rightarrow$ средн них равно 30трин. (если 1, то фактически не (1) все тогда, а ~~все~~ ~~xyz~~ ~~возьмем~~ получим те же рав-ва, но xyz ~~будет~~ увеличится т.к. станет меньше, а все 3 числа стр. дабы не могут поменять почему и все попох. не могут).

Пусть $a > 0$, а ~~$b, c < 0$~~ $\Rightarrow$ ~~$b > c$~~ , т.к. если $b > c$, то

~~$a > b > c$~~ $\Rightarrow a + \frac{11}{b} > b + \frac{11}{c} \Rightarrow b > c$ ~~$b > c$~~

Примечание: $a \neq b$, т.к. если $a = b$, то $\frac{11}{b} = \frac{11}{c} \Rightarrow b = c \Rightarrow a = b = c$, а по усл. это не так.

$b > c$, т.к. если нет, то $c > b \Rightarrow \frac{11}{c} < \frac{11}{b} \Rightarrow b + \frac{11}{c} < c + \frac{11}{b} \Rightarrow$

$a > 0 > b > c$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

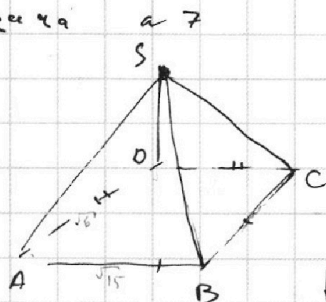
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача

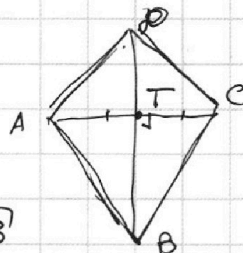


$$\angle ADC = 90^\circ, \text{ т.к. } \triangle ADC: AD^2 + DC^2 = 12 = AC^2$$

$$\text{Пусть } SD = x \Rightarrow \text{ по Т. Пифагора}$$

$$\text{в } \triangle ADS: AS = \sqrt{6 + x^2}$$

Найти BD.



$$T = DB \cap AC$$

т.к. $AD \cong DC$, а $AB \cong CB$, то

BD - пер. к AC

$$\Rightarrow BT = \sqrt{AB^2 - AT^2} = \sqrt{15 - 3} = 2\sqrt{3}$$

$$DT = \sqrt{AD^2 - AT^2} = \sqrt{6 - 3} = \sqrt{3} \Rightarrow BD = 3\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\text{в } \triangle DSB \text{ по Т. Пифагора: } BS = \sqrt{SD^2 + BD^2} = \sqrt{x^2 + 27}$$

$$\Rightarrow AS + BS = \sqrt{x^2 + 6} + \sqrt{x^2 + 27} = 2\sqrt{3} + \sqrt{15}$$

$$\Rightarrow x^2 + 6 = x^2 + 27 + 12 + 15 + 12\sqrt{5} - 2\sqrt{x^2 + 27}(2\sqrt{3} + \sqrt{15})$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x^2 + 27} \cdot \sqrt{3}(2 + \sqrt{5}) = 48 + 12\sqrt{5} \Rightarrow$$

$$\sqrt{x^2 + 27} = \frac{24 + 6\sqrt{5}}{2\sqrt{3} + \sqrt{15}} = \frac{24 + 6\sqrt{5}}{\sqrt{12} + \sqrt{15}} = \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{12})(24 + 6\sqrt{5})}{3}$$

$$\Rightarrow x^2 + 27 = \frac{(27 - 2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{5}) \cdot 36(16 + 5 + 8\sqrt{5})}{9}$$

$$x^2 = 4(27 - 12\sqrt{5})(21 - 8\sqrt{5}) - 27 = 4(567 - 216\sqrt{5} - 252\sqrt{5} + 480) - 27 = 4(1047 - 468\sqrt{5}) - 27 = 4161 - 1872\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{4161 - 1872\sqrt{5}} \quad S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD \cdot \sin 90^\circ}{2} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 9$$

$$\Rightarrow V_{SABCD} = \frac{1}{3} \sqrt{4161 - 1872\sqrt{5}} \cdot 9$$

б) : шар. тоже имеет от-но
 $SOB \Rightarrow$ его центр лежит в
 SOB , при том он касается SD
и $OB \Rightarrow$ он лежит на бисс. $\angle SOB$

