



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 11



- ✓ 1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 + 4| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 + 5|.$$

- ✓ 2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $2^{150} \cdot 3^{300}$?

- ✓ 3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 2) - x(13y - 27) + 44y - 94 = 0.$$

- ✓ 4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC . Прямые ED и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что площадь треугольника BCF в 16 раз больше площади треугольника DGF .

- ✓ 5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = x^5 + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = -3x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.

- ✓ 6. [5 баллов] Числа a , b и c не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения abc .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность ω , а на дуге AC , не содержащей точку B , взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F . На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = CF$ и $CY = AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF = 17$, $XY = 31$.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. $|x^3+4|+|x^2-1| \leq |x^3-x^2+5|$

$x^3+4=a$ ~~$x^3+4=b$~~ $1-x^2=b$

$|a|+|b| \leq |a+b| \Rightarrow |a|+|b| \leq |a+b| \quad (|b|=|1-b|)$

Рассмотрим ситуацию в общем случае:

$|a|+|b| \leq |a+b|$

1) $a, b \geq 0 \Rightarrow a+b \leq a+b$ - верно

2) $a, b < 0 \Rightarrow -a-b \leq -a-b$ - верно

3) Пусть $a > 0, b < 0$ (для $b > 0, a < 0$ - рассуждения аналогичны)

$b = -b_0, b_0 > 0 \Rightarrow |a|+|b_0| \leq |a-b_0|$

• $a \geq b_0 \Rightarrow a+b_0 \leq a-b_0 \Rightarrow b_0 \leq -b_0 \Rightarrow b_0 = 0$ - против.

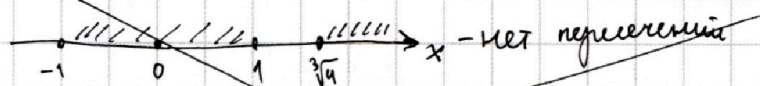
• $b_0 > a \Rightarrow a+b_0 \leq b_0-a \Rightarrow a < -a$ - против.

Итого 2 случая: 1) $a, b \geq 0$; 2) $a, b < 0$; ~~3) $a > 0, b < 0$~~

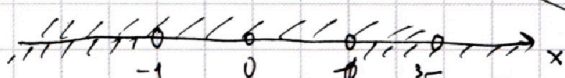
$$\begin{cases} x^3+4 \geq 0 \\ 1-x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 \geq -4 \\ x^2 \leq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq -\sqrt[3]{4} \\ x \in [-1; 1] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3+4 < 0 \\ 1-x^2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 < -4 \\ x^2 > 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < -\sqrt[3]{4} \\ x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \end{cases}$$

Решение 1ой системы:



Значит решение ~~абсолютно~~ это решение 2ой системы:



Ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \sqrt[3]{4})$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

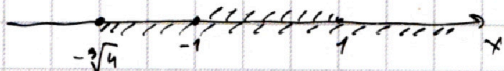
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение 1ой системы: $x \in [-1; 1]$



Решение 2ой системы: $x \in (-\infty; -\sqrt[3]{4})$



Ответ: $x \in (-\infty; -\sqrt[3]{4}) \cup [-1; 1]$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

Пусть $a = 2^L \cdot 3^B$; q — знаменатель прогрессии; $q = 2^x \cdot 3^y$.

Заметим, что других простых множителей в разложении чисел a и q нет, иначе они бы были в разложении числа $abc = a \cdot q \cdot (q^2 a) = 2^{150} \cdot 3^{300}$.

$$b = a \cdot q = 2^{L+x} \cdot 3^{B+y}$$

$$c = a q^2 = 2^{L+2x} \cdot 3^{B+2y} \Rightarrow abc = 2^{3L+3x} \cdot 3^{3B+3y} = 2^{150} \cdot 3^{300}$$

$$\text{Тогда: } \begin{cases} 3L+3x=150 \\ 3B+3y=300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L+x=50 \\ B+y=100 \end{cases}$$

Количество пар таких целых L и x , что $L+x=50$ равно A

$$A = 51 \quad (0-50, 1-49, \dots, 49-1, 50-0)$$

Количество пар таких целых B и y , что $B+y=100$ равно B

$$B = 101 \quad (0-100, 1-99, \dots, 99-1, 100-0)$$

Тогда кол-во троек a, b, c : $T = A \cdot B$; Никакие

2 тройки a, b, c не совпадут, т.к. одному варианту

пары из множества A соответствует ровно одно значение степени двойки y чисел a, q , т.е. y чисел a, b, c

аналогично с множеством B . $T = A \cdot B = 51 \cdot 101 = 5151$

Осталось заметить, что если есть такие abc , то

$$L+x=50, B+y=100, \text{ и наоборот.}$$

Ответ: 5151

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Очевиден перенос $y=2 \rightarrow x=6$

Пусть $y \geq 3$

Тогда все выражение $S \geq x^2(3-2) - x(39-27) + 44y - 94$

$$0 \geq x^2 - 12x + 132 - 94 = x^2 - 12x + 40$$

$$x^2 - 12x + 40 \leq 0$$

но $D = 144 - 160 < 0$, верно $\forall x \Rightarrow x^2 - 12x + 40 > 0$ - нехот. $\Rightarrow$
 $\Rightarrow y \leq 2$

