



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение: $a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\alpha_2}$, $b = 2^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2}$, $c = 2^{\gamma_1} \cdot 7^{\gamma_2}$, $a, b, c \in \mathbb{N}$
 тогда $ab = 2^{\alpha_1 + \beta_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \beta_2} = 2^{14} \cdot 7^{10} \Rightarrow \alpha_1 + \beta_1 = 14$
 $bc = 2^{\beta_1 + \gamma_1} \cdot 7^{\beta_2 + \gamma_2} = 2^{17} \cdot 7^{17} \Rightarrow \beta_1 + \gamma_1 = 17$
 $ac = 2^{\alpha_1 + \gamma_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \gamma_2} = 2^{20} \cdot 7^{27} \Rightarrow \alpha_1 + \gamma_1 = 20$
 $\alpha_2 + \gamma_2 = 27$
 Любая тройка чисел из системы неравенств, включающая a, b, c , равна a, b, c .

$$(a+b) + (a+c) + (b+c) \geq 14 + 17 + 20$$

$$2(a+b+c) \geq 51$$

$$a+b+c \geq 25,5 \text{ так как } a, b, c - \text{натуральные, } a+b+c \geq 26$$

$$(a+b) + (b+c) + (a+c) \geq 10 + 17 + 27 = 54$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 32.$$

$$\text{Значит, что так как } a_2 + c_2 \geq 27, \text{ то } 27 + b_2 \geq 32, \text{ откуда } b_2 \geq 5.$$

минимум строим
поэтапно

то $b_2 \geq 5$

$$abc = 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} \text{ где, что } abc \text{ минимально при минимальных } a, b, c, \text{ т.е. } a_1 + b_1 + c_1$$

$a_2 + b_2 + c_2 \geq 32$ при $b_2 = 5$, это тоже не подходит, значит минимальное a_1, b_1, c_1 будет 37, так как $b_2 = 0$ и $a_1 + c_1 \geq 27$. В самом деле, если $a_1 + c_1 \geq 27$, то $a_2 + b_2 + c_2 \geq 32$.

Если b_1 увеличится, то $a_1 + b_1 + c_1$ тоже увеличится. Таким образом

$$a_1 + b_1 + c_1 \geq 37$$

$$\text{поэтому } abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37} \text{ или минимальное } abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

Проверим, чтобы все три (a, b, c) были натуральными. Для этого приведем пример:

$$a = 8, b = 6, c = 12 \Rightarrow a = 2^3, b = 2^1 \cdot 3^1, c = 2^2 \cdot 3^2$$

$$a_2 = 17, b_2 = 0, c_2 = 20$$

$$ab = 2^{3+1} \cdot 3^{1+1} = 2^4 \cdot 3^2$$

$$bc = 2^{1+2} \cdot 3^{1+2} = 2^3 \cdot 3^3$$

$$ac = 2^{3+2} \cdot 3^{2+2} = 2^5 \cdot 3^4$$

$$\text{и } abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

$$\text{Итак } 2^{26} \cdot 7^{37}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

удовлетворяет условию: правая часть
то, следовательно, (м.е.м.)

$$(2x^2 - 5x + 3) - (2x^2 + 2x + 1) = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 0$$

применив 6 способ, можно получить
разности квадратов

$$(2 - 7x) - (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}) = 0$$

$$\text{отсюда} \begin{cases} 2 - 7x = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{7} \\ \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 \end{cases}$$

$$2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \rightarrow D = 25 - 24 = 1 \quad x_1 = \frac{5-1}{4} = 1$$

$$x_2 = \frac{5+1}{4} = 1.5 \Rightarrow x \in (-\infty; 1] \cup [1.5; \infty)$$

$$2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \rightarrow D = 4 - 8 = -4 < 0 \rightarrow x \in \mathbb{R}$$

и т.

таким образом, ОДЗ: $x \in (-\infty; 1] \cup [1.5; \infty)$

корень $x = \frac{2}{7}$ в ОДЗ.

$$a) \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 1 - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 0 \\ \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 - \sqrt{2x^2 - 5x + 3} \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \quad 2x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 0 \quad x_1 = 1, x_2 = 1.5$$

$$2x^2 + 2x + 1 = 0 \quad D = 4 - 8 = -4 < 0$$

$$8x^2 + 4x - 1 = 0 \quad x_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{16}, x_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{16}$$

и т.д. асимптотический квадрат
корень положительный, удовлетворяет (1)
таким образом, удовлетворяет условию (1)
которая является системой уравнений.

