



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 15



1. [3 балла] Вася строит башни из кубиков. Когда он построил N башен по 22 кубика, у него осталось 3 кубика. После чего он из всех своих кубиков построил $N - 1$ башню так, что во всех башнях кубиков оказалось поровну. Какое наибольшее количество кубиков могло быть у Васи, если известно, что их меньше 300?

2. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^2 + 7x + 12| + |x^2 + 2x - 8| \leq |5x + 20|.$$

3. [4 балла] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2 + 3x + 3 = 6^y.$$

4. [5 баллов] Вокруг равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) описана окружность Ω . Прямая, содержащая биссектрису AD треугольника ABC , пересекает повторно Ω в точке E . Найдите периметр четырёхугольника $ABEC$, если известно что площади треугольников BED и CED равны 5 и 6 соответственно.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых существует значение параметра b такое, что уравнение $5x^2 + (2a + 9)x + 7a - 10b = 0$ имеет два корня x_1 и x_2 таких, что $5 \leq x_1 \leq 10$ и $14 \leq x_2 \leq 15$.

6. [5 баллов] Кузнечик прыгает по целочисленным узлам координатной сетки. За один шаг он может либо переместиться на одну клетку вверх или вправо, если при этом он попадает в точку, в которой не был раньше; либо вернуться на один шаг назад по уже пройденному пути – соответственно, вниз или влево. Сколько существует различных путей с началом в точке $O(0; 0)$ и концом в точке $A(3; 5)$ таких, что в точку A кузнечик попадает не более чем за 10 шагов? (Достигая точки A , кузнечик останавливается.)

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность ω , а на дуге AC , не содержащей точку B , взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F . На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = CF$ и $CY = AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF = 7,5$, $XY = 15$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N

n - кол-во кубиков

мы знаем что: $n = 22N + 3$ и $n = q(N-1)$, где q - какое-то натуральное
и $q < 10$

$$\begin{cases} n = 22N + 3 \\ n = q(N-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} n - 3 = 22N \\ n + q = qN \end{cases} \Rightarrow \frac{n-3}{n+q} = \frac{22}{q}$$

~~$$\begin{cases} n - 3 = 22N \\ n = qN \end{cases} \Rightarrow \frac{n-3}{n} = \frac{22}{q}$$~~

$$qn - 3q = 22n + 22q$$

$$n(q-22) = 25q$$

$$n = \frac{25q}{q-22} = \frac{25q - 550 + 550}{q-22} = 25 + \frac{550}{q-22}$$

if: $q_1 > q_2$:

$$n_1 < n_2 \Leftrightarrow 25 + \frac{550}{q_1-22} < 25 + \frac{550}{q_2-22} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow q_2 - 22 < q_1 - 22 \Leftrightarrow q_1 > q_2, \text{ значит}$$

чем меньше q тем больше n , значит $n_{\max}$ достигается

при $q_{\min}$

мы знаем что $n \leq 300$

$$\frac{25q}{q-22} \leq 300$$

$$\frac{q}{q-22} < 12$$

$$q < 12q - 264$$

$$11q > 264$$

$$q > 24$$

~~$$q \geq 25$$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



н.к. $n \in \mathbb{N}$, то n -целое:

$$n = 25 + \frac{550}{q-22}$$

целое целое $\Rightarrow$ целое

н.к. $\frac{550}{q-22}$, то же целое, то $550 \div q-22$

3 ~~на~~ самых маленьких делителях

числа 550 это: 1, 2, 5,

$q-22$ — делитель числа 550, т.к. $550 \div q-22$

значит либо $q-22 \in \{1, 2, 5\}$ или $q-22 > 5$

1) $q-22 = 1$
 $q = 23$, но $q > 24$ — противоречие

2) $q-22 = 2$
 $q = 24$, но $q > 24$ — противоречие

3) $q-22 = 5$
 $q = 27$, подходит.

значит $n_{\max} = 27 \Rightarrow n_{\max} = 25 + \frac{550}{27-22} = 25 + 110 = 135$

проверка: $N = 6$; $n_{\max} = 6 \cdot 22 + 3 = 135$

$n_{\max} = 27 \cdot 5$

ОТВЕТ: 135

в этом случае

$q > 24$, а в

случае $q \in \{1, 2, 5\}$ $q \leq 24$,

а значит в 1 случае

меньше $q > 2$ случае

и доказанию ранее

и в 1 случае больше.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N 2

$$|x^2 + 4x + 12| + |x^2 + 2x - 8| \leq |5x + 20|$$

$$x^2 + 4x + 12 = 0$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$5x + 20 \geq 0$$

$$x \geq -4$$

$$D = 49 - 48 = 1$$

$$D = 4 + 32 = 36$$

$$x_1 = \frac{-4 + 1}{2} = -3$$

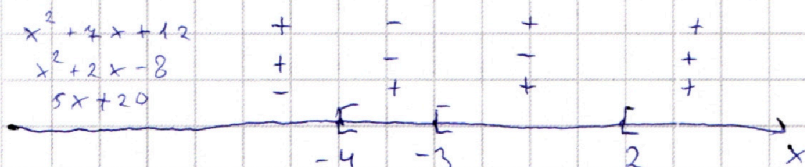
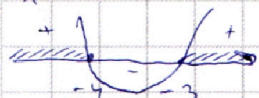
$$x_1 = \frac{-2 + 6}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-4 - 1}{2} = -4$$