Пусть $y \leq 1$

Тогда $S = 0 \leq x^2(1-2) - x(13-27) + 44y - 94$

$$0 \leq -x^2 + 14x - 50 \cdot (-1)$$

$$x^2 - 14x + 50 \leq 0$$

$D = 196 - 200 < 0$ - верно $\forall x \Rightarrow x^2 - 14x + 50 > 0$ при всех x

Тогда $y=2 \rightarrow x=6$

Ответ: $x=6; y=2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

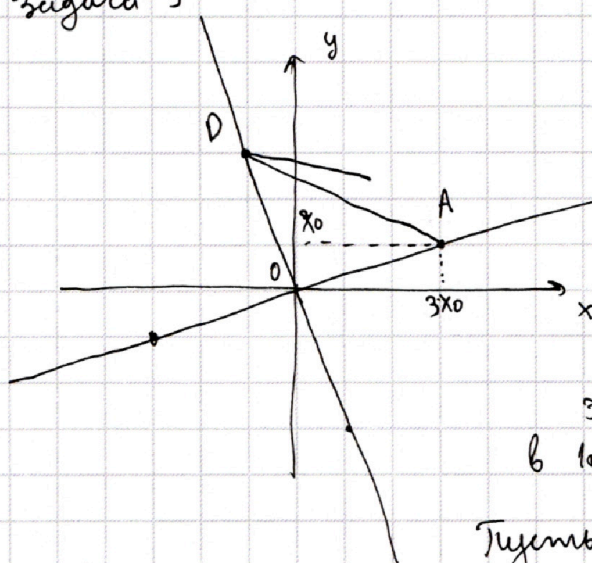
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 5



Заметим, что вторая диагональ квадрата лежит на прямой $y = \frac{1}{3}x$, которая получается из прямой $y = -3x$ поворотом на 90° относительно начала координат.

Найдем координаты точки этого квадрата, расположенную в той четверти. Ее координаты

будут $(3x_0; x_0)$;

Тогда верно равенство $x_0 = 3^5 x_0^5 + ax_0 \Rightarrow 1 = 3^5 x_0^4 + a$ (очев., что $x_0 \neq 0$)

Поворотом на 90° против часовой стрелки получим точку D с координатами $(-x_0; 3x_0) \Rightarrow$ верно равенство:

$$3x_0 = -x_0^5 + (-ax_0) \Rightarrow 3 = -x_0^4 - a$$

Велим систему:

$$\begin{cases} 3^5 x_0^4 + a = 1 \\ 3 = -x_0^4 - a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 243 x_0^4 + a = 1 \\ x_0^4 = -a - 3 \end{cases} \Rightarrow -243a - 3^6 + a = 1$$

$$-242a = 3^6 + 1$$

$$a = -\frac{3^6 + 1}{242} = -\frac{730}{242}$$

~~Ответ: $-\frac{730}{242}$~~ Тогда $x_0^4 = \frac{730}{242} - 3 = \frac{4}{242} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_0^2 = \frac{2}{11\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{11} \Rightarrow OA = \sqrt{9x_0^2 + x_0^2} = \sqrt{10x_0^2} = \sqrt{\frac{10\sqrt{2}}{11}}$$

$$AD = \sqrt{2} \cdot OA = \sqrt{\frac{20\sqrt{2}}{11}}$$

Ответ: $a = -\frac{730}{242}$; $AD = \sqrt{\frac{20\sqrt{2}}{11}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что значения 2 не равны между собой

$$\begin{aligned} 1) a=b &\Rightarrow a+\frac{5}{a}=a+\frac{5}{b} \Rightarrow a=b=c \text{ — против } \\ 2) a=c &\Rightarrow a+\frac{5}{a}=b+\frac{5}{a} \Rightarrow a=b=c \\ 3) b=c &\Rightarrow b+\frac{5}{b}=b+\frac{5}{a} \Rightarrow a=b=c \end{aligned}$$

из условия получаем, что: $c-a = \frac{5(c-b)}{ab}$; $b-c = \frac{5(c-a)}{ac}$

$$a-b = \frac{5}{c} - \frac{5}{b} = \frac{5b-5c}{bc} = \frac{5(b-c)}{bc} = \frac{25(c-a)}{abc^2} = \frac{125(a-b)}{a^2b^2c^2}$$

$$\cancel{a-b} = \frac{125\cancel{a-b}}{a^2b^2c^2} : (a-b) \quad a \neq b \neq 0$$

