



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 13



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $3^{11}7^{11}$, bc делится на $3^{18}7^{16}$, ac делится на $3^{21}7^{38}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC = 1$ и $BC = 16$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .
5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x , y , z удовлетворяют равенствам

$$3x + 2y = z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 1 час 15 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .
7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA , AB , BC в точках D , E , F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX = 2\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD : DC$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Разложим числа на простые множители $a, b, c \in \mathbb{N}$

$$a = 3^{a_3} \cdot 7^{a_7}; \quad b = 3^{b_3} \cdot 7^{b_7}; \quad c = 3^{c_3} \cdot 7^{c_7} \quad \left| \begin{array}{l} a_3, b_3, c_3 \geq 0 \\ a_7, b_7, c_7 \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

Тогда, если $ab \mid 3^{11} \cdot 7^{11}$, то $a_3 + b_3 \leq 11$, $a_7 + b_7 \leq 11$

$$bc \mid 3^{18} \cdot 7^{16}, \quad b_3 + c_3 \leq 18, \quad b_7 + c_7 \leq 16$$

$$ac \mid 3^{21} \cdot 7^{38}, \quad a_3 + c_3 \leq 21, \quad a_7 + c_7 \leq 38$$

$$\text{Тогда } 2(a^3 + b^3 + c^3) \geq 50, \text{ т.е. } a^3 + b^3 + c^3 \geq 25.$$

$$\text{И } 2(a^7 + b^7 + c^7) \geq 65$$

примем попарные
суммы ≥ 25 , поэтому
все три

но, тогда

$$a + b + c \geq 33, \text{ но } a + c \leq 38, \text{ поэтому}$$

$$a + b + c \geq 39$$

$$\text{То есть наибольшее } abc = 3^{25} \cdot 7^{39}.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2-3x+4} - \sqrt{2x^2+x+3} = 1-4x$$

$$\sqrt{2x^2+x+3} + 1-4x - \sqrt{2x^2+x+3} = 1-4x$$

$$2x^2-3x+4 \geq 0$$

$$2x^2+x+3 \geq 0$$

Пусть, $a = 2x^2+x+3$ и $b = 1-4x$, тогда

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b \quad \sqrt{a+b} = 0$$

$$(\sqrt{a+b} - \sqrt{a})^2 = b^2 \quad 2a+b = b^2$$

$$(\sqrt{a+b})^2 = (b + \sqrt{a})^2 \quad a+b = b^2 + 2\sqrt{a}b + a$$

$$b(b + 2\sqrt{a} - 1) = 0$$

$$b = 0 \quad \text{или} \quad b + 2\sqrt{a} - 1 = 0$$

$$1-4x = 0$$

$$x = \frac{1}{4}$$

$$b - 1 = -2\sqrt{a}$$

$$1-4x-1 = -2\sqrt{2x^2+x+3}$$

$$(-4x) = (-2\sqrt{2x^2+x+3})^2$$

$$16x^2 = 4(2x^2+x+3)$$

$$8x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$2x^2 - x - 3 = 0$$

$$D = \frac{1+24}{1+24} = 25$$

$$x_1 = \frac{1-5}{4} = -1$$

не подходит

$$x_2 = \frac{6}{4} = 1,5 \text{ (не подходит)}$$

$$\sqrt{2x^2+x+3} + 1-4x \geq 0$$

Ответ: $\frac{1}{4}$ или 0,25.

$$\sqrt{2 \cdot 2,25 + 1,5 + 3} + 1 - 6 =$$

$$= \sqrt{9} - 5 = 3 - 5 = -2$$

не подходит

$$2h^2 = 32; r = 4, > 0. \quad x^2 = 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot (4 \cdot 1) + 1 = 14 \cdot 3 + 1 = 52 \quad y = 2\sqrt{13}. \quad \text{Other: } 2\sqrt{13}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(1) $3x+2y=z$. (2) $\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{2}{z}$ — по ум. $x, y, z \neq 0$

(2): $\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{2}{z}$ $\frac{3y+x}{xy} = \frac{2}{z}$ $\begin{cases} 3yz+xz=2xy \\ 3x^2+2xy=xz \end{cases}$