$$x_2 = \frac{-2 - 6}{2} = -4$$

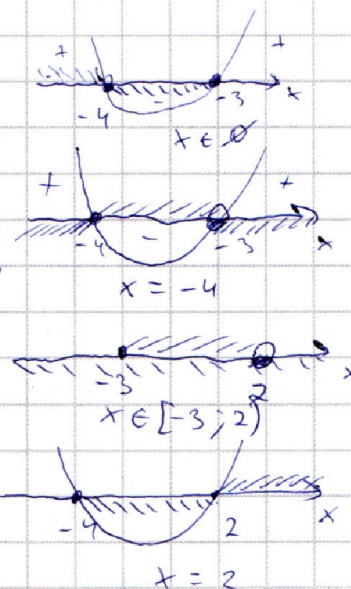
$$x^2 + 4x + 12 \geq 0$$

$$x^2 + 2x - 8 \geq 0$$



$$\begin{cases} x < -4 \\ x^2 + 4x + 12 + x^2 + 2x - 8 \leq -5x - 20 \\ -4 \leq x < -3 \\ -x^2 - 4x - 12 - x^2 - 2x + 8 \leq 5x + 20 \\ -3 \leq x < 2 \\ x^2 + 4x + 12 - x^2 - 2x + 8 \leq 5x + 20 \\ x \geq 2 \\ x^2 + 4x + 12 + x^2 + 2x - 8 \leq 5x + 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -4 \\ x^2 + 4x + 12 \leq 0 \\ -4 \leq x < -3 \\ x^2 + 4x + 12 \geq 0 \\ -3 \leq x < 2 \\ 0 \leq 0 \\ x \geq 2 \\ x^2 + 2x - 8 \leq 0 \end{cases}$$



$$\text{Ответ: } x \in \{-4\} \cup [-3, 2]$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 3

$$x^2 + 3x + 3 = 6^y$$

$$x^2 + 3x + 3 - 6^y = 0$$

$$D = ~~-3 \pm \sqrt{9 - 4(3 - 6^y)}~~ \quad 9 - 12 + 4 \cdot 6^y = 4 \cdot 6^y - 3$$

* для того чтобы ~~был~~ корень x при заданном y
существовал $D \geq 0$:

$4 \cdot 6^y - 3 \geq 0$. Допустим что $y < 0$, тогда ^{скажем что} $y' = -y$
т.к. y -целое, то $y \leq -1 \Leftrightarrow y' \geq 1$

$$6^{y'} \geq \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{6^{y'}} \geq \frac{3}{4}$$

$$\frac{4}{3} \geq 6^{y'} \geq 6^1$$

$13 \geq 6$ - но это никак противоречие, значит

$$y > 0$$

предположим $y \geq 1$, тогда $6^y \geq 3$:

$6^y \geq 3$

$$x^2 + 3x + 3 = 6^y$$

т.к. $x^2 \geq 3$ и x -целое, то $x^2 \geq 9$, а $x \geq 3$,

скажем $x = 3x'$, x' -целое

$$9x'^2 + 9x' + 3 = 6^y$$

$$3(3(x'^2 + x') + 1) = 6^y$$

т.к. $3(x'^2 + x') + 1 \not\equiv 3$, то $3(3(x'^2 + x') + 1) \equiv 3$, но $\nexists y \Rightarrow x^2 + 3x + 3 \equiv 3$, но $\nexists$
предположим $y \geq 2 \Rightarrow y - 2 \geq 0 \Rightarrow 6^{y-2}$ -целое, тогда

$6^y = 36 \cdot 6^{y-2} = 9 \cdot 4 \cdot 6^{y-2}$, но тогда $6^y \equiv 9$, но $x^2 + 3x + 3 \not\equiv 9$,
противоречие $\Rightarrow y \leq 2$, т.к. y -целое, то $y \leq 1$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Мы знаем что $y \geq 0$, и $y \leq 1$, и y целое $\Rightarrow y \in \{0; 1\}$.

$y = 0$:

$$x^2 + 3x + 3 = 1$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$x_1 = \frac{-3 + 1}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-3 - 1}{2} = -2$$

$y = 1$:

$$x^2 + 3x + 3 = 6$$

$$x^2 + 3x - 3 = 0$$

$$D = 9 + 12 = 21$$

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{21}}{2} \text{ — это не целое число — не подходит}$$

$$x_2 = \frac{-3 - \sqrt{21}}{2} \text{ — это не целое число — не подходит}$$

ЗНАЧАТ ЕСТЬ ТОЛЬКО 2 ПАРЫ: $(-1; 0); (-2; 0)$

Ответ: $(-1; 0); (-2; 0)$

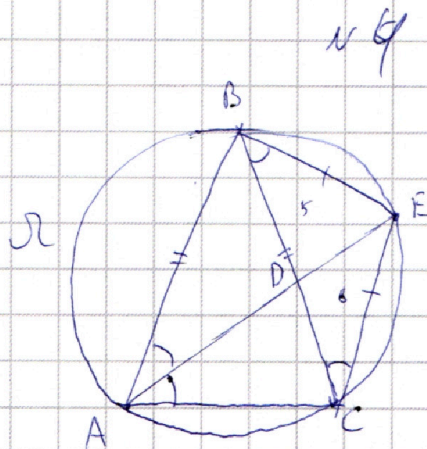
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решение:

$$\angle BAE = \angle EAC, \text{ т.к. } AD - \text{сущ. } \triangle ABC$$

т.к. ~~Е ∈ R~~ ~~Е ∈ R~~

$A, B, C \in R$, т.к. R - сущ. окруж. около $\triangle ABC$

$E \in R$, т.к. $E = (AD) \cap R$.

