



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 11



1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 + 4| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 + 5|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $2^{150} \cdot 3^{300}$?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 2) - x(13y - 27) + 44y - 94 = 0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC . Прямые ED и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что площадь треугольника BCF в 16 раз больше площади треугольника DGF .

5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = x^5 + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = -3x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа a , b и c не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения abc .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность ω , а на дуге AC , не содержащей точку B , взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F . На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = CF$ и $CY = AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF = 17$, $XY = 31$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 (1)

$$|x^3 + 4| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 + 5|$$

$$|x^3 + 4| + |1 - x^2| \leq |x^3 - x^2 + 5| \quad *$$

Мы знаем, что $|a| + |b| \geq |a + b|$

(знак равенства если a и b одного знака) тогда

$$|x^3 + 4| + |1 - x^2| \geq |x^3 - x^2 + 5|$$

Но по условию из $*$ $|x^3 + 4| + |1 - x^2| \leq |x^3 - x^2 + 5|$

тогда тогда наше пер-во имеет
то решение нам надо чтобы

$$|x^3 + 4| + |1 - x^2| = |x^3 - x^2 + 5|, \text{ а это}$$

верно, как говорилось ранее, если

$$\begin{cases} x^3 + 4 \geq 0 \\ 1 - x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 \geq -4 \\ (1-x)(1+x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\sqrt[3]{4} \\ (1-x)(1+x) \geq 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x^3 + 4 \leq 0 \\ 1 - x^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 \leq -4 \\ (1-x)(1+x) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\sqrt[3]{4} \\ (1-x)(1+x) \leq 0 \end{cases}$$

$$(x^3 \geq -4 \Leftrightarrow x \geq -\sqrt[3]{4}) \text{ (и.к. } \sqrt[3]{x} \text{ определен при всех } x)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) $\sim 1(2)$

$\begin{array}{c} - & + & - \\ | & | & \\ -1 & 1 & \end{array}$

$\begin{cases} x \geq -\sqrt[3]{4} \\ (1-x)(1+x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1, 1]$

$\begin{array}{c} - & + \\ | & \\ -\sqrt[3]{4} & \end{array}$

$-\sqrt[3]{4} \leq -1 \quad (\sqrt[3]{4} > 1, 4 > 1)$

$\begin{cases} x \leq -\sqrt[3]{4} \\ (1-x)(1+x) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\sqrt[3]{4}] \cup$

т.е. $\begin{cases} x \geq -\sqrt[3]{4} \\ (1-x)(1+x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\sqrt[3]{4}] \cup$

$\begin{cases} x \leq -\sqrt[3]{4} \\ (1-x)(1+x) \leq 0 \end{cases} \cup [-1, 1]$

Ответ: $\mathbb{R} \setminus (-\infty; -\sqrt[3]{4}] \cup [-1, 1]$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



№ 2 (1)

Мы знаем, что если a, b, c
образуют в указанном порядке
geom. прогрессию, то $ac = b^2$ т.е.

$$abc = 2^{150} \cdot 3^{300}$$

$$b^3 \text{ т.е. } b = 2^{50} \cdot 3^{100} \text{ тогда}$$

$$bc = 2^{100} \cdot 3^{200} \text{ и мы знаем}$$

$$\text{что } c = d^2 a \text{ т.е. } d^2 a^2 = 2^{100} \cdot 3^{200} \text{ или}$$

$$da = 2^{50} \cdot 3^{100} \text{ т.е. } c = d \cdot 2^{50} \cdot 3^{100} \text{ и}$$

$$a = \frac{2^{50} \cdot 3^{100}}{d} \Rightarrow 1. \text{ тогда } c \text{ было}$$

натуральным d должно быть

натуральным или $d = k \cdot 2^x \cdot 3^y$ где
($k, 2$) = 1, ($k, 3$) = 1 ($x \geq -50, y \geq -100$)