$$a^2b^2c^2 = 125$$

$$1) abc = 5\sqrt{5}$$

$$2) abc = -5\sqrt{5}$$

Ответ: $-5\sqrt{5}$



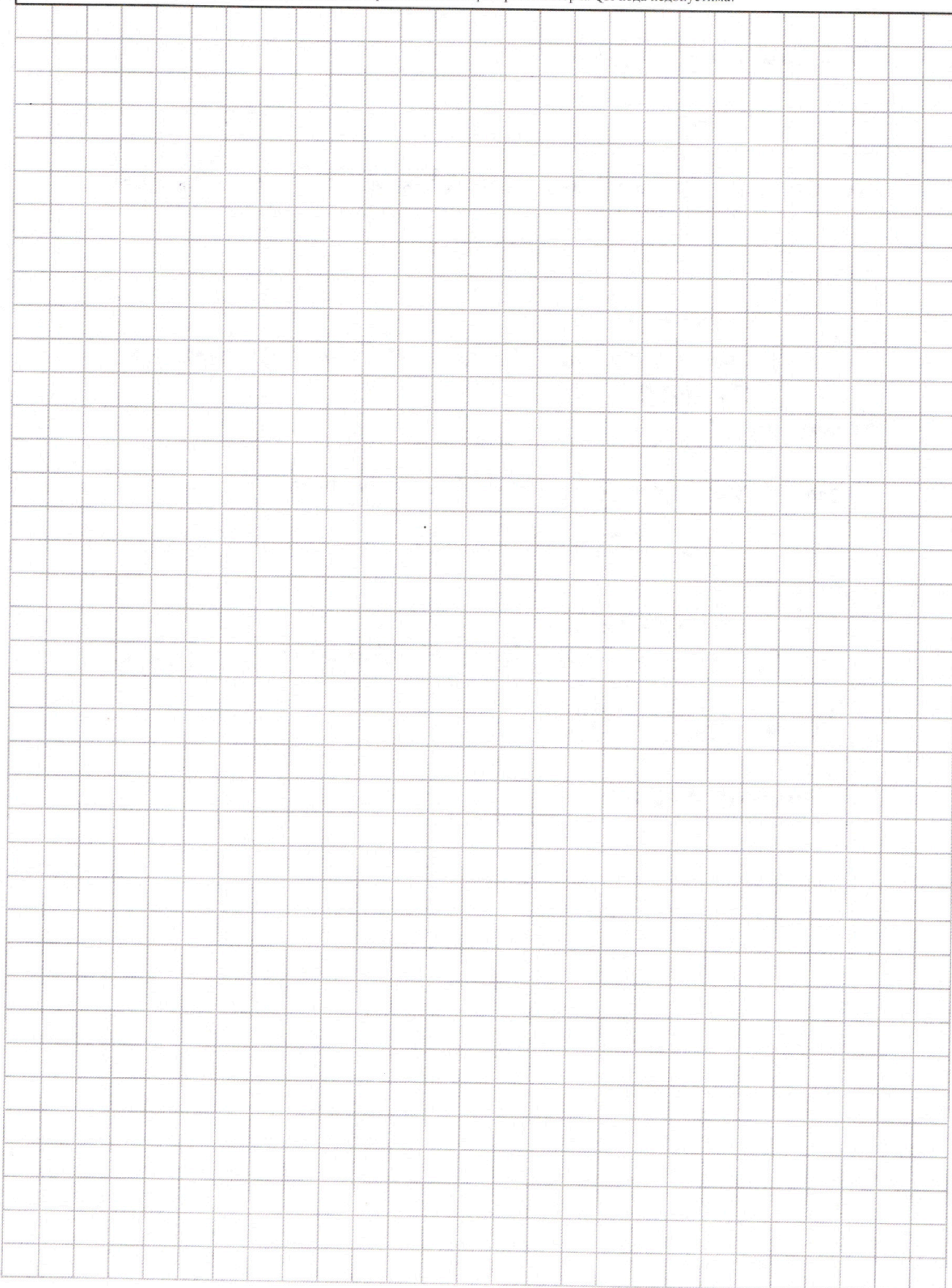
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$$