$\Rightarrow A, B, C, E \in R \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle AEC$ - вписанные

углы $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle EBC = \angle EAC \text{ и } \angle BAE = \angle BCE$$

но т.к. $\angle BAE = \angle EAC$, то $\angle EBC = \angle BCE \Rightarrow$

$$\Rightarrow \triangle ECB - \text{равноб.}, BE = EC.$$

Дано:

$\triangle ABC - \text{н.б.}$

$AB = BC$

R - сущ. окруж. около $\triangle ABC$

$AD - \text{сущ. } \triangle ABC$

$E = (AD) \cap R$

$\triangle ABE$

$S_{ABED} = 5$

$S_{\triangle CED} = 6$

Найти:

~~Решение:~~

$$P_{ABEC} = ?$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐



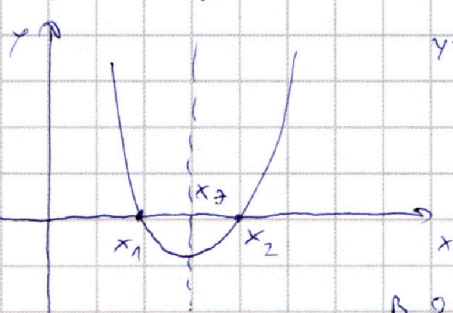
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N 5

$$f(x) = 5x^2 + (29+9)x + 42 - 10b = 0$$

$$x_0 = \frac{-(29+9)}{10} = -0,2 - 0,9$$



$$y = 5x^2 + (29+9)x + 42 - 10b$$

В ОБЩЕМ ВИДЕ КОРНИ ~~КА~~ $f(x)$ ВЫИЗЖАТ

$$\text{ТАК: } x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = x_0 \pm \frac{\sqrt{D}}{2a}$$

$$\text{В НАШЕМ СЛУЧАЕ: } x_0 \pm \frac{\sqrt{D}}{10}$$

$$\text{СНАХЕЖ ЧТО } \frac{\sqrt{D}}{10} = 2$$

$$x_1 = x_0 - 2$$

$$x_2 = x_0 + 2$$

$$5 \leq x_1 \leq 10$$

$$5 \leq -0,29 - 0,9 + 2 \leq 10$$

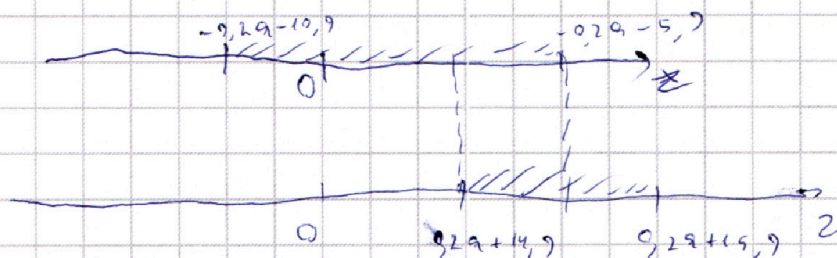
$$0,29 + 5,9 \leq -2 \leq 0,2 + 10,9$$

$$-0,29 - 10,9 \leq 2 \leq -0,29 - 5,9$$

$$14 \leq x_2 \leq 15$$

$$14 \leq -0,29 - 0,9 + 2 \leq 15$$

$$0,29 + 14,9 \leq 2 \leq 0,29 + 15,9$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

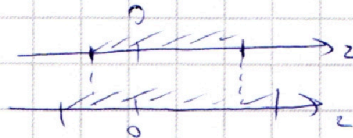


что бы 2 - существовал эти 2 интервала

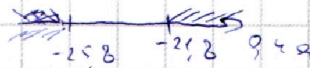
должны пересекаться и средноточек этого

пересечения должна быть хотя бы одна большая 0

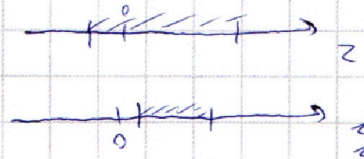
$$1) \begin{cases} 0,2a + 14,5 \leq -0,2a - 10,9 \\ 0,2a + 15,9 \geq -0,2a - 5,9 \\ -0,2a - 5,9 > 0 \end{cases}$$



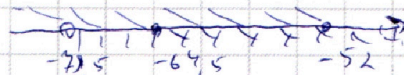
$$\begin{cases} 0,4a \leq -25,8 \\ 0,4a \geq -21,8 \\ 0,2a \leq -5,9 \end{cases} \Rightarrow a \in \emptyset$$



$$2) \begin{cases} 0,2a + 14,9 \geq -0,2a - 10,9 \\ 0,2a + 14,9 \leq -0,2a - 5,9 \\ 0,2a + 15,9 > 0 \end{cases}$$

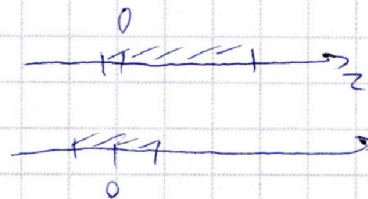


$$\begin{cases} 0,4a \geq -25,8 \\ 0,4a \leq -20,8 \\ 0,2a \geq -15,9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq -64,5 \\ a \leq -52 \\ a \geq -79,5 \end{cases}$$