$$\text{Ответ: а) } 3 \sqrt{4161 - 1872\sqrt{5}}$$

Очевидно, что пирамида имеет от-но пл-ти SOB

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1 ~~продолжить~~

$$6. \frac{\sin 2x}{\cos 2x} - 1 + \frac{\cos(x - \frac{\pi}{4})}{\sin(x - \frac{\pi}{4})} = 0$$

$$\frac{12 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} - 1 + \frac{\cos x + \sin x}{-\cos x + \sin x} = 0$$

$$\begin{cases} \cos x + \sin x = a \\ -\cos x + \sin x = b \end{cases}$$

$$\Rightarrow 12 \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x + \sin x}{-\cos x + \sin x} - 1 = 0$$

$$\frac{12(a-b)}{a+b} + \frac{a}{b} - 1 = 0$$

$$\frac{12(a-b)}{\frac{a+b}{(a+b)^2 - (a-b)^2}} + \frac{a}{b} - 1 = 0$$

$$\frac{12(a-b)(a+b)}{4ab} + \frac{a}{b} - 1 = 0$$

$$3a^2 - 3b^2 + a^2 - ab = 0$$

$$4a^2 - 3b^2 - ab = 0$$

$$4a^2 - ab - 3b^2 = 0 \quad D = b^2 + 48b^2 = (7b)^2$$

$$\Rightarrow a = \frac{b \pm 7b}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = b \\ a = -\frac{3}{4}b \end{cases}$$

$$1) a = b \Rightarrow \cos x - \sin x = \cos x + \sin x \Rightarrow \sin x = 0$$

$$\Rightarrow \tan 2x = 0 \Rightarrow \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \text{но т.к. } \sin x = 0 \Rightarrow$$

$$x = \pi n$$

$$\cos x - \sin x = -1,5 \quad (\sin x - \cos x)$$

$$\cos x + \sin x = -1,5 \quad \sin x + 1,5 \cos x \Rightarrow \cos x - 2 \sin x = 0$$

$$\sqrt{5} (\cos x \cos \frac{1}{\sqrt{5}} - \sin x \sin \frac{1}{\sqrt{5}}) = \sqrt{5} \cos\left(x + \arccos \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow x + \arccos \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



2

$$\frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$$

$$\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

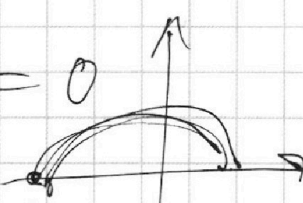
$$\frac{2 \frac{\sin x}{\cos x}}{1 - \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{2 \sin x}{\cos - \sin}$$

$$\frac{\cos x + \frac{\sqrt{2}}{4}}{\sin x - \frac{\sqrt{2}}{4}}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x}{\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x}$$

$$\frac{\frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos x}}{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$= 1 + \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = 0$$



$$\frac{12 \frac{a-b}{a+b}}{1 - \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}}$$

$$= 1 + \frac{a}{b} = 0$$

$$\frac{12 \frac{a-b}{a+b}}{-\frac{(a-b)^2 + (a+b)^2}{(a+b)^2}} = 1 + \frac{a}{b}$$

$$6 \tan 2x =$$

$$\frac{12(a-b)}{4ab} - 1 + \frac{a}{b} = 0$$

$$\frac{3(a-b)}{a} - b + a = 0$$

$$3(a-b) - ab + a^2 = 0$$

$$a^2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$a^2 = \sin 2x + 1$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sim \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$3 \sin x - \cos^2 x + \sin^2 x + \sin 2x + 1 = 0$$

$$\cos \sin 2x - \cos 2x$$

$$\textcircled{1}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x)$$

$$\cos + \sin$$

$$D = b^2 + \dots$$

$$\sin x \cos x = \cos x \sin x$$

$$\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\textcircled{-1}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$6 \tan 2x = \frac{3}{2}$$

$$D = \frac{-b}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\textcircled{-\frac{1}{2}}$$