$$\frac{88}{132}$$

$$x^2(y-2) - 13xy + 27x + 44y - 94$$

$$26y - 72 - 78y$$

$$\text{Пусть } y \geq 3$$

$$\text{Пусть } y \leq 4$$

$$\geq x^2 - x(12) + 132 - 94 \neq 0$$

$$0 \leq x^2(-1) - x(-14) + 44y - 94 \neq 0$$

$$x^2 - 12x + 40 \leq 0$$

$$0 \leq -x^2 + 14x - 50$$

$$D = 144 - 160 < 0 \text{ - корней нет}$$

$$x^2 - 14x + 50 \leq 0$$

$$D = 196$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left(\frac{2}{5} + g\right) \left(\frac{2}{5} + v\right) \\ 0 &\leq \frac{2g}{5} + \frac{2v}{5} + g + gv \\ \frac{2}{5} + g &= \frac{2}{5} + v \\ \frac{2}{5} &< \frac{2}{5} \quad \text{or} \quad \frac{2}{5} > \frac{2}{5} \\ 0 &< \frac{2}{5} - \frac{2}{5} = g - v \\ g &< v \\ \frac{2}{5} &< \frac{2}{5} \quad \text{or} \quad \frac{2}{5} > \frac{2}{5} \\ 0 &< \frac{2}{5} - \frac{2}{5} = g - v \\ g &< v \\ \frac{2}{5} &< \frac{2}{5} \quad \text{or} \quad \frac{2}{5} > \frac{2}{5} \\ 0 &< \frac{2}{5} - \frac{2}{5} = g - v \\ g &< v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon - p_{nn} - xg + (x^2 - \varepsilon - h_x)(\varepsilon - x) \\ 0 &= \varepsilon - p_{nn} - xg + (\varepsilon - x)(x^2 - \varepsilon - h_x)(\varepsilon - x) \\ 0 &= \varepsilon - p_{nn} - xg + x^2 + 2\varepsilon x - \varepsilon^2 - h_x(\varepsilon - x) \\ 0 &= p_{nn} - \varepsilon - x^2 - xh_x + (\varepsilon - x)(\varepsilon - h_x) \\ 0 &= (\varepsilon - h_x)(\varepsilon - 13) + 34x - 2x^2 - \varepsilon^2 - h_x(\varepsilon - x) \\ 0 &= (\varepsilon - h_x)(\varepsilon - 13) + 34x - 2x^2 - \varepsilon^2 - h_x(\varepsilon - x) \\ 0 &= p_{nn} + (\varepsilon - h_x)(\varepsilon - 13) + 34x - 2x^2 - \varepsilon^2 - h_x(\varepsilon - x) \\ 0 &= p_{nn} + x^2 + \varepsilon - 13 - p_{nn} - 9x - 13x^2 - 2x^2 - h_x(\varepsilon - x) \\ 0 &= p_{nn} + x^2 + \varepsilon - 13 - p_{nn} - 9x - 13x^2 - 2x^2 - h_x(\varepsilon - x) \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{a^2 b^2 c^2}{125} = 1$$

$$c - a = \frac{a}{5} - \frac{b}{5} = \frac{a - b}{5}$$

$$b - c = \frac{a}{5} - \frac{c}{5} = \frac{a - c}{5}$$

$$\frac{a^2 b^2 c^2}{(125(a-b))^2} = \frac{a^2 b^2 c^2}{25(c-a)^2} = \frac{a^2 b^2 c^2}{5(b-c)^2} = \frac{a^2 b^2 c^2}{5(b-c)^2} = \frac{a^2 b^2 c^2}{5(b-c)^2}$$

$$abc \geq 100$$



$$0 = 28 - 8z + x^2 + 6z + 14xy - 2x^2 - 14xz + (2 - y)(y + x)$$

$$0 = 28 - 8z + 6z + 14xy - 2x^2 - 14xz - y^2 - xy + x^2$$

$$0 = 16 - 2z + 14xy - 13xz - y^2 - xy + x^2$$

$$0 = 16 - 8z + 14xy - 13xz - y^2 - xy + x^2$$

$$\frac{a}{5} \rightarrow c \quad \frac{b}{5} \rightarrow a$$

$$\frac{a}{5} + b > 0 \quad \frac{b}{5} + c > 0$$

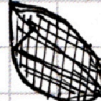


$$y(x-3)(y-3) = 3$$

$$y(x-3) - x + 3 = 3$$

$$y(x-3) - 3y = 0$$

$$x - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 = 0$$



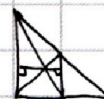
$$y = 2 \rightarrow x = 6$$

$$1 \quad y \rightarrow x$$

$$21 - x^2 - 6y + 14xy = 0$$

$$x = 6$$

$$0 = 16 - 8z + x$$



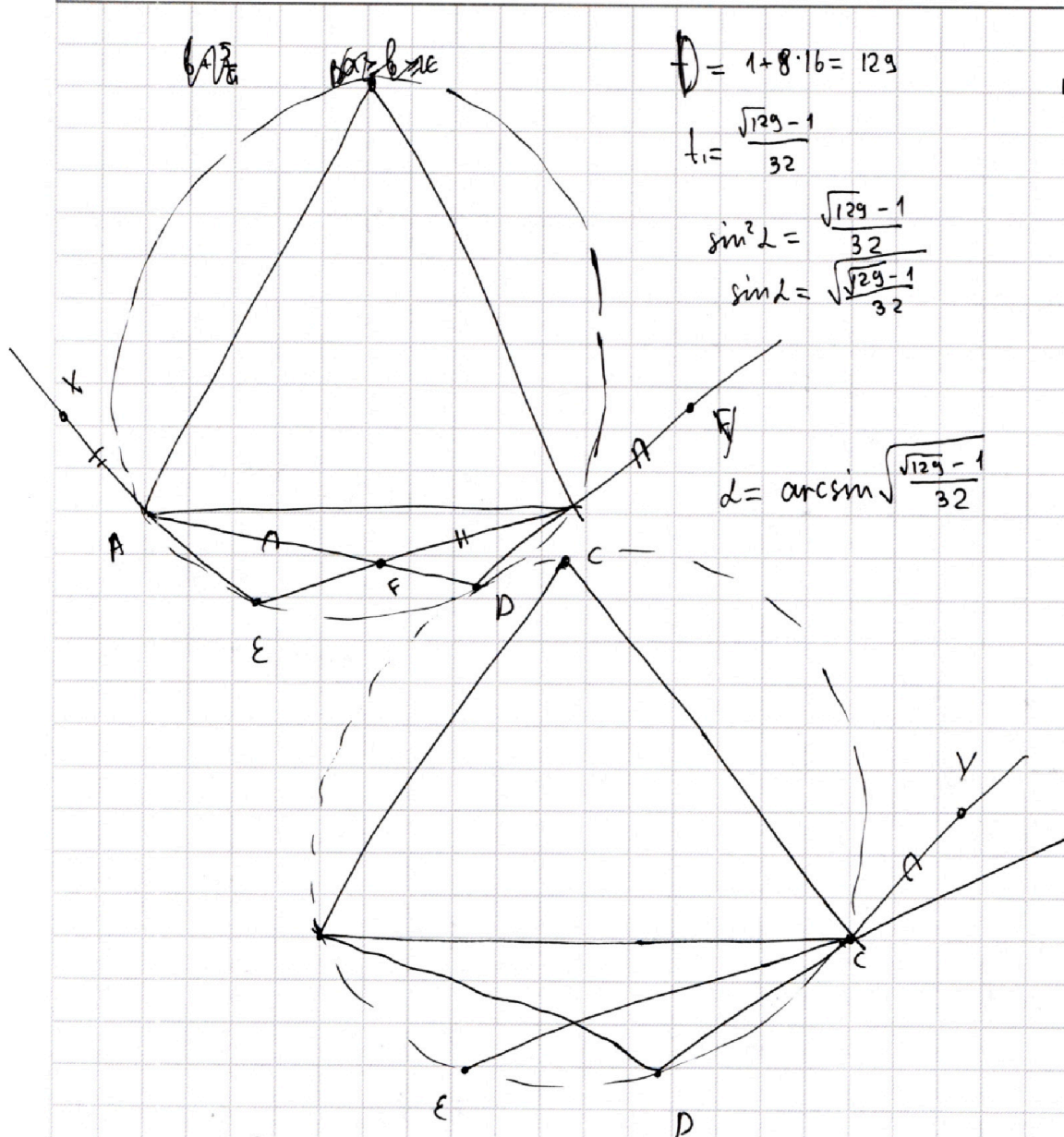
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$D = 1 + 8 \cdot 16 = 129$$