2. тогда a было натуральным

$$2^{50} \cdot 3^{100} : d \text{ или } d = k \cdot 2^x \cdot 3^y \text{ где } x \leq 50$$

$$y \leq 100, (k, 2) = 1, (k, 3) = 1, (x \geq 0, y \geq 0) \text{ значит}$$

мы выяснили, что

$$(a, b, c) = (2^{50-x} \cdot 3^{100-y}, 2^{50} \cdot 3^{100}, 2^{50+x} \cdot 3^{400+y})$$

~~и значит такие тройки~~
(если $k \neq \pm 1$, то или a или $c \notin \mathbb{N}$)



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 2(2)

т. к. $x \in \{0, 1, \dots, 50\}$ $y \in \{0, \dots, 100\}$

51 вариант выбрать x , 101 вариант

y

Заметим, что среди

наших трех будут и пропе-

(если $k = -1$, то ~~о~~ хотя бы

одно число из тройки не $\in M$)

значит $d = 2^x \cdot 3^y$, где $x \in \{-50, \dots, 50\}$

$y \in \{-100, -99, \dots, 99, 100\}$ т. е.

всего чисел $101 \cdot 201 = 20301$

Заметим, что среди наших

прогрессий будут, как и

возрастающие так и убыва-

ющие, так и равные числа,

когда $d = 1$

Ответ: $101 \cdot 201 = 20301$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3(1)

$$x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$$

$$x^2(y-2) - x(13y-26) + 44(y-2) + x - 6 = 0$$

$$x^2(y-2) - 13x(y-2) + 44(y-2) = 6 - x$$

$$(y-2)(x^2 - 13x + 44) = 6 - x (*) \text{ (По алгоритму Евклида)}$$

$$\text{Получаем } x^2 - 13x + 44 \text{ и } 6 - x$$

$$(x^2 - 13x + 44; 6 - x) = (-7x + 44; 6 - x) =$$

$$= (-7x + 44; x - 6) = (2; x - 6), \text{ но}$$

мы знаем, что из (*) $6 - x \mid x^2 - 13x + 44$,

но мы выясним, что из

оценок делителей это $\pm 1, \pm 2$,

$$\text{тогда } x^2 - 13x + 44 = \pm 1, \pm 2$$

$$1) x^2 - 13x + 44 = 1$$

$$x^2 - 13x + 43 = 0 \text{ т.к. квадратный}$$

$$43 \div \pm 1 \pm 43$$

из этих чисел ни один не делит 43

нельзя получить значение в этом и во

всех следующих

случаях (2, 3, 4) мы

не имеем корней среди

делителей свободного

члена



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

н3621

$$2) x^2 - 13x + 44 = -1$$

$$x^2 - 13x + 45 = 0$$

$$45 : \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 9, \pm 15, \pm 45$$

но никакие 2 числа не дают

в сумме 13 (все они нечетные $\Rightarrow$

сумма четная) $\Rightarrow$ нет решений в $\mathbb{Z}$

$$3) x^2 - 13x + 44 = 2$$

$$x^2 - 13x + 42 = 0$$

$$x = 6, x = 7 \Rightarrow 6 - x = 0, 6 - x = -1$$

$$y - 2 = 0, (y - 2)2 = -1$$

$$x = 6, y = 2, \emptyset$$

$$4) x^2 - 13x + 44 = -2$$

$$x^2 - 13x + 46 = 0$$

$$46 : \pm 1, \pm 2, \pm 23, \pm 46$$

никакие 2 числа не равны 13 $\Rightarrow$

в $\mathbb{Z}$ нет решений

Ответ (6; 2)

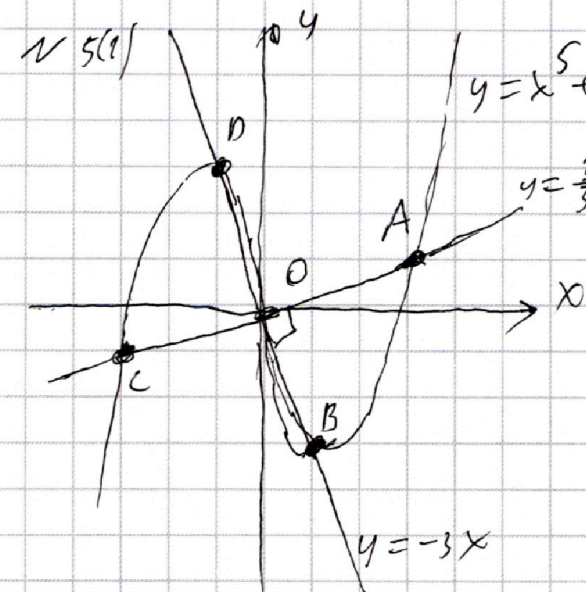
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Проведём
прямую $y = \frac{1}{3}x$