$$\tan 2x = \frac{1}{4}$$

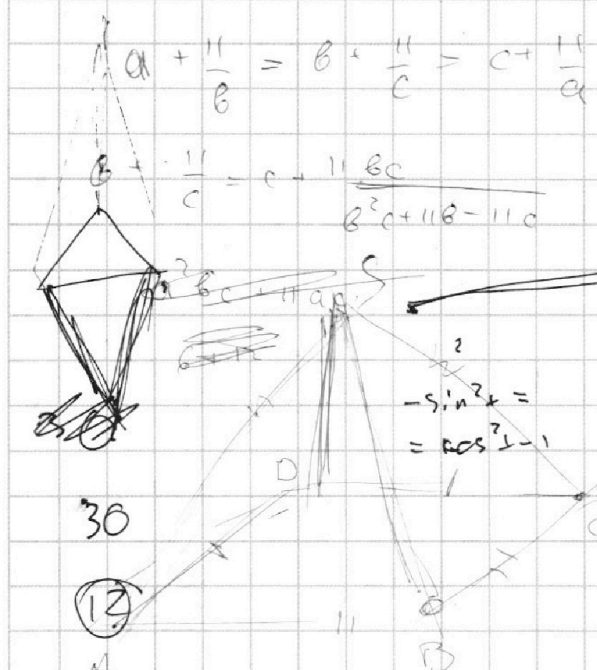
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a + \frac{11}{b} = b + \frac{11}{c} = c + \frac{11}{a}$$

$$a = b + \frac{11}{c} - \frac{11}{b} = \frac{b^2 + 11b - 11c}{bc}$$

$$\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$$

$$= \frac{2 \sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\sin 2x \cdot \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\cos x \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin x \frac{\sqrt{2}}{2}}{\cos \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin \frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$\ln e^{2x} = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$$

$x < 2, \text{ so } \dots$

$$\frac{12 \sin x \cos x}{(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos x + \sin x)} + \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} - 1 = 0$$

$$\frac{12(a+b)(a-b)}{ab} = 1 \quad 12a^2 - 12b^2 = ab \quad 12a^2 - ab - 12b^2 = 0$$