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 0 \\ 1 - \sqrt{2x^2 - 5x + 3} \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$8x^2 - 22x - 3 \geq 0$$

$$x_1 = \frac{11 + \sqrt{17}}{4}, x_2 = \frac{11 - \sqrt{17}}{4}$$

$$\sqrt{2x^2 + 2x + 1} \leq 1 \Rightarrow 2x^2 + 2x \leq 0$$

$$2x(x+1) \leq 0 \Rightarrow x \in [-1; 0]$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \leq 1 \Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 \leq 0$$

$$D = 25 - 16 = 9 \quad x_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{5+3}{4} = 2$$

решения системы будут:

$$X = [-1; 0] \cap [\frac{1}{2}; 2] = \emptyset$$

следовательно, уравнение (1) не имеет решений

таким образом, единственное решение - $x = \frac{2}{7}$

Ответ: $x = \frac{2}{7}$

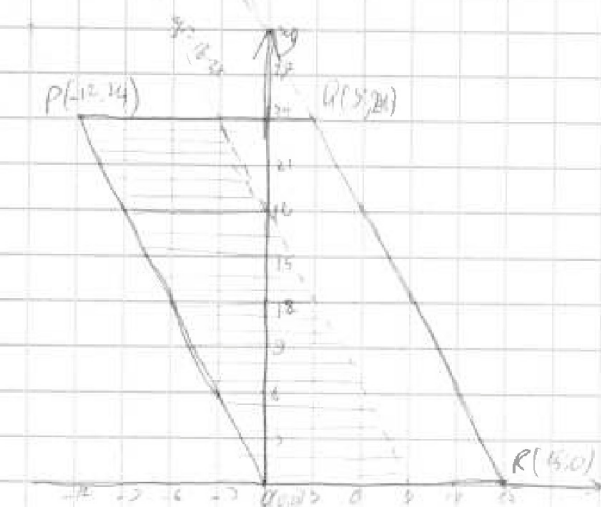
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 + y_1 = 12$$

$$y_2 = (12 + y_1 + 2x_1) - 2x_2$$

$y_1(x_1)$ представляет собой прямую линию
 $y = kx + b$, где $k = -2$, $b = 12 + 2x_1 + y_1$

Получим, что на прямой $y_1(x_1)$

лежит ровно 13 точек, поско-

льку $b = 12 + 2x_1 + y_1$ принадлежит отрезку

$[0, 30]$ (точки, принадлежащие пара-

лелограмму и имеющие целые координаты), и в этом случае неравенство
 $0 \leq b \leq 30$ (т.к. в противном случае точка принадлежала бы не границе, а внутренней

$$\begin{cases} 12 + 2x_1 + y_1 \leq 30 \\ 12 + 2x_1 + y_1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 \leq 18 - 2x_1 \\ y_1 \geq -12 - 2x_1 \end{cases}$$

отвечает на рисунке контуром отмеченной.

Поскольку нас интересуют только точки с целыми координатами,
можно представить это множество как N точек на прямой $y_1 = 18 - 2x_1$, ка-
ждой из которых соответствует по 13 точек внутри параллелограмма, при-

$$\text{этого } n \in [0, 13] \cap N = N \quad |N| = 19$$

подставляя $y_2(x_1, n)$ в y_2 :

$$y_2 = (12 + n - 2x_1 + 2x_1) - 2x_2 = 12 + n - 2x_2$$

Получим множество точек, причем x_2 свободная координата, $(n+12)$ не
равен коэффициенту при y_2 , т.е. координаты точек, лежащих на
прямой, не имеют общих точек. В каждой из прямых содержится
ровно 13 точек параллелограмма, имеющих целые координаты. Желая на

каждой точке функции $y_2(n, x_1)$ найти по 13 пар с точками прямой $y_2(n, x_2)$ т.е.