1. она $\perp y = 3x$

2. т. к. мы по-
нимаем, что

$y = 3x$ является кас-
ательной $y = x^5 + ax$

выйдёт в 2 точки

(т. к. по усл. эта прямая соде-
ржит диагональ, а точка
O центр, то точки B и D

(пересечение $y = -3x$ и $y = x^5 + ax$)

должны располагаться так, как
показано на рис.) из симметрии

относительно O ($y = x^5 + ax$ — нечёт-

ная ($-(x^5 + ax) = (-x^5) + a(-x)$) Мы
(из этого и вытекает)

понимаем, что $OB = OD$ и значит

$y = \frac{1}{3}x$ содержит вторую диа-
гональ (проходит через O, BD + AC)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

25(2)

(А, С точки пересечения $y = \frac{1}{3}x$
и $y = x^5 + ax$)

Заметим, что ^{так больше} точек пересечения ~~линии~~ $y = \frac{1}{3}x$, $y = x^5 + ax$ и $y = -3x$, $y = x^5 + ax$

$$\text{т. е. } x^5 + ax = kx \Leftrightarrow x(x^4 + a - k) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x(x^2 + \sqrt{k-a})(x^2 - \sqrt{k-a}) = 0$$

$$x^2 + \sqrt{k-a} > 0 \quad (\sqrt{k-a} > 0)$$

$$x(x - \sqrt[k]{k-a})(x + \sqrt[k]{k-a}) = 0$$

$$x = 0, \quad x = \sqrt[k]{k-a}, \quad x = -\sqrt[k]{k-a}$$

(Мы знаем, что y ~~прямая~~ прямые
пересекаются с $x^5 + ax$ есть
еще 2 точки пересечения
(кроме 0) это вершины
квадрата (они содержат
диагонали) а больше,
как мы выяснили ранее
точек пересечения не будет.

Будем обозначать A_0 координату
точки А по x

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5(3)

но $A_y = \frac{1}{3}x_0$ ($A \in y = \frac{1}{3}x$)

Если $A_x = x_0$, то $B_y = -x_0$.

(т.к. $ABCD$ квадрат $AO = BO$, и

по ранее доказанному $AO \perp BO$, так

что при повороте на $+90^\circ$ $B \rightarrow A$

т.е. $B_y = -A_x$) $B_x = \frac{1}{3}x_0$ ($B \in y = -3x$)

т.к. A и $B \in x^5 + ax$, то

$$\begin{cases} x_0^5 + ax_0 = A_y & (x_0 \neq 0) \\ (\frac{1}{3}x_0)^5 + a \frac{1}{3}x_0 = B_y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^4 = -a + \frac{1}{3} \\ x_0^4 = -81a + 3^5 \cdot (-1) \end{cases}$$

~~-----~~ $-a + \frac{1}{3} = -81a + 3^5$

$$80a = -3^5 - \frac{1}{3} = -\frac{3^6 + 1}{3} = -\frac{730}{3}$$

$$a = -\frac{73}{24}$$

$$x_0^4 = \frac{73}{24} + \frac{1}{3} = \frac{73 + 8}{24} = \frac{81}{24} = \frac{27}{8}$$

$$x_0^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$OA^2 = A_x^2 + A_y^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{9} \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{30\sqrt{3}}{18\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$$

$$AB^2 = 2OA^2 = \frac{10\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{6}}{3}$$

сторона квадрата = $\sqrt{\frac{5\sqrt{6}}{3}}$

Ответ: $a = -\frac{73}{24}$, $\sqrt{\frac{5\sqrt{6}}{3}}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 (1)