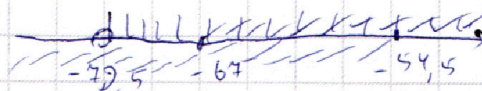


$$a \in [-64,5; -52]$$

$$3) \begin{cases} 0,2a + 15,9 \geq -0,2a - 10,9 \\ 0,2a + 15,9 \leq -0,2a - 5,9 \\ 0,2a + 15,9 > 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 0,4a \geq -26,8 \\ 0,4a \leq -21,8 \\ 0,2a \geq -15,9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq -67 \\ a \leq -54,5 \\ a \geq -79,5 \end{cases}$$



$$a \in [-67; -54,5]$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

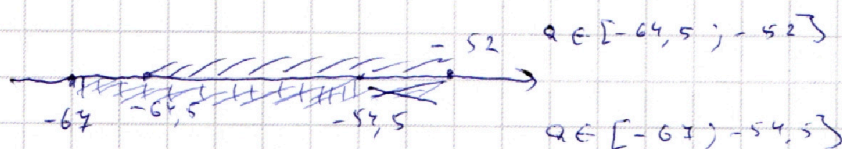
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Остало сь ОБЪЕДИНИТЬ МНОЖЕСТВА и при которых
 z - СУЩЕСТВУЕТ.



ВНАЧИТ ПРИ $a \in [-67, -52]$ СУЩЕСТВУЕТ

ПОЛОЖИТЕЛЬНУЮ z ПРИ КОТОРОМ $5 \leq x_1 - z \leq 10$ И

$$14 \leq x_2 + 2 \leq 10$$

$$z = \frac{\sqrt{D}}{10} = \frac{\sqrt{(2a+9)^2 - 140a + 200b}}{10} = \frac{\sqrt{4a^2 + 36a + 81 - 140a + 200b}}{10} =$$

$$= \frac{\sqrt{4a^2 - 104a + 81 + 200b}}{10}$$

ТЕПЕРЬ ДАВАЙТЕ ЗАФИКСИРУЕМ a , ТОГДА z - ЗАВИСИ-
мост от b , ПРИ ЭТОМ ОБОЗНАЧИМ $4a^2 - 104a + 81 = t$, ТОГДА

$$b \in (-\infty, +\infty)$$

$$200b \in (-\infty, +\infty)$$

$$t + 200b \in (-\infty, +\infty)$$

$$\sqrt{t + 200b} \in [0, +\infty), \text{ Т.К. ПОДКОРЕННУЮ ДОЛЖНО БЫТЬ БОЛЬШЕ 0,}$$

$$\frac{\sqrt{t + 200b}}{10} \in [0, +\infty) \text{ А ЗНАЧИТ ПРОСТО СПАДАЮТ ВСЕ ЗНАЧЕНИЯ}$$

$z \in [0, +\infty)$, А ЗНАЧИТ ПРИ ЗАДАНИИ a МЫ МОЖЕМ ПОЛУЧИТЬ
 b ТАК ЧТОБЫ z БЫЛО ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

А значит если для заданного α существует
 z при котором $\text{или } 5,5x_2 - z \leq 10, \text{ или } 17 \leq x_2 + 2 \leq 15$, то
мы можем подобрать в при котором z и также.
значит условие выполняется для всех α из
интервала $\alpha \in [-64; -52]$

Ответ: $[-64; -52]$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

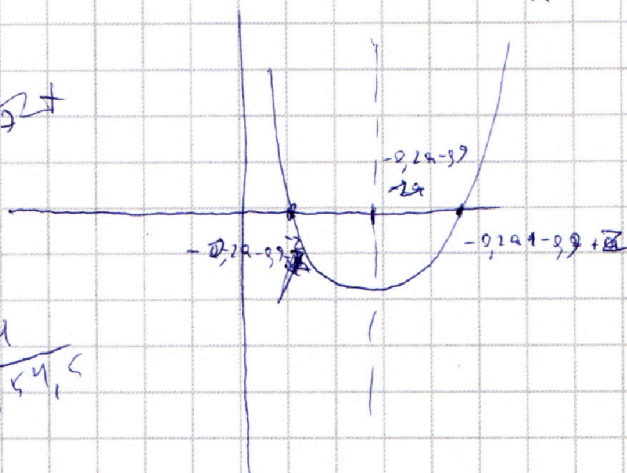
$$5x^2 + (2a+9)x + 4a - 10b = 0$$

$$x = \frac{-(2a+9) \pm \sqrt{(2a+9)^2 - 20(4a-10b)}}{2 \cdot 5} = \frac{-2a-9 \pm \sqrt{4a^2+36a+81-80a+200b}}{10} = \frac{-2a-9 \pm \sqrt{4a^2-44a+81+200b}}{10}$$

$$x_b = \frac{-(2a+9)}{2 \cdot 5} = -0,2a - 0,9$$

$$x = -0,2a - 0,9 \pm \frac{\sqrt{4a^2 - 44a + 81 + 200b}}{10}$$

$\Delta \geq 0$



$$\begin{array}{r} 218 \overline{) 14} \\ -20 \\ \hline 18 \\ -16 \\ \hline 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 218 \overline{) 14} \\ -20 \\ \hline 18 \\ -16 \\ \hline 20 \\ 208 \overline{) 14} \\ -20 \\ \hline 18 \\ -16 \\ \hline 20 \end{array}$$