т.к. $n \in N$ и $|N| = 19$, то всего таких пар будет 19 раз больше, чем 13-13
13 · 13 · 19

Ответ: 13 · 13 · 19

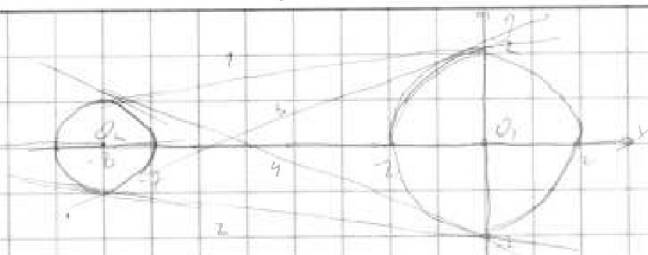
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(x+8)^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

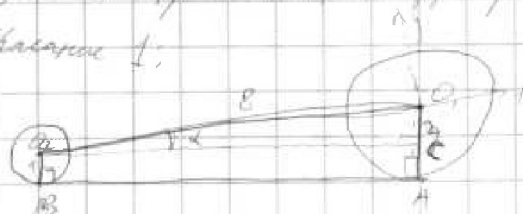
представлен собой два круга

$$(x+8)^2 + y^2 \leq 1 \quad (\text{центр } (-8, 0) \text{ и } R=1)$$

$$\text{и } x^2 + y^2 \leq 4 \quad (\text{центр } (0, 0) \text{ и } R=2)$$

Поскольку возможны два решения, проведем further упрощения, заменив координаты окружностей, радиусы и координаты касания. Будем считать, что касание происходит в точке (x, y) , тогда радиусы будут равны r_1 и r_2 .

Касание 1:



Пусть O_1 - центр первой окружности,

O_2 - второй. AB - касательная к обеим

по условию $O_1O_2 = 8$, $O_2B \perp AB = r_1 = 1$

$$O_1A \perp AB = r_2 = 2$$

Рассмотрим $O_1C \parallel AB$, $ABCO_2$ - прямоугольник, $AC = O_1B = 1$

$$O_1C = AO_2 - AC = 2 - 1 = 1 \quad \text{тогда } \sin \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

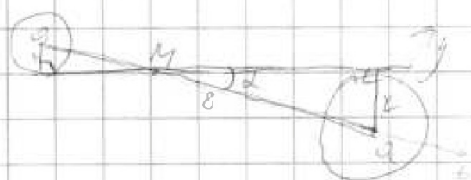
$$\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Значит, угол между O_1O_2 и O_1C равен углу между AB и O_2C (или $AB \parallel O_2C$),

т.е. $\angle AOC$ есть угол между O_1O_2 и касательной, тогда его тангенс выразим через координаты A .

Для точки касания две, и так как окружности лежат на оси x , то координаты для нас будут вычислять тангенс. Поэтому для угла α $\tan \alpha = \frac{y}{x}$ и $-\frac{y}{x}$ найдя точку B , тогда у нас вычислим

Касание 2:



В этом случае $\angle AOC$ есть угол между O_1O_2 и

касательной. $O_1O_2 = O_1M + O_2M =$

$$= \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{2}{\sin \alpha} = 8$$

$$\text{откуда } \sin \alpha = \frac{3}{8}, \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{55}}{8}$$

$$\tan \alpha = \frac{3}{\sqrt{55}} = \frac{3\sqrt{55}}{55}$$

Аналогично производим аналогично,

тогда касательная две и α для нас вычислим

лишь по углу, т.е. $\alpha = \pm \arctan \frac{3\sqrt{55}}{55}$ (в зависимости от того, какая касательная).