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} \Rightarrow abc + 5c = b^2c + 5b \Rightarrow$$

$$a = \frac{5b - 5c}{bc} + b \quad (*)$$

Аналогично с ~~второй~~ группой
получим:

$$b = \frac{5c - 5a}{ca} + c \quad (**) \quad c = \frac{5a - 5b}{ab} + a \quad (***)$$

Подставим ~~(***)~~ в ~~(*)~~

$$a = \frac{5\left(\frac{5c - 5a}{ca} + c\right) - 5c}{\left(\frac{5c - 5a}{ca} + c\right)c} + \frac{5c - 5a}{ca} + c =$$

$$= \frac{\frac{25c - 25a}{ca}}{\frac{5c - 5a}{ca} + c^2} + \frac{5c - 5a}{ca} + c = \frac{25c - 25a}{5c^2 - 5ac + c^3a} +$$

$$+ \frac{5c - 5a}{ca} + c = \frac{25c - 25a}{c(c^2a - 5a + 5c)} + \frac{5c - 5a + c^3a}{ca}$$

Заметим, что $b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a} \Rightarrow$

$$abc = c^2a + 5c - 5a \quad (X) \text{ значит}$$

$$a = \frac{25c - 25a}{c \cdot abc} + \frac{abc}{ca} = \frac{25c - 25a}{abc^2} + b =$$

$$= \frac{5}{bc} \left(\frac{5c - 5a}{ac} \right) + b = \frac{5}{bc} (b -$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6(2)

$$a = \frac{25c - 25a}{abc^2} + b = \frac{25\left(\frac{5a-5b}{ab} + a\right) - 25a}{ab\left(\frac{5a-5b}{ab} + a\right)^2} + b$$

$$= \frac{25(5a-5b)}{(5a-5b+a^2b)} + b$$

$$из (*) \quad \frac{5b-5c}{bc} = \frac{25(5a-5b)}{5a-5b+a^2b}$$

$$a^2b + 5a - 5b = abc \text{ выводится из}$$

$$c + \frac{5}{a} = a + \frac{5}{b} \text{ так } c (*)$$

$$\frac{5b-5c}{bc} = \frac{25(5a-5b)}{abc} \Rightarrow (b-c)a = 25a - 25b$$

$$ba - ca = 25a - 25b \text{ аналогично}$$

$$\text{можно получить } cb - ab = 25b - 25c$$

$$\text{выразим } ab \text{ и подставим}$$

$$cb - 25b + 25c = ca + 25a - 25b$$

$$5a - 5b = ab(c-a) \text{ (выводится из)}$$

$$c + \frac{5}{a} = a + \frac{5}{b})$$

$$5ab(c-a) = ba - ca \Rightarrow 5cb - 5ab = b - c \Rightarrow$$

$$a = \frac{5cb + b + c}{5b}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~N 7(2)~~ N 7(2) у четырех-угольника + диаго-
нали.

$$\text{Значит } S_{EKBV} = \frac{1}{2} BF \cdot XY = \frac{17 \cdot 13}{2} =$$
$$= \frac{221}{2} = 110,5$$