$$\frac{16}{128}$$

$$t_1 = \frac{\sqrt{129} - 1}{32}$$

$$\sin^2 \angle = \frac{\sqrt{129} - 1}{32}$$

$$\sin \angle = \sqrt{\frac{\sqrt{129} - 1}{32}}$$

$$\angle = \arcsin \sqrt{\frac{\sqrt{129} - 1}{32}}$$

$$x^2y - 2x^2 - 13xy + 27x + 44y - 94 = 0$$

$$xy \quad x^2xy + 27x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

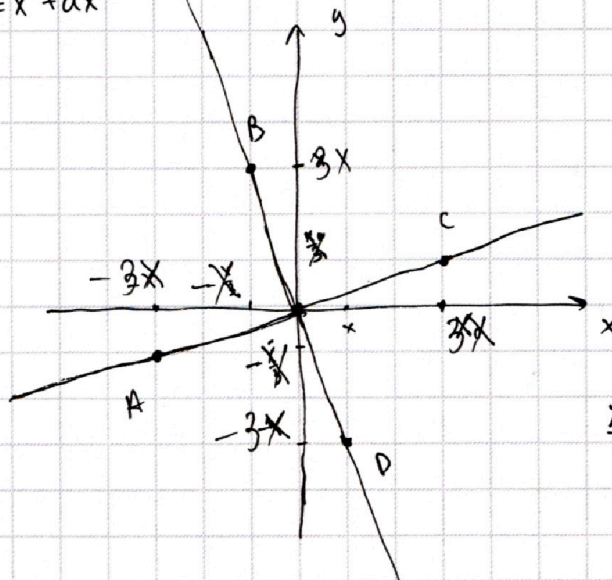
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = x^5 + ax$$



$$y = -3x$$

$$x^5 + ax = -3x \text{ — имеет}$$

$$A\left(-\frac{x_0}{3}; \frac{x_0}{3}\right) \quad \begin{array}{r} 188 \\ 4 \\ \hline 152 \end{array}$$

$$x^4 + a = -3$$

$$\frac{x_0}{3} = x_0^5 + ax_0; \quad x_0 = \left(-\frac{x_0}{3}\right)^5 + a\left(\frac{x_0}{3}\right)$$

$$x_0^4 + a = \frac{1}{3} \quad x_0 = -\frac{x_0^5}{3^5} + \frac{a}{3}\left(-\frac{x_0}{3}\right)$$

$$x = (3x)^5 + a \cdot 3x$$

$$1 = 3^5 \cdot x^4 + 3a$$

$$x^4 + a = -3$$

$$3^5 t + 3a = 1$$

$$t + a = -3$$

$$a = -3 - t$$

$$243t - 9 - 3t = 1$$

$$240t = 10$$

$$24t = 1$$

$$t = \frac{1}{24}$$

$$\begin{array}{r} 730 \overline{) 2} \\ 365 \overline{) 5} \\ 73 \overline{) 73} \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 365 \overline{) 5} \\ 35 \overline{) 15} \\ 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 242 \overline{) 2} \\ 121 \end{array}$$

$$243t + a = 1 \Rightarrow 243(-a - 3) + a = 1$$

$$-t - a = 3 \Rightarrow t = -a - 3$$

$$-242a - 729 = 1$$

$$x^4 = -a - 3 = \frac{730 - 3 \cdot 242}{242} = \left(\frac{2}{11}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$x^2 = \frac{2}{11\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{11}$$

$$a = -\frac{730}{242} = -\frac{365}{121} = -\frac{5 \cdot 73}{11^2}$$

$$1 = -\frac{x_0^5}{3^5} + \frac{a}{3}\left(-\frac{x_0}{3}\right)$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 9 \\ 27 \\ 81 \\ 243 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ -3 \\ \hline 42 \end{array}$$

$$a = -\frac{1}{3} - \frac{1}{24} = -\frac{73}{24}$$

$$\begin{array}{r} 243 \\ 3 \\ \hline 129 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 242 \\ 3 \\ \hline 726 \end{array}$$