$$b = b^2 + 4 \cdot 12^2 \cdot b^2 = b^2 (1 + 24^2)$$

$$\frac{-b \pm b \sqrt{24^2 + 1}}{24} = a$$

Opt. A

$$\ln^2(x-1) - (x-2)(\ln 3 + \ln(x-1)) + \ln 3 \cdot \ln(x-1) \geq 0$$

$$a^2 - (x-2) \cdot b - (x-2)a + ab$$

1600
240
32

4188 - 27

4161

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$-2x^2 + 3a = 9$$

$$-2x^2 + 8 = 9$$

$$-2x^2$$

$$2x^2 = -1$$

$$\frac{156}{6} = 16$$

$$a \cdot 36 = 6 \cdot (6 + 150) = 12 \cdot 36 \cdot 16 = 3^3 \cdot 2^6$$

$$a > b > c$$

$$\frac{11}{a} < \frac{11}{b} < \frac{11}{c}$$

$$a > b > c$$

$$-\frac{2}{3}x^3 + ax = 3x$$

$$27a - 81 = -3a - 1$$

$$-\frac{2}{3}x^2 + a = 3$$

$$30a = 80$$

$$2x^2 = a - 3$$

$$a = \frac{8}{3}$$

$$x^2 = \frac{3a+1}{2}$$

$$a > c > b$$

$$a > b > c$$

$$b \cdot$$

$$-\frac{2}{3}x^3 + a = -\frac{x}{3}$$

$$\frac{11}{c} < \frac{11}{b}$$

$$-\frac{2}{3}x^2 + a = -\frac{1}{3}$$

$$a = \frac{82}{24} = \frac{41}{12}$$

$$24a = 82$$

$$x = \frac{3a-9}{2}$$

$$b + \frac{11}{c}$$

$$\frac{41}{4} + 1 =$$

$$= 11,25$$

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

$$a > b > c$$

$$f(f(x)) =$$

$$\begin{matrix} 27 \\ 41 \\ 27 \\ 108 \\ 1107 \end{matrix}$$

$$a > b > c$$

$$a > b > c$$

$$a + \frac{11}{b}$$

$$c + \frac{11}{a} < a + \frac{11}{b}$$

$$a + \frac{11}{b} < c$$

$$a + \frac{11}{b} = b + \frac{11}{c}$$

$$b + \frac{11}{c} = c + \frac{11}{a}$$

$$c + \frac{11}{a}$$

$$\frac{135}{12} = \frac{45}{4}$$

$$\begin{matrix} 81 \\ 12 \\ 16 \\ 81 \\ 97 \end{matrix}$$

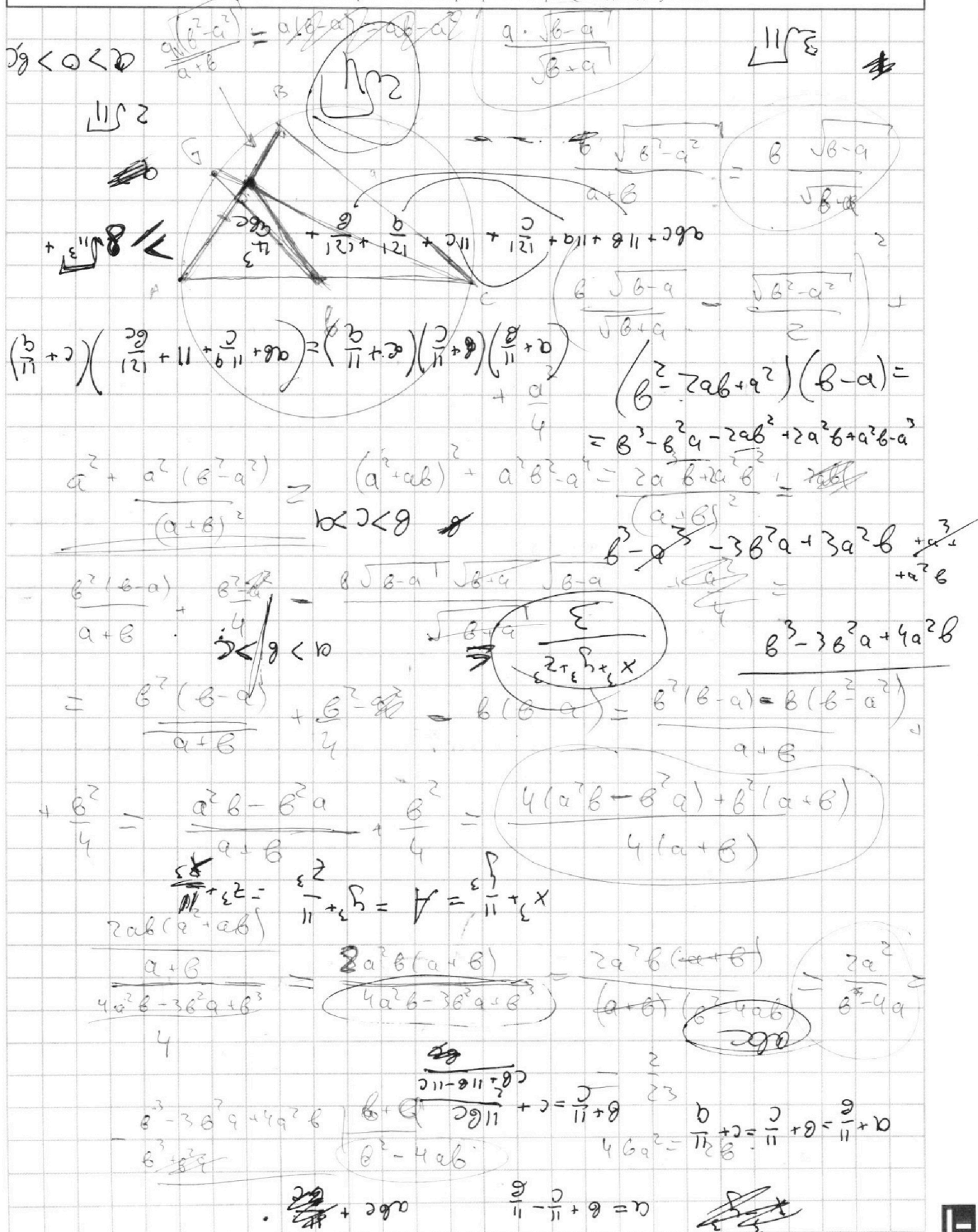
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