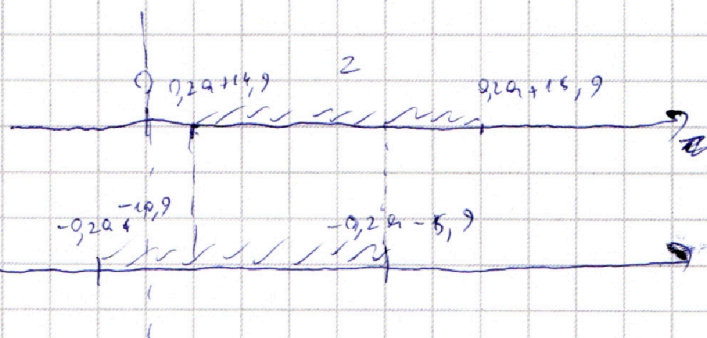
$$14 \leq -0,2a - 0,9 + 2 \leq 15$$

$$0,2a + 14,9 \leq z \leq 0,2a + 15,9$$

$$15 \leq -0,2a - 0,9 - 2 \leq 10$$

$$0,2a + 15,9 \leq -z \leq 0,2a + 10,9$$

$$-0,2a - 10,9 \leq z \leq -0,2a - 5,9$$



$$\begin{array}{r} 268 \overline{) 14} \\ -24 \\ \hline 18 \\ -16 \\ \hline 20 \\ 268 \overline{) 14} \\ -24 \\ \hline 18 \\ -16 \\ \hline 20 \end{array}$$



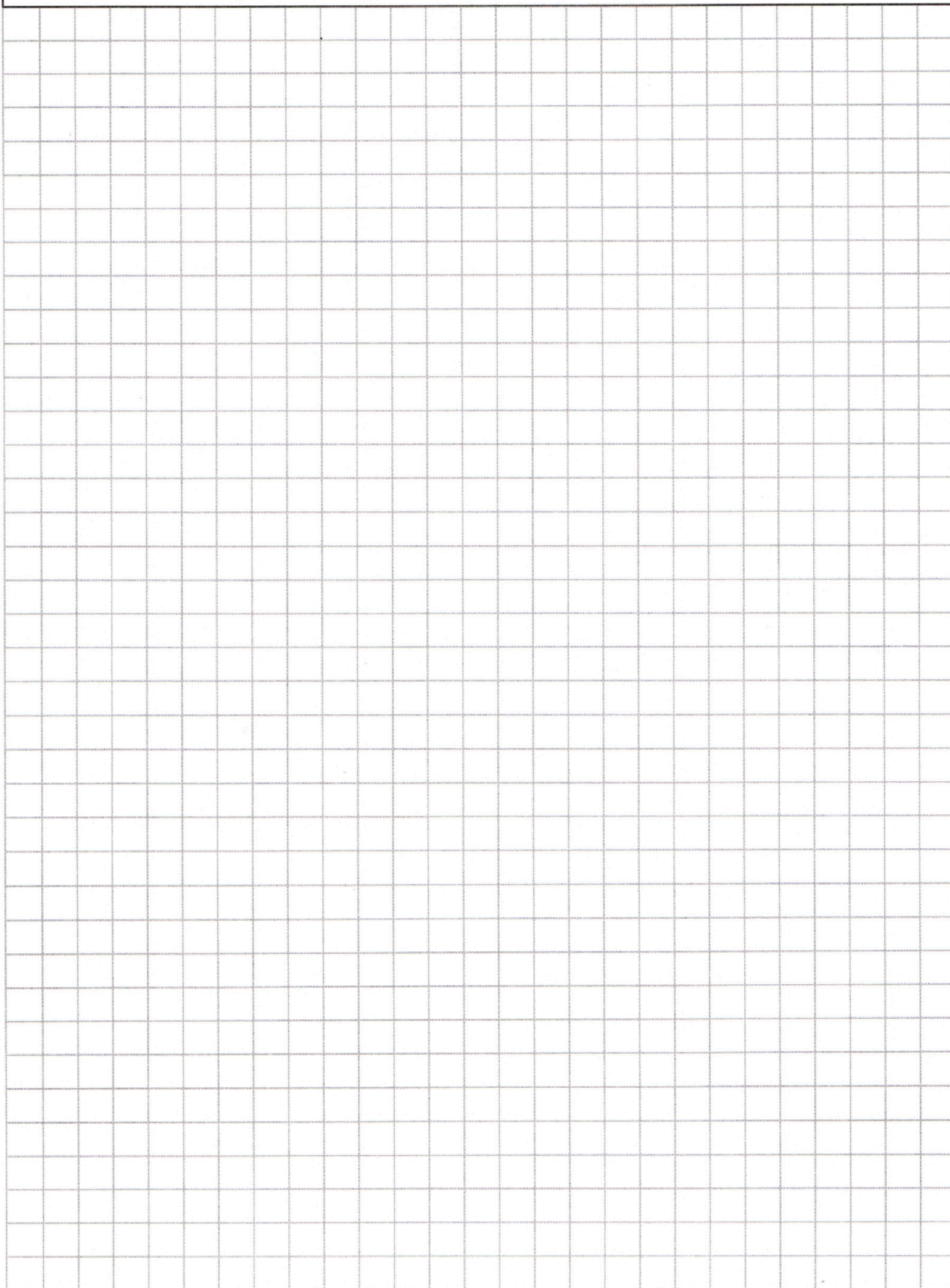
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} z \geq 0,2a + 14,9 \\ z \leq 0,2a + 15,9 \\ \begin{cases} z \geq -0,2a - 10,9 \\ z \leq -0,2a + 10,9 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z \geq 0,2a + 14,9 \\ z \geq -0,2a - 10,9 \end{cases}$$

$(a \text{ и } b) \vee (c \text{ и } d)$

$(a \text{ и } c) \vee (a \text{ и } d) \vee (b \text{ и } c) \vee (b \text{ и } d)$

$$\begin{cases} z \geq 0,2a + 14,9 \\ z \geq -0,2a - 10,9 \\ z \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

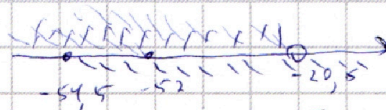
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