$$\text{Ответ: } \pm \frac{3\sqrt{55}}{55}, \pm \frac{3\sqrt{55}}{55}$$

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



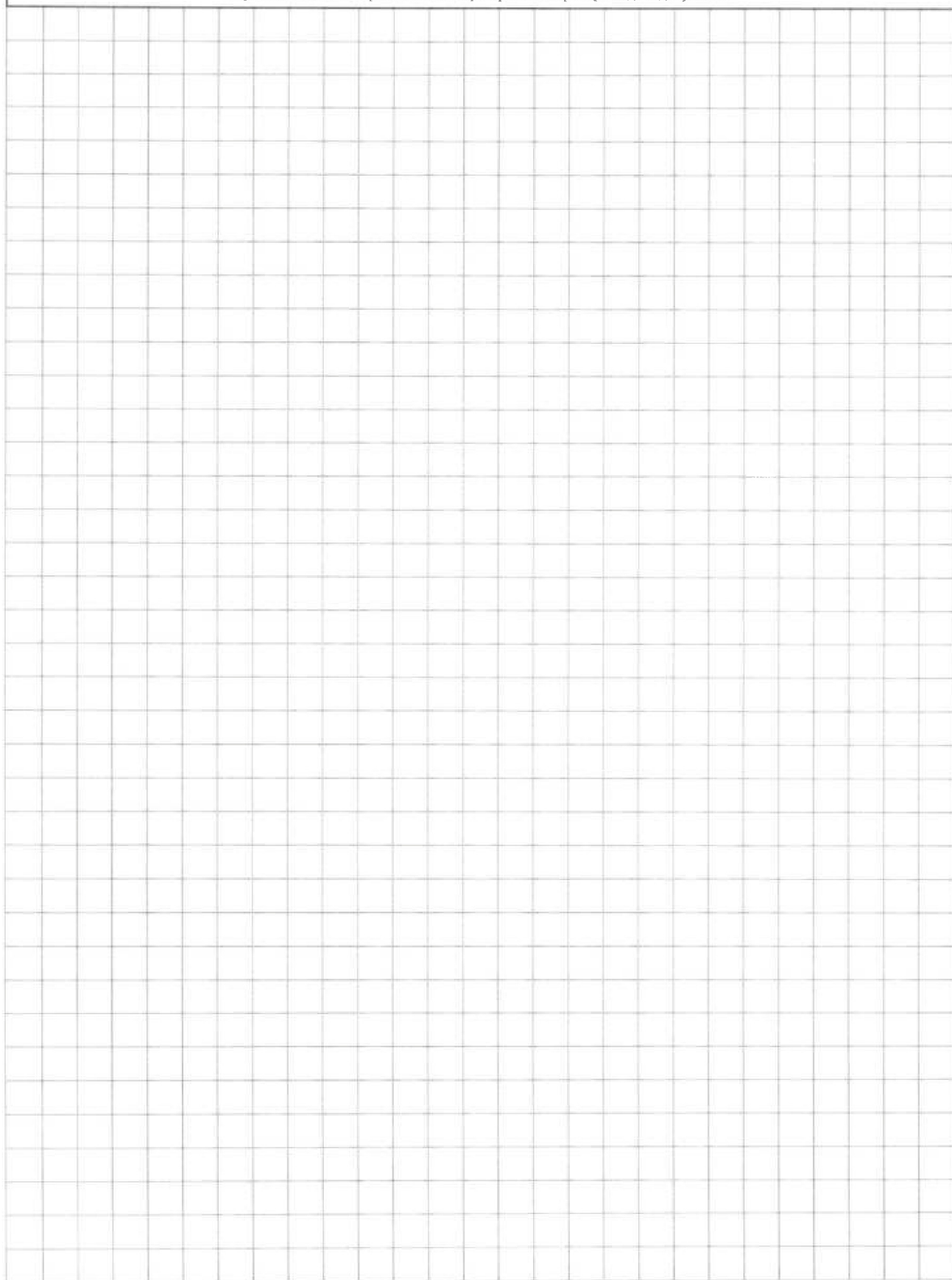
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

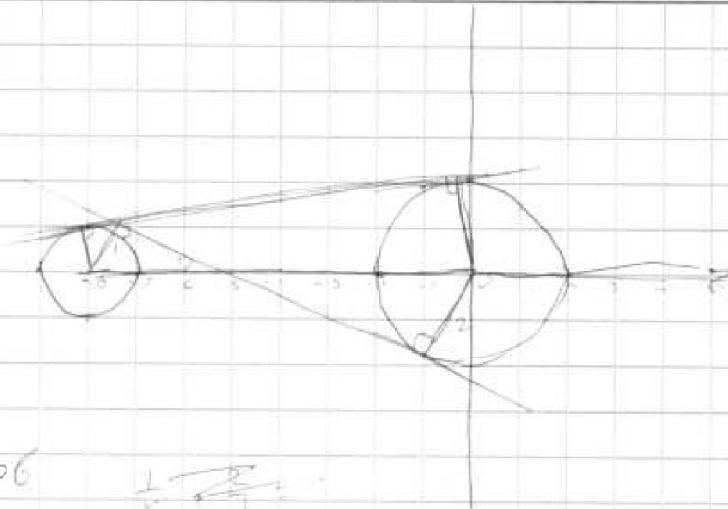
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ax - y + 10b = 0$$