Ответ : 110,5

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

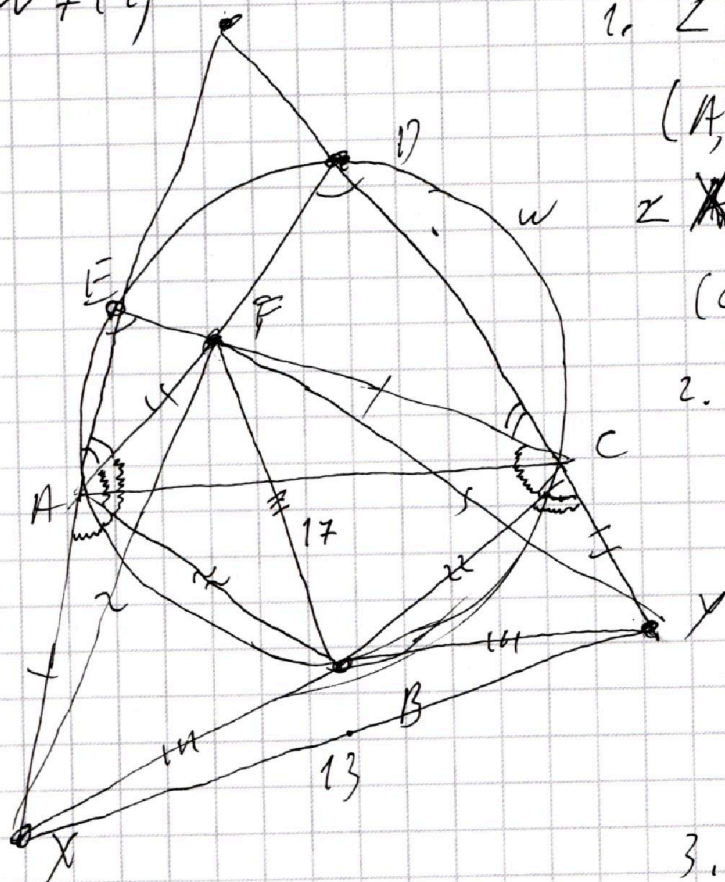
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 7 (2)



$$1. \angle EAD = \angle ECD$$

$$(A, E, D, C \in \omega) \Rightarrow$$

$$\angle \cancel{XAF} = \angle FCY$$

(сметный)

$$2. \text{м.к. } FC = AX \text{ и}$$

$$AF = CY, \text{ то}$$

по I крив.

$$\Delta XAF = \Delta FCY$$

$$FX = FY$$

$$3. \angle ECB = \angle BAX$$

$$(E, B, A, C \in \omega)$$

$$\text{и м.к. } BC = AB \text{ и}$$

$$FC = AX, \text{ то}$$

$$\Delta AXB = \Delta FCB$$

(по I крив.)

$$XB = BF$$

Мы получим, что
они равны, то есть

из этого следует не-
договарь, что $BF = BY$.

4. Если сделать сим-
метрию относительно
сер пера к XY, то
 $X \rightarrow Y, B \rightarrow B, F \rightarrow F$

$$(BX = BY, FX = FY) \Rightarrow$$

BF останется на месте $\Rightarrow$ аналогично
 $\Rightarrow$ BF содержит сер. разрывная для
пер. к XY т.е. $BF \perp XY$. ΔFAB и ΔYCB

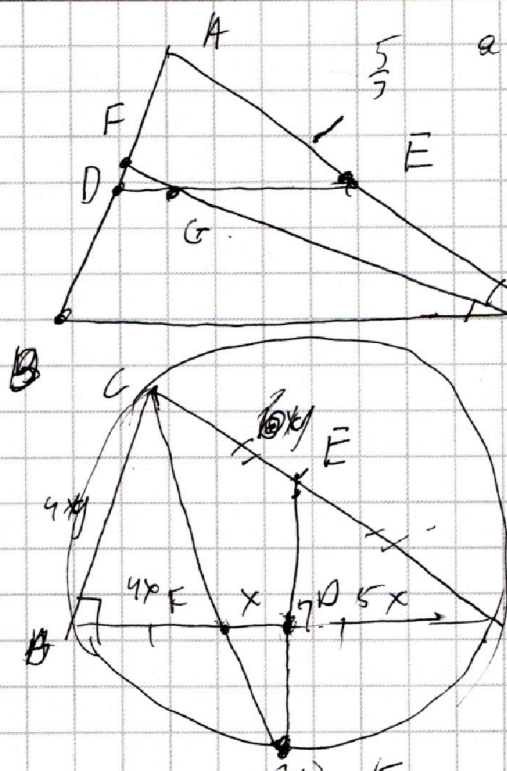
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$abc + 5c + b^2 = 45b$$

$$b^2 + 5b + 5c$$

$$c^2 + 5c - 5a$$

$$a^2 + 5a - 5b$$

$$3abc + 2a^2 + b^2 + c^2$$

$$4x^2 + 4x$$

$$88$$

$$(x^2 - 3x + 44)(y - 2)$$

$$6 + x$$

$$81.9$$

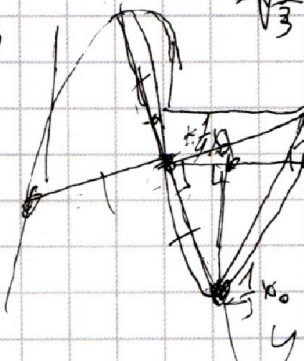
$$729$$

$$730$$

$$b + -6 = 0$$

$$17 \cdot 13$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 13 \\ \hline 51 \\ 170 \\ \hline 221 \end{array}$$