2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$|x^3 + u| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 + 5|$$

$$b \geq 0, d \geq 0$$

2. $a = 2^x \cdot 3^b$ $q = 2^x \cdot 3^y$

$$b = 2^{x+y} \cdot 3^{b+y}$$

$$c = 2^{x+2x} \cdot 3^{b+2y}$$

$$3x + 3y = 150$$

$$3b + 3y = 300$$

$$x + y = 50$$

$$b + y = 100$$

$$x+y \Rightarrow 49 \text{ пар } (0+50, 1+49, \dots$$

$$\dots 24+26, 25+25, \dots 49+1, 50+0$$

$$x+y=50 \rightarrow \text{Таких пар } 26$$

$$b+y=100$$

$$\begin{cases} 0-50 \\ 1-49 \\ \vdots \\ 24-26 \\ 25-25 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

Таких пар

$$\begin{matrix} 51 & 0-100 \\ & 1-99 \\ & \vdots \\ & 49-51 \end{matrix}$$

$$a = 2^x \cdot 3^b$$

$$q = 2^{50-x} \cdot 3^{100-b}$$

$$b = 2^{50} \cdot 3^{100-b}$$

$$c = 2^{100-x} \cdot 3^{200-b}$$

Пусть $a = 2^x \cdot 3^b$. Заметим, что никакие другие простые множители в разложении a не присутствуют.

Пусть q — знаменатель дроби $q = 2^x \cdot 3^y$

Тогда $b = 2^{x+y} \cdot 3^{b+y}$; $c = 2^{x+2x} \cdot 3^{y+2b} \Rightarrow abc = 2^{3x+3y} \cdot 3^{y+3b} = 2^{150} \cdot 3^{300}$

$$\begin{cases} 3x + 3y = 150 \\ 3y + 3b = 300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 50 \\ y + b = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 - y \\ b = 100 - y \end{cases}$$

пар неотрицательных целых чисел x, y, b , таких что

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ y + b = 100 \end{cases} = 51 \cdot 101 = \text{Ответ: } 51 \cdot 101$$

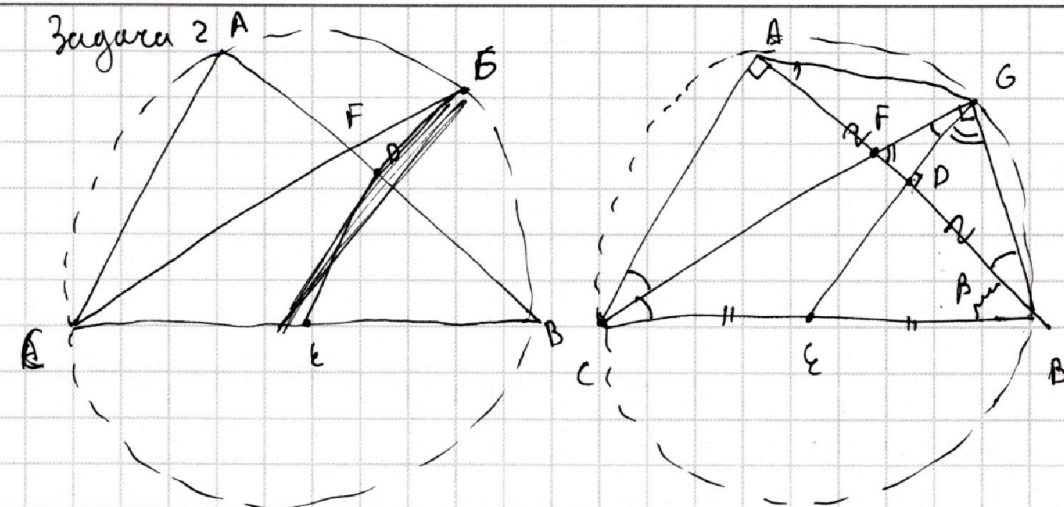
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что G - середина дуги AB не содержащей C .

Известно, биссектриса угла вписанного треугольника имеет общие точки с окружностью Ω . Это точка C и

центр дуги AB без точки C . Тогда $GD \perp AB$; медиана в равнобедренном треугольнике ($AG = GB$). Т.к. $ED \parallel AC \Rightarrow \angle CAB = \angle DB = 90^\circ$

Заметим, что $\angle GCE = \angle CGE$ т.к. тогда BC - диаметр, E - его центр $\Rightarrow E$ - центр $\Omega \Rightarrow EC = EG \Rightarrow \angle GCE = \angle CGE$.