чтобы z - существовала эту 2 кривая должны
пересекаться и среди точек этого пересечения
должна быть хотя бы одна точка большая 0:

$$1) \begin{cases} -0,2a - 5,9 \leq 0,2a + 15,9 \\ 0,2a + 14,9 \leq -0,2a - 5,9 \\ -0,2a - 5,9 > 0 \end{cases} \begin{cases} 0,4a \geq -21,8 \\ 0,4a \leq -20,8 \\ 0,2a \leq -5,9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \geq -54,5 \\ a \leq -52 \\ a \leq -20,5 \end{cases}$$



$$a \in [-54,5; -52]$$

2)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$5x^2 + (2a+9)x + 4a-10b=0$$

$$D = 4a^2 + 36a + 81 - 140a + 200b =$$

$$= 4a^2 - 104a + 200b + 81$$

$$D \geq 0$$

$$4a^2 - 104a + 200b + 81 \geq 0$$

$$x = \frac{-2a-9 \pm \sqrt{4a^2 - 104a + 200b + 81}}{10}$$

$$14 \leq \frac{-2a-9 + \sqrt{4a^2 - 104a + 200b + 81}}{10} \leq 15$$

$$2a+149 \leq \sqrt{4a^2 - 104a + 200b + 81} \leq 2a+159$$

$$4a^2 + 596a + 149^2 \leq 4a^2 - 104a + 200b + 81 \leq 4a^2 + 636a + 159^2$$

$$700a + 149^2 - 81 \leq 200b \leq 700a + 159^2 - 81$$

$$700a + 140 \cdot 158 \leq 200b \leq 700a + 150 \cdot 168$$

$$4a + 14 \cdot 158 \leq 2b \leq 4a + 15 \cdot 168$$

$$4a + 221,2 \leq 2b \leq 4a + 252,2$$

$$3,5a + 110,6 \leq b \leq 3,5a + 126$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ - 2 \\ \hline 36 \\ + 4 \\ \hline 35 \end{array} \quad \begin{array}{r} 25 \\ + 35 \\ \hline 190 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ + 200 \\ \hline 200 \\ - 140 \\ \hline 36 \\ - 104 \\ \hline \end{array}$$

$$14^2 - 9 = 140 \cdot 158$$

$$\begin{array}{r} 34 \\ 168 \\ + 15 \\ \hline 840 \\ 168 \\ \hline 2520 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 158 \\ + 14 \\ \hline 632 \\ 158 \\ \hline 221,2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ + 149 \\ \hline 596 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ + 159 \\ \hline 630 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 596 \\ + 104 \\ \hline 700 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 636 \\ + 104 \\ \hline 740 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3,5/2 \\ - 6/1,4 \\ \hline 1,4 \end{array}$$

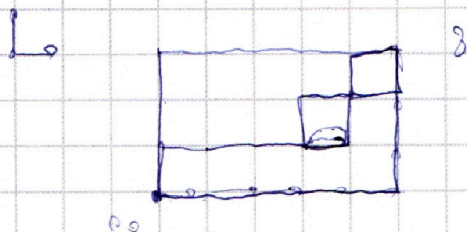
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

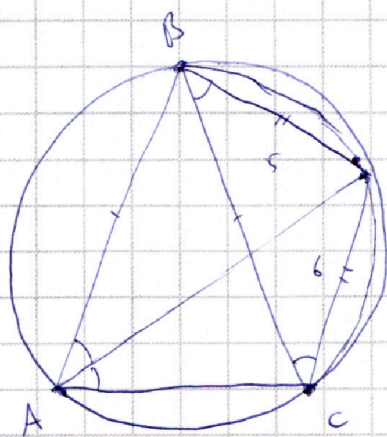
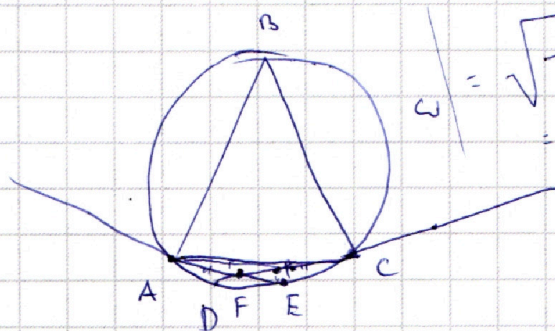
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1	4	10	20	35	56
1	3	6	10	15	21
1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1



$$\cos 180^\circ = -1$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$K=B$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$22$$

$$\sin^2(90) = 1$$

$$\sin^2(90) = 0^2$$

$$22$$

$$\cos 2\alpha =$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 2\alpha = \cos^4 \alpha - 2\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha$$

$$22 \cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{5 \lg \alpha}}$$

$$= \sqrt{\frac{14}{0,5 \lg \alpha}} = \sqrt{\frac{28}{\lg \alpha}}$$

$$11y \cos 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = xy = 1$$

$$\frac{5,5y}{\cos \alpha} \cdot \sin \alpha = x$$

$$5,5y^2 \lg \alpha = 1$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{5,5 \lg \alpha}}$$

$$\frac{5,5y}{\cos \alpha} = \sqrt{\frac{11}{5 \lg \alpha}}$$

$$a = \frac{5,5y}{\cos \alpha} = \frac{5,5}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{11}{5 \lg \alpha}}$$

$$= \sqrt{\frac{5,5}{5 \lg \alpha}}$$

$$= \sqrt{\frac{11}{5 \lg \alpha}}$$

$$11 \sqrt{\frac{1}{5,5 \lg \alpha}} = \sqrt{\frac{11}{5 \lg \alpha}} = \sqrt{\frac{22}{\lg \alpha}}$$