$$(x+b)^2 + y^2 \leq 1$$

$$x^2 + y^2 \leq 4$$



$$ax - y + 10b = 0$$

$$y = -ax + 10b$$

$$\frac{1}{5} \leq \frac{2}{5}$$

$$y = kx + b$$

$$D = 4k^2b^2 - 4(b^2 - 4)(1 + k^2)$$

$$+kx(x^2 + k^2x^2 + 2kx + b^2) - 4 \leq 0$$

$$D = 4k^2b^2 - 4b^2(1 + k^2)$$

$$x^2 + 8x + 64 + k^2x^2 + 2kx + b^2 - 1 = 0$$

$$D = 4k^2b^2 - 4$$

$$D = 4k^2$$

$$b(2kx + 8) + 4(1 + k^2)(b^2 + 63)$$

$$+10b$$

$$\sqrt{65}$$

$$\frac{1}{\sqrt{65}}$$

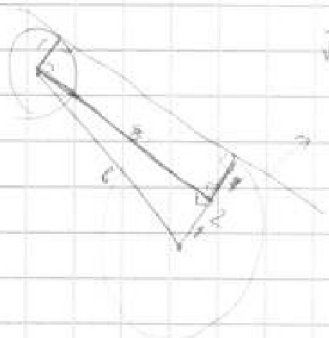
$$\frac{\sqrt{65}}{65}$$

$$1 + 62 + 2$$

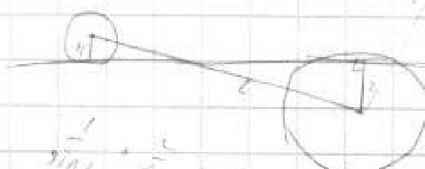
$$3 - 12$$

$$b(2kx + 8) + 4(1 + k^2)(b^2 + 63)$$

$$A \cdot 2 \cdot 8^2$$



$$a/b$$



$$\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{2}{\sin \alpha} = 8$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{8}$$

$$\rightarrow \sin \alpha = 8$$

$$64$$

$$64 - 9 = 55$$

$$\cos \alpha = \frac{55}{8}$$

$$\cos \alpha = \frac{5}{13} = \frac{3\sqrt{5}}{55}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$$

$$\frac{a+b}{(ab)^2 - 6ab}$$

$$a+b = n$$

$$n = kn$$

$$ab = n$$

$$ab = kn$$

$$\frac{ab}{a+b} = k$$

$$a+b = 6ab$$

$$\frac{a+b}{a+b} = \frac{6ab}{a+b}$$

$$\frac{n}{n^2 - 6n}$$

$$\frac{n}{n^2 - 6n}$$

$$\frac{1}{n-6k}$$

$$\frac{ab}{a+b} = k$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 6ab + 6ab = 12ab$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - b^2}$$

$$\frac{1+2}{1+9-6-12} = \frac{3}{-7}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a+b=2$$

$$a = 2 - b$$

$$b = 2 - a$$

$$c = 2 - a - b$$

$$1) a_1 + b_1 \geq 14$$

$$b_1 + c_1 \geq 17$$

$$a_1 + b_1 + c_1 \geq 20$$

$$a_1 + c_1 \geq 23$$

$$17$$

$$17$$

$$17$$

$$a+b+c = 2$$

$$a+b+c \geq 20$$

$$14+17+20=51$$

$$47$$

$$17$$

$$64$$

$$2(a_1+b_1+c_1) \geq 10+17+37=64$$

$$a_1+b_1+c_1 \geq 32$$

$$2(a_1+b_1+c_1) \geq 51$$

$$a_1+b_1+c_1 \geq 26$$

$$2$$

$$16$$

$$32$$

$$a = 2 - b$$

$$b = 2 - a$$

$$c = 2 - a - b$$

$$a_1 = 8$$

$$b_1 = 6$$

$$c_1 = 12$$

$$14$$

$$17$$

$$21$$

$$c_1 \geq 18 - b_1$$

$$a_1 \geq 10 - b_1$$

$$a_1 + c_1 \geq 28 - 2b_1$$

$$a_1 + c_1 \geq 37$$

$$b_1 = 17 - c_1$$

$$10 - b_1 = 17 - c_1$$

$$2b_1 - 10 = -17$$

$$b_1 = 0$$

$$a_1 = 10$$

$$c_1 = 27$$

$$14 - b_1 = 20 - c_1$$

$$2b_1 - 14 = -20$$

$$b_1 = \frac{11}{2} \approx 5.5$$

$$a_1 + c_1 \geq 27 - 2b_1$$

$$b_1 \geq 0$$

$$c_1 + b_1 \geq 27$$

$$a_1 + b_1 + c_1 = 32$$

$$a_1 + b_1 + c_1 \geq 37$$

$$37 + b_1 \geq 32$$

$$15 + 12 + b_1 \geq 32$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 13} + \sqrt{2x^2 - 12x + 11} \geq 2 - 7x$$