Пусть $BC = a \Rightarrow AC = a \cdot \sin B$ ($\angle ABC = B$)

$$\frac{S_{CFB}}{S_{CFA}} = \frac{BF}{AF} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sin B} \Rightarrow S_{CFB} = \frac{S_{CFA}}{\sin B}$$

$$\frac{S_{GDF}}{S_{ACF}} = \left(\frac{FD}{AF}\right)^2 = \left(\frac{AD - AF}{AF}\right)^2 = \left(\frac{BD - AF}{AF}\right)^2 = \left(\frac{BD + FD - AF - FD}{AF}\right)^2 = \left(\frac{BF - AD}{AF}\right)^2 =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) $a > 0, b > 0$ ✓
 $a + b \leq a + b$

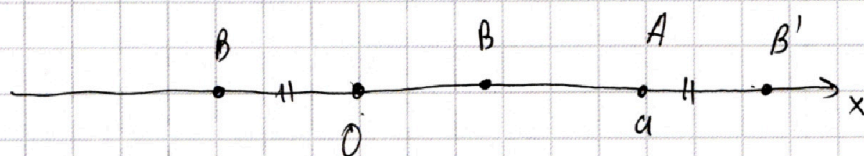
2) $a < 0, b < 0$ $a = -a_0, b = -b_0$ ✓

$a_0 + b_0 \leq a_0 + b_0$

3) $a > 0, b < 0$ $b = -b_0$

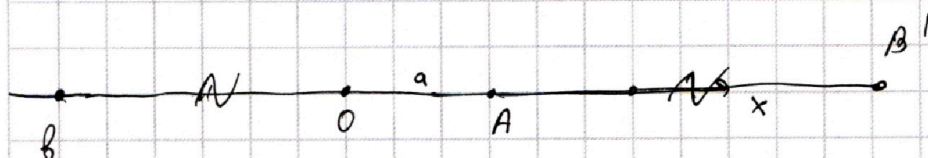
$a + b_0 \leq |a - b_0|$

OB' или

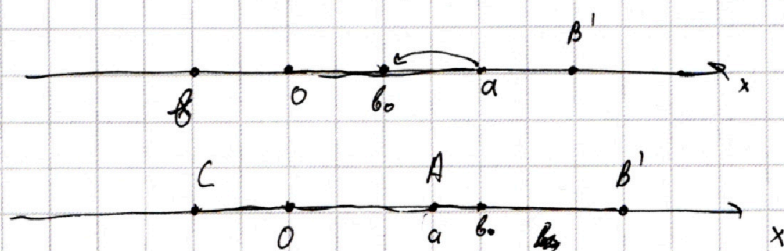


$|a - b_0|$

$a > 0, b < 0; b = -b_0, b_0 > 0$



$|a - b_0| = a + b_0$, при $a, b_0 > 0$



$OC =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

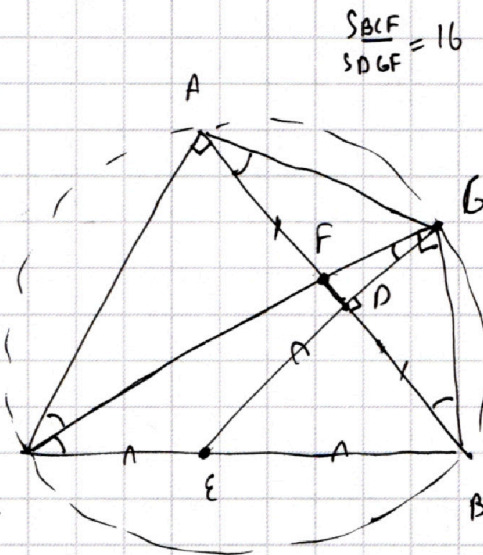
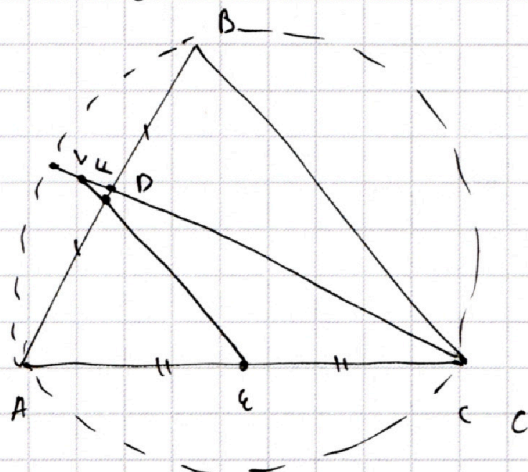
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$$