$$36y^2 = l^2 +$$



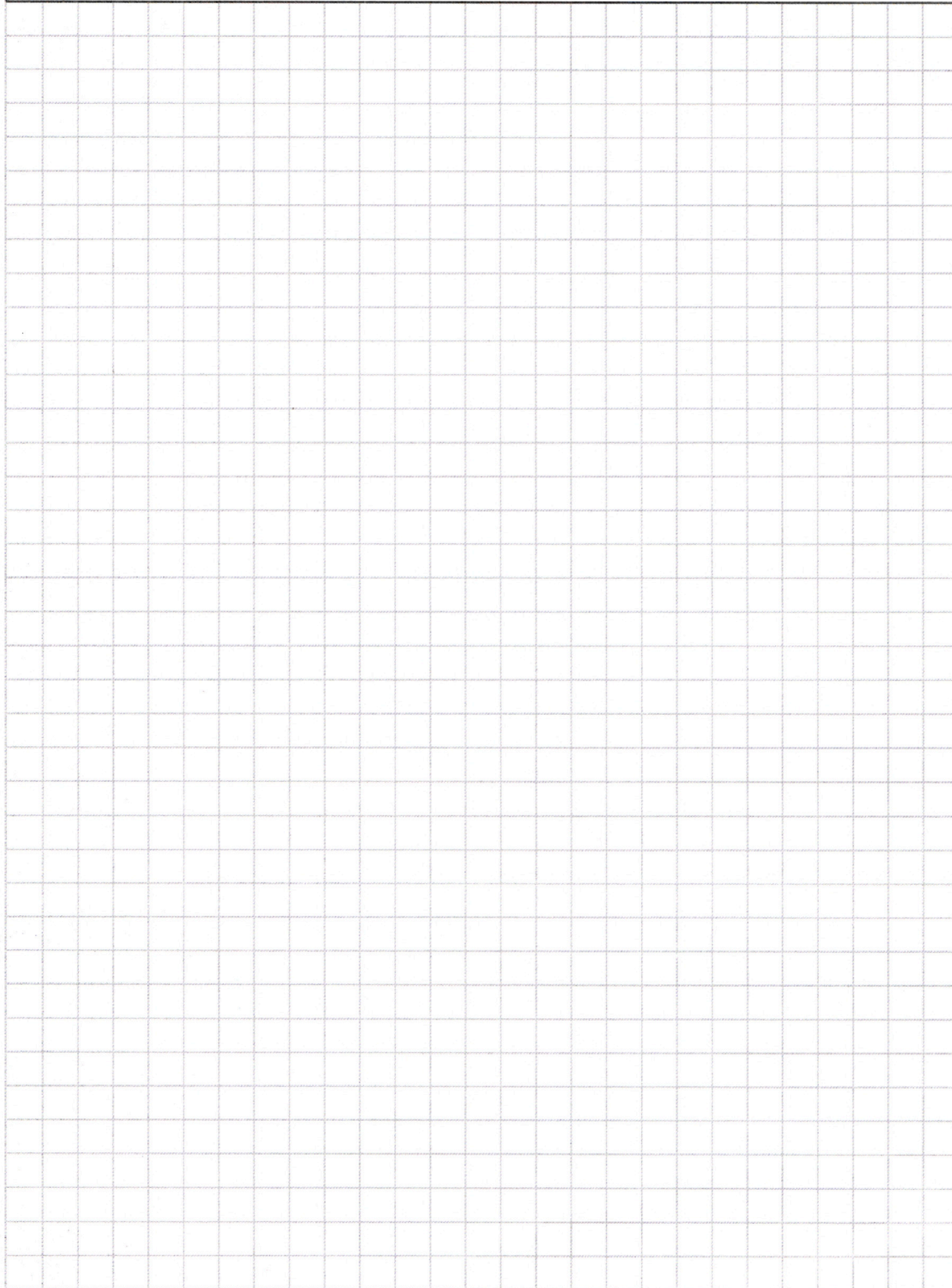
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} & \frac{-2a - 9 \pm \sqrt{4a^2 - 104a + 100b + 81}}{10} \leq 10 \\ & -2a - 9 \geq \sqrt{4a^2 - 104a + 100b + 81} \geq -2a - 109 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 152 \overline{) 152} \\ \underline{152} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 135 \overline{) 135} \\ \underline{135} \\ 0 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x^2 + 14x + 24 \leq 0$$

$$2x^2 + 4x - 16 \leq 0$$

$$|x^2 + 7x + 12| + |x^2 + 2x - 8| \leq 5x + 20$$

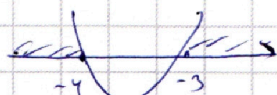
$$x^2 + 7x + 12 = 0$$

$$D = 49 - 48 = 1$$

$$x_1 = \frac{-7+1}{2} = -3$$

$$x_2 = \frac{-7-1}{2} = -4$$

$$x^2 + 7x + 12 \geq 0$$



$$x \in (-\infty; -4] \cup [-3; +\infty)$$

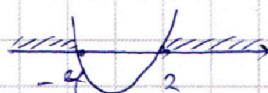
$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$D = 4 + 32 = 36$$

$$x_1 = \frac{-2+6}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-2-6}{2} = -4$$