Умножим (1) на x , тогда

$3yz+3x^2=2xy+xz-2xy-xz \Rightarrow -yz=x^2 \quad z=-\frac{x^2}{y}$

Подставим z в (2), тогда $\frac{3y+x}{xy} = -\frac{2y}{x^2} \quad x \neq 0$

Т.е. $3yx+x^2=-2y^2 \quad x^2+3yx+2y^2=0$

$x^2+xy+2xy+2y^2=x(x+y)+2y(x+y)=0 \quad (x+y)(x+2y)=0$

1. $x=-y$ или $x=-2y$
 $z=\frac{x^2}{x}=x$ $z=\frac{y^2}{y}=-4y$

$\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6xy} =$ Подставим 1 и 2 в $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6xy}$
 для 1: $\frac{3x^2-4(-x)^2-(-x)^2}{x^2-6x(-x)} = \frac{3x^2-4x^2-x^2}{x^2+6x^2} = \frac{-2x^2}{7x^2} = -\frac{2}{7}$

для 2: $\frac{3(-2y)^2-4y^2-(-4y)^2}{(-2y)^2-6y^2} = \frac{12y^2-4y^2-16y^2}{4y^2-6y^2} = \frac{-8y^2}{-2y^2} = 4$

Наибольшее значение = 4.

Ответ: 4.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть ск-ть велосип-а - c , ск-ть мотоцикла - d .
Время на АВ велосип-а - a , мотоцикла - b .

Тогда $a = b + 2$, (1) $\frac{S}{c} = \frac{S}{d} + 2$ - по времени

(2) $bc + 96 = a d$ - по энергии, (3) $\frac{S}{c+b} = \frac{S}{d+b} + \frac{5}{4}$

Также $S = ac$; $S = bd$.

Из (1) $S(\frac{1}{c} - \frac{1}{d}) = 2$ $S(\frac{d-c}{cd}) = 2$ $S = \frac{2cd}{d-c}$.

Тогда $\frac{2cd}{d-c} = ac = bd$. $\frac{2d}{d-c} = a$, $\frac{2c}{d-c} = b$

$$\begin{cases} ad - ac = 2d \\ bd - bc = 2c \end{cases} \quad \begin{cases} ad - bc = 2(c+d) \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ad - bc = 2(c+d) \\ \end{cases} \quad \begin{cases} 96 = 2(c+d) \\ c+d = 48 \end{cases} \quad \begin{cases} c = 48-d \end{cases}$$

$$S = \frac{2(48-d)d}{2d-48}; \quad \text{Из (3)} \quad S(\frac{d+b-c-b}{(c+b)(d+b)}) = \frac{5}{4} \quad S = \frac{5(c+b)(d+b)}{4(d-c)} =$$

$$= \frac{5(54-d)(d+6)}{4(2d-48)} \quad \text{Получаем} \quad \frac{2(48-d)d}{2d-48} = \frac{5(54-d)(d+6)}{4(2d-48)}$$

$$8d(48-d) = 5(54-d)(d+6) \quad c+d$$

$$384d - 8d^2 = 270d + 1620 - 5d^2 - 30d$$

$$3d^2 - 56d + 1620 = 0 \quad d^2 - 32d + 540 = 0$$

$$3d^2 - 144d + 1620 = 0 \quad d^2 - 48d + 540 = 0$$

$$D = 2304 - 2160 = 144$$

$$S = \frac{2 \cdot 30 \cdot 18}{30-18} = \frac{60 \cdot 18}{12} = 90 \text{ км}$$

$$d = \frac{48+12}{2} = 30; \quad d = \frac{48-12}{2} = 18.$$

$$d > c, \text{ поэтому } d = 30; \quad c = 18 \text{ км/ч}$$

Ответ: 90 км.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2} = \frac{a+b}{(a-b)^2-3a^2-3b^2} = \frac{a+b}{(2(a-b)-a)(2(a-b)+a)-2a^2-3b^2}$$

$$= \frac{a+b}{(a-b)(3a-b)} \quad \frac{a+b}{b(4a-b)+a^2-3b^2} = \frac{a+b}{b^2+a+2\sqrt{a}b} = \frac{a+b}{a+b}$$

$$\frac{a+b}{4(a-b)^2-4a^2-3b^2} = \frac{a+b}{-4b(2a-b)+a^2-3b^2} = \frac{a+b}{a^2-4b(2a-b)-3b^2}$$

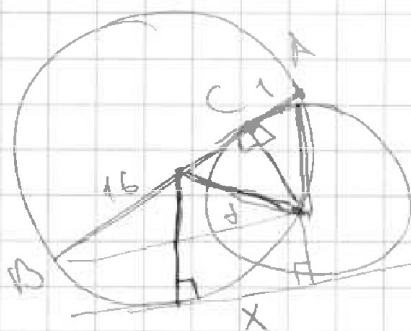
$$\frac{a+b}{(2a-2b)(a-b)(a+4b)} = \frac{a+b}{b(k+1)+y} \quad a = kb+y$$