$$+ 7x + 2 + (2 - 7x) \geq$$

$$(2 - 7x) + (2 - 7x) \geq 0$$

$$+ 7x - 14 + 14 \geq 0$$

$$x = \frac{2}{7}$$

$$x = 1$$

$$a^2 + 2a + 1 \geq 0$$

$$a = -1$$

$$x_0 = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{2} + 1 =$$

$$= \frac{1}{4} - 1 + 1 = \frac{1}{4}$$

$$2 - 7x = \sqrt{2x^2 - 5x + 13} - \sqrt{2x^2 - 12x + 11}$$

$$b_1 + c_1 \geq 37$$

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{2} + \frac{6}{2} = 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{6}{2} = 6$$

$$\frac{1}{4} + 1 + 1 = 2.25$$

$$x^2 - 5x + 3 \geq 0$$

$$x = 2.5 \pm 2.4$$

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} = \frac{5 + 3.6}{2}$$

$$x_2 = +1$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

$$L(\frac{1}{2}, 2)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2 - 5x + 5} + \sqrt{4x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 5} + \sqrt{2(2x^2 + 2x + 1)} = \sqrt{5} \cdot 2$$

$$2x^2 - 5x + 5 = 1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + 2x^2 + 2x + 1$$

$$2 - 7x = 1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 7x - 1$$

$$4x^2 + 2x + 4 = 49x^2 - 14x + 1$$

$$45x^2 - 22x + 3 = 0$$

$$D = 11^2 - 4 \cdot 45 \cdot 3 = 121 - 1215 < 0$$

$$2x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$4x(x+1) \geq 0$$

$$x \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$$

$$x \in [-1, 0]$$

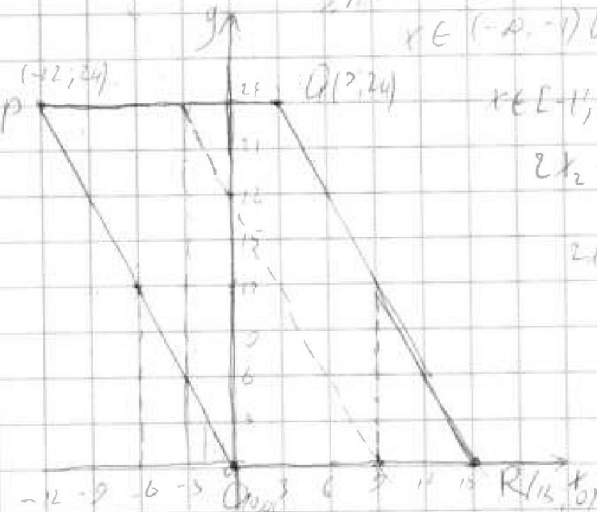
$$2x_2 - 2x_1 + y_1 - y_2 = 12$$

$$2x_2 + y_2 = 12 + 2x_1 + y_1$$

$$y_2 = (12 + 2x_1 + y_1) - 2x_2$$

(13)

15.10



15.15

$$y \geq 12 + 2x_1 + y_1$$

$$12 + 2x_1 + y_1 \leq 30$$

$$2x_1 + y_1 \leq 18$$

$$y_1 \leq 18 - 2x_1$$

$$x_1 \leq 9 - \frac{y_1}{2}$$

$$12 + 2x_1 + y_1 \geq 0$$

$$y_1 \in [0, 24]$$

$$y_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 9$$

$$y_1 \geq -12 - 2x_1$$

$$x_1 \geq -6$$

$$-12 - 2x_1 \leq 24$$

$$x_1 \geq 6$$

$$3 \leq x_1 \leq 15$$

$$12 + 2x_1 + y_1 \leq 30$$

$$y_1 \leq 18 - 2x_1$$

$$y_1 = 18 - 2x_1$$

$$x_1 \in [0, 9]$$

$$y_1 \in [0, 18]$$

$$0 \leq 12 + 2x_1 + y_1 \leq 30$$

$$y_1 \geq -12 - 2x_1$$

$$0 \leq -12 - 2x_1$$

$$x_1 \leq -6$$

$$y_1 \leq 18 - 2x_1$$

$$24 \leq 18 - 2x_1$$

$$x_1 \leq -3$$

$$24 \geq y_1 \geq -12 - 2x_1$$