$$x^2 + 2x - 8 \geq 0$$

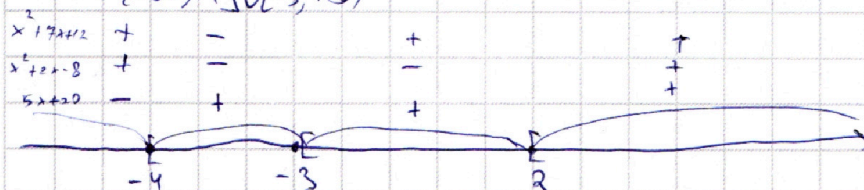


$$x \in (-\infty; -4] \cup [2; +\infty)$$

$$5x + 20 \geq 0$$

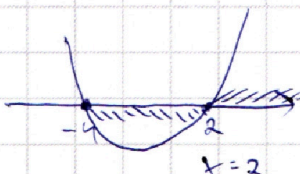
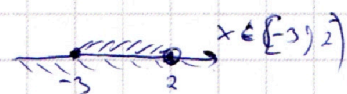
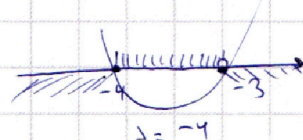
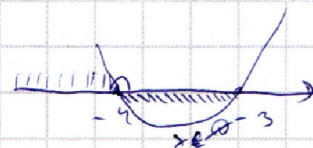
$$x \geq -4$$

$$\begin{cases} 5x + 20 \geq 0 \\ 5x + 20 \geq 0 \\ 6x - 4 \geq 0 \\ x \geq -4 \\ 5x + 20 \geq 0 \\ 6x - 4 \geq 0 \\ 5x + 20 \geq 0 \\ 6x - 4 \geq 0 \\ 5x + 20 \geq 0 \\ 6x - 4 \geq 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x < -4 \\ x^2 + 7x + 12 + x^2 + 2x - 8 \leq -5x - 20 \\ -4 \leq x < -3 \\ -x^2 - 7x - (2 - x^2 - 2x + 8) \leq 5x + 20 \\ -3 \leq x < 2 \\ x^2 + 4x + 12 - x^2 - 2x + 8 \leq 5x + 20 \\ x \geq 2 \\ x^2 + 7x + 12 + x^2 + 2x - 8 \leq 5x + 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -4 \\ x^2 + 4x + 12 \leq 0 \\ -4 \leq x < -3 \\ x^2 + 7x + 12 \geq 0 \\ -3 \leq x < 2 \\ 0 \leq 0 \\ x \geq 2 \\ x^2 + 2x - 8 \leq 0 \end{cases}$$



$$\text{Ответ: } x \in [-4] \cup [-3; 2]$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



if $y \geq 0$:

$$x^2 + 3x + 3 = 6^y$$

$$\Downarrow$$

$$3x \leq 3$$

$$\Downarrow$$

$$x \leq 1$$

~~if $y < 0$: $y' = -y$~~

$$x^2 + 3x + 3 = 6^{-y}$$

$$\frac{-12}{4} = -3$$

~~$2x = 3x$~~

$$2x^2 + 2x + 3 = 6^y$$

$$3(3x^2 + 3x + 1) = 6^y$$

$$3(3(x^2 + x) + 1) = 6^y$$

$$x^2 + 3x + 3 \geq 2 \Rightarrow 6^y = 36 \cdot 6^{y-2} = 9 \cdot 6^{y-2}$$

$y \leq 1$

$y=0$

$$x^2 + 3x + 3 = 1$$

$$x^2 + 3x = -2$$

$$x^2 + 3x + 3 - 6^y = 0$$

$$D = 9 - 12 + 4 \cdot 6^y = 4 \cdot 6^y - 3$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{4 \cdot 6^y - 3}}{2} \Rightarrow \sqrt{4 \cdot 6^y - 3} \geq 0$$

$y=0$:

$$x^2 + 3x + 3 = 1$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$3 + 4 \cdot 3 = 15$$

$$x = \frac{-3 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{-3+1}{2} = -1, x_2 = \frac{-3-1}{2} = -2$$

$y=1$

$$x^2 + 3x + 3 = 6$$

$$x^2 + 3x - 3 = 0$$

$$D = 9 + 12 = 21$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{21}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$4 \cdot 6^y - 3 \geq 0$$

$$6^y \geq \frac{3}{4}$$

if $y < 0$: $y' = -y$

$$\frac{1}{6^y} \geq \frac{3}{4}$$

$$\frac{4}{3} \geq 6^y \geq 6$$

$$13 \geq 6 \times \Rightarrow y \geq 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$n < 300$$

$$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

$$n = 22N + 3$$

$$n - 3 = 22N$$

$$n = q(N-1)$$

$$n + q = qN$$

$$\frac{25}{22} = \frac{25}{22}$$

$$\frac{n-3}{n+q} = \frac{22}{q}$$

$$nq - 3q = 22n + 22q$$

$$300 = 3 \cdot 10^2 = 3 \cdot 2^2 \cdot 5^2$$

$$n(q-22) = 25q$$

$$n = \frac{25q}{q-22}$$

$$n < 300$$

$$\frac{25q}{q-22} < 300$$

$$\frac{q}{q-22} < 12$$

$$q < 12q - 264$$

$$11q > 264$$

$$q > 24$$

$$q \geq 25$$

$$h = \frac{25q}{q-22} = \frac{25q - 550 + 550}{q-22} = 25 + \frac{550}{q-22}$$

$$550 = 25 \cdot 22 = 5 \cdot 11 \cdot 10 = 5 \cdot 11 \cdot 2$$

$$h = 25 + \frac{550}{q-22}$$

$$q-22 \in \{5, 10, 11, 22, 25, 50, 55, 110, 220, 550\}$$

$$q-22 \geq 5$$

$$q \geq 27$$

$$h \geq 25 + \frac{550}{5} = 25 + 110 = 135$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$