$$k^2b^2+2ykb+y^2-8kb^2-8yb \cdot b^2 = 2yb(k+y)$$

$$kb+b+y \quad \frac{1}{8} \cdot 4 - \frac{3}{2} = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{8}$$

$$\frac{y(kb+b+y)+kb(kb+b+y)-9kb^2-9yb \cdot b^2}{b^2+9b(kb+y)} = \frac{a+b-b(kb+y+b)+2b^2-8kb^2-8by}{a(a+b)+b^2-2ab}$$

$$(a+b)(a-b)+2b^2-8b(a)$$



$$d^2 = (R-r)^2 + x^2 \quad g = R$$

$$d^2 = r^2 + (R-1)^2$$

$$r^2 + R^2 - 2Rr + 1 = r^2 + R^2 - 2Rr + x^2$$

$$2R(r-1)+1 = x^2$$

$$a^2+b^2=289 \quad r+1=a^2 \quad b^2=r^2+256$$

$$2r^2=289-256=32 \quad r=4 \quad 14-3+1=x^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2-3x+4} = \sqrt{2x^2+x+3} - 1-4x$$

$$2x^2-3x+4 \geq 0 \quad 2x^2+x+3 \geq 0$$

$$x=0, x=1.05 \quad x=0, x=1.05$$

$$(\sqrt{2x^2-3x+4} - \sqrt{2x^2+x+3})^2 = (1-4x)^2 \quad 1-4x \geq 0 \quad x \leq 0.25$$

$$2x^2-3x+4 - 2\sqrt{(2x^2-3x+4)(2x^2+x+3)} + 2x^2+x+3 = 1 - 8x + 16x^2$$

$$2\sqrt{(2x^2-3x+4)(2x^2+x+3)} = 6x+6-12x^2$$

$$(2\sqrt{(2x^2-3x+4)(2x^2+x+3)})^2 = (6(x+1-2x^2))^2$$

$$4(2x^2-3x+4)(2x^2+x+3) = 36(x+1-2x^2)(x+1-2x^2)$$

$$4x^4 + 2x^3 + 6x^2 - 6x^3 - 3x^2 - 9x + 8x^2 + 4x + 12 = 9x^4 + 9x^3 - 18x^2 + 9x + 9 - 18x^2 - 18x^3 - 18x^2 + 36x$$

$$32x^4 - 32x^3 - 32x^2 + 32x - 3 = 0$$

$$32x^4 - 32x^3 - 32x^2 + 32x - 3 = 0$$

$$(5x+3) = x(32x^3-38) = x(32x^2-38)$$

$$32x^4 - 32x^3 - 32x^2 + 32x = 3 + 6x + 9x$$

$$32(x^4 - x^3 - x^2 + x) = 3(2x^2 + 3x + 1)$$

$$32(x^4 - x^3 - (x^2 - x)) = 3(2x+1)(x+1)$$

$$32(x^2(x-1) - x(x^2-1)) = 3(2x+1)(x+1)$$

$$32(x-1)(x+1) \cdot x(x-1) = 3(2x+1)(x+1)$$

$$32x^3 - 64x^2 + 32x = 6x + 3 \quad 2x^2 + x + 3 = a \quad 1-4x = b$$

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + b \quad 3a^2 + 4ab = 0$$

$$a+b+2\sqrt{a^2+ab}+a=b \quad -a=2\sqrt{a^2+ab} \quad a^2=4a^2+4ab$$



$$D=16x$$

$$a=0$$

$$3a+4b=0$$

$$6x^2+3x+9+4-16x=0$$

$$6x^2-13x+13=0$$

$$x=-1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$9x^2 + 12xy + 4y^2 = 2$$