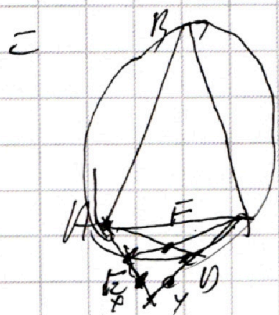


$$y = \frac{1}{3}x$$

$$\frac{229}{13} \cdot \frac{13}{91} \cdot \frac{1}{9} x^2 + \left(\frac{1}{3}x \right)^5 + a - \frac{1}{3}x$$

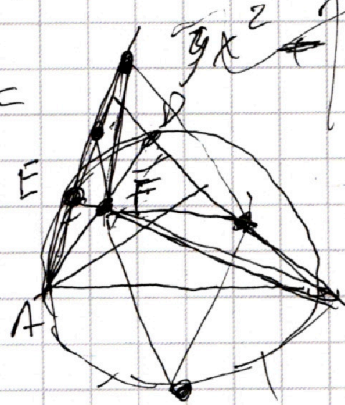
$$y = -3x$$

$$3x^3 + x^4 + a \cdot 3^4 =$$



$$u$$

$$c^4 = a^2 b^2 = b^3 c$$



$$(3x)^5 + 3ax$$

$$\frac{17 \cdot 13}{2}$$

$$\frac{201}{201} \cdot \frac{201}{201} = 1$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt[6]{a} \\ a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} \Rightarrow abc + 5c = b^2c + 5b \\ abc = b^2c + 5b - 5c$$

Если приравнять оставшиеся 2
выражения получим

$$abc = c^2a + 5c - 5a$$

$$abc = a^2b + 5a - 5b$$

Сложим 3 выражения

$$3abc = c^2a + a^2b + b^2c (*)$$

по неравенству Коши о средних

$$\frac{c^2a + a^2b + b^2c}{3} \geq \sqrt[3]{c^2a \cdot a^2b \cdot b^2c} = \\ = \sqrt[3]{a^3b^3c^3} = abc,$$

$$\text{Но из } (*) \quad abc = \frac{c^2a + a^2b + b^2c}{3}.$$

$$\text{тогда } \frac{c^2a + a^2b + b^2c}{3} = \sqrt[3]{c^2a \cdot a^2b \cdot b^2c}$$

т.е. как мы знаем все 3 числа
должны быть равны между
собой

$$c^2a = a^2b = b^2c \quad \text{т.е.}$$

$$c^2 = ab, \quad a^2 = bc, \quad b^2 = ac$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} \quad -1 \quad -1 \quad a \neq c$$

$$a^2 + 5a = b^2 + 5b$$

$$a^2 - b^2 + 5a - 5b = 0$$

$$(a-b)(a+b+5) = 0$$

$$a+b = -5$$

$$a+b+c = 5$$

$$-1 - \frac{5}{2} = -2 -$$

$$a + \frac{5}{a} = a + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}$$

$$c(a+b+5) = 5b$$

$$c = \frac{5b}{ab-b^2+5}$$

$$bc = 5$$

$$b = \frac{5c-5a}{c} + c$$

$$a = \frac{5 \left(\frac{5c-5a}{ca} + c \right) - 5c}{b}$$

$$abc - b^2c + 5c - 5b = 0$$

$$bc(a-b) + 5(c-b) = 0$$

$$ca(b-c) + 5(a-c) = 0$$

$$ab(c-a) + 5(b-a) = 0$$

$$(a-5)$$

$$a+c = -5$$

$$a=c$$

$$a=b=c = -\frac{5}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