$$D = (13y-27)^2$$



$$\frac{S_{BCF}}{S_{ABF}} = \frac{BF}{FA}$$

$$\frac{S_{BCF}}{S_{DGF}} = \frac{BF}{AF}$$

$$\frac{S_{DGF}}{S_{ACF}} = \left(\frac{FD}{AF}\right)^2$$

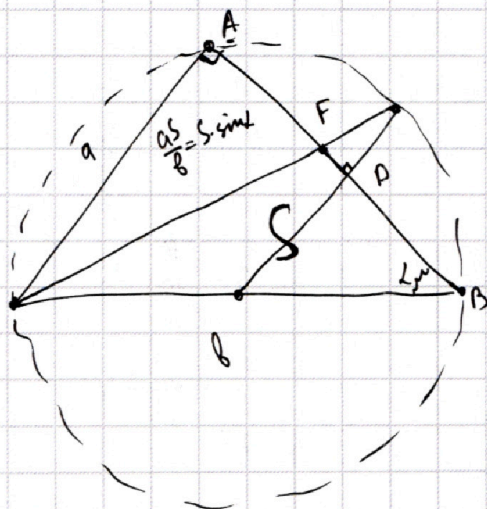
$$\frac{S_{BCF}}{S_{DGF}} = \frac{BF}{AF} \cdot \frac{AF^2}{FD^2} = \frac{BF \cdot AF}{FD^2} = 16$$

$$16 FD \cdot DG =$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ 51 \\ \hline 101 \\ 505 \\ \hline 5151 \end{array}$$

$$\frac{CF \cdot FB}{FD^2} = 16$$

$$CF \cdot FB = 16 FD^2 = (4FD)^2$$



$$\frac{S_1}{S} = \frac{a}{b}$$

$$S_1 = \frac{a^2}{b} = S \cdot \sin^2 \angle$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{FD}{AF}\right)^2 = \left(\frac{AD-AF}{AF}\right)^2 = \left(\frac{BD-AF}{AF}\right)^2 = \left(\frac{BF-2AF}{AF}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{BF}{AF} - 2\right)^2 = \left(\frac{b}{a} - 2\right)^2 = 16$$

$$\frac{b}{a} - 2 = 4$$

$$\frac{b}{a} = 6 \quad a \sin \angle = \frac{1}{6}$$

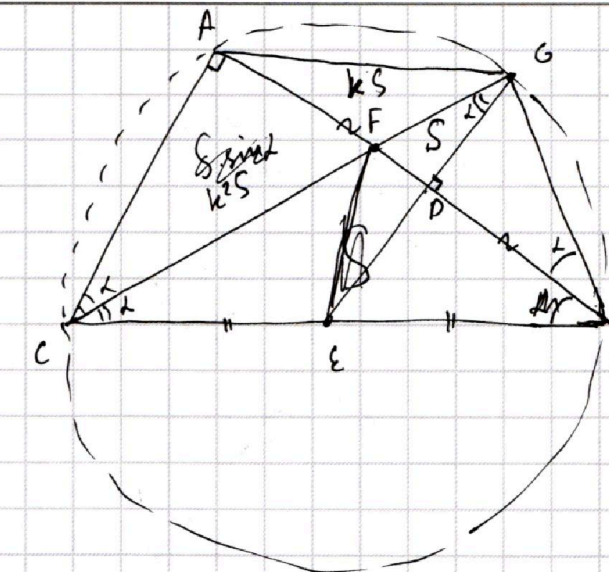
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AF}{FD} = k$$

$$\frac{S_{CFB}}{S_{ACF}} = \frac{BF}{AF} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sin(90-2\alpha)}$$

$$\frac{S_{CFB}}{S_{ACF}} = \frac{k^2 S}{\cos 2\alpha} = 16$$

$$\frac{k^2}{\cos 2\alpha} = 16$$

$$k = \frac{AF}{FD} = \frac{CF}{FB}$$

$$k = \frac{AF}{FD} + 1 - 1 = \frac{AD}{FD} = \frac{BD}{FD} - 1 = \frac{BG \cdot \cos \alpha}{FG \cdot \sin \alpha} - 1 = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - 1 = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha}$$

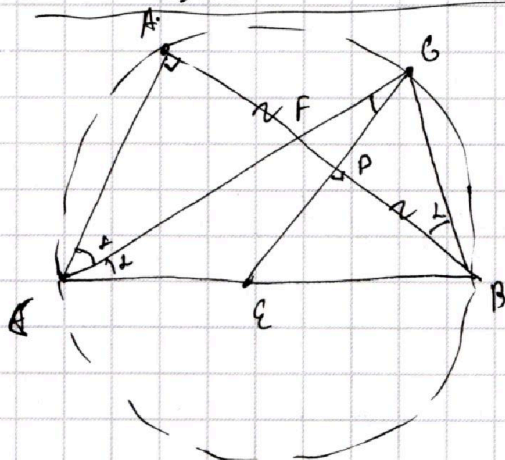
$$\frac{\cos^2 2\alpha}{\cos 2\alpha \cdot \sin^2 \alpha} = 16$$

$$\cos 2\alpha = 16 \sin^2 \alpha$$

$$2 \cos^2 \alpha - 1 = 16 - 16 \cos^2 \alpha$$

$$18 \cos^2 \alpha - 17 = 0$$

$$\cos^2 \alpha =$$



- 1) E - центр опис.
- 2) найдем k

$$\frac{AF}{FD} = k = \frac{AF}{FD} + 1 - 1 = \frac{AD}{FD} - 1 = \frac{BD}{FD} - 1 = \cot^2 \alpha - 1 = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - 1$$

3)

$$1 + 4 \cdot 16 \cdot 2 =$$

$$1770 \quad 2\alpha = 45^\circ$$

$$\cos$$

$$\frac{16}{128}$$