$$\frac{3x+y}{x+y} = \frac{2}{x^2+y^2}$$

$$\frac{3x+y}{x+y} = \frac{2}{x^2+y^2}$$

$$2xy = 3y^2 + 2x$$

$$x^2 = -y^2$$

$$\frac{3x+y}{x+y} = \frac{-2y}{x^2+y^2}$$

$$2x = 3x^2 + 2xy$$

$$3yx + x^2 = -2y^2$$

$$x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$$

$$x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$$

$$(x+y)(x+2y) = 0$$

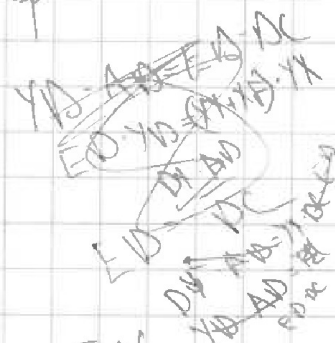
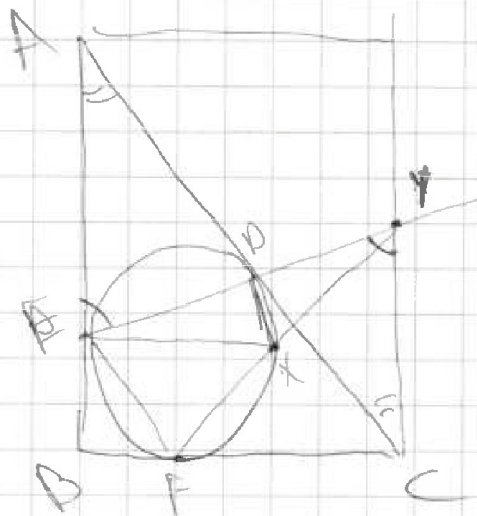
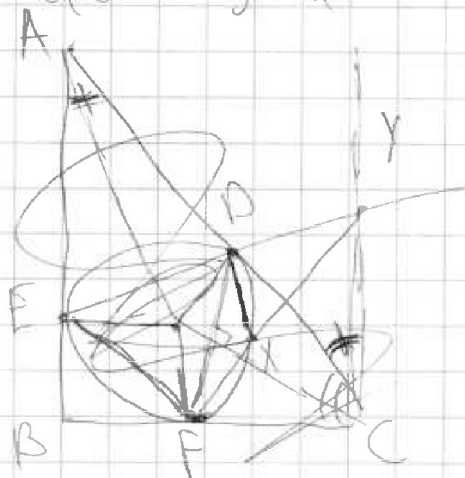
$$(x+y)(x+2y) = 0$$

$$x = -y \quad x = -2y$$

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} = \frac{mc}{d}$$

$$ad + bd = mca^2 - sabmc + b^2mc$$

$$b(bmc - d) + a(ame - d) = sabmc$$



$$\frac{X}{Y} = 2\sqrt{2}$$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{ED}{DY} = \frac{AE}{YC}$$

$$\frac{XD}{XF} = \frac{X}{ED}$$

$$\frac{X}{ED} = \frac{XD}{XF} = \frac{X}{ED}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$t_{\text{MAB}} + t_{\text{AB}}$$

$$a + 2 = b$$

$$t_{\text{MAB}} + 2 = t_{\text{AB}}$$

$$\frac{S}{c} + 2 = \frac{S}{d}$$

$$ac = S \quad bd = S$$

$$\frac{S}{\frac{2c}{a}} + 2 = \frac{S}{\frac{2b}{d}}$$

$$gb + ad = bc$$

$$d = \frac{S}{b}; a = \frac{S}{c}$$

$$gb + \frac{2b}{a} t_{\text{MAB}} = \frac{2b}{d} t_{\text{AB}}$$

$$\frac{S}{c+b} + \frac{S}{4} = \frac{S}{d+b}$$

$$\frac{S}{c} = \frac{S}{d}$$

$$gb = \frac{S^2}{bc} = bc$$

$$\frac{S}{c} = S \left(\frac{1}{d+b} - \frac{1}{c+b} \right) = S \left(\frac{c-d}{(d+b)(c+b)} \right)$$

$$2 = S \left(\frac{c-d}{c} \right)$$

$$\frac{S}{8} = \frac{c}{c+d+6c+6d+36}$$

$$5c = 8c$$

$$g = \frac{2cd}{c-d} = ad = bd$$

$$\frac{2d}{c-d} = a$$

$$\frac{2c}{c-d} = b$$

$$ac - ad = 2d$$

$$S - ad = 2d$$

$$2d$$

$$bc - bd = 2c$$

$$bc - S = 2c$$

$$bc - ad = 2(d+c)$$

$$c+d=48$$

$$c=48-d$$

$$48a - 48d - ad = 2d$$

$$48b - 48d - bd = 2d$$

$$18(a-b) + bd - ad = 4d - 96$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ 144 \\ 376 \\ 520 \\ 8636 \end{array}$$

$$S = \frac{2cd}{c-d}$$

$$S = \frac{5(d+6)(c+6)}{4(c-d)}$$

$$\frac{2(48-d)d}{48-2d}$$

$$= \frac{5(d+6)(54-d)}{4(48-2d)}$$

$$8d(48-d) - 5(54d - d^2 - 6d + 324)$$

$$384d - 8d^2 = 320d - 5d^2 - 30d + 1620$$

$$3d^2 - 54d + 1620 = 0$$

$$d = 8636$$

$$3d^2 - 144d + 1620 = 0$$

$$d^2 - 48d + 540 = 0 \quad 4 \cdot 4 \cdot 144$$

$$d = 4848 - 4 \cdot 4 \cdot 125 = 0$$