



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Пусть } ab = m \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc = n \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{37} \cdot d$$

$$ab \cdot bc \cdot ac = a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = m \cdot 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot n \cdot 2^{17} \cdot 7^{17} \cdot d \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$abc = \sqrt{m \cdot n \cdot d \cdot 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot 2^{17} \cdot 7^{17} \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}} =$$

$$= \sqrt{m \cdot n \cdot d \cdot 2^{51} \cdot 7^{64}}$$

Наименьшее возможное значение

при $m \cdot n \cdot d = 1$ ($m=1, n=1, d=1$).

$$abc = \sqrt{2^{51} \cdot 7^{64}} = \sqrt{(7^{32})^2 \cdot (2^{25})^2 \cdot 2} = 2^{25} \cdot 7^{32} \sqrt{2}.$$

Ответ: $2^{25} \cdot 7^{32} \sqrt{2}.$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{a}{b}$ - несократимая дробь. Будем считать, что $a > b$.

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a \cdot \frac{a}{b} + b \cdot \frac{a}{b}}{a^2 \cdot \frac{a}{b} - 6ab \cdot \frac{a}{b} + b^2 \cdot \frac{a}{b}} = \frac{a \left(\frac{a}{b} + 1 \right)}{a \left(\frac{a^2}{b} - 6a + \frac{a}{b} \right)} \Rightarrow$$

$$m_{\text{наиб}} = a.$$

Ответ: a .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

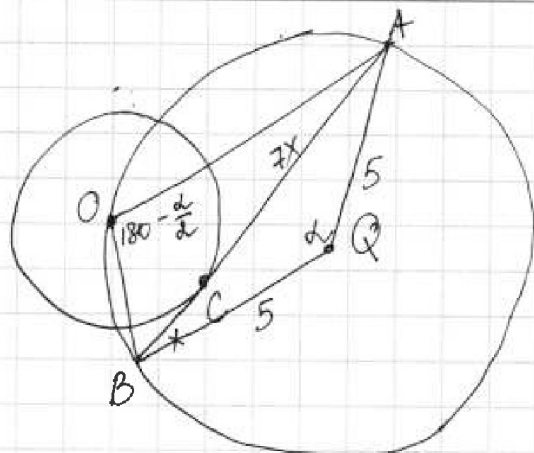
Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!



$$r=1, R=5, \frac{AC}{CB}=7$$

Пусть $AC=7x, BC=x,$
 $\angle BQA = \alpha$, тогда $AB=8x,$
 $\angle BOA = \frac{360-\alpha}{2} = 180 - \frac{\alpha}{2}$

$\triangle BOA$ вписан в окр. $(Q; R)$

$\triangle BOA$: по теореме синусов: $\frac{AB}{\sin(180-\frac{\alpha}{2})} = 2R$, где $AB=8x$

$$\sin(180-\frac{\alpha}{2}) = \frac{AB}{2R}, \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{8x}{2 \cdot 5} = \frac{4}{5}x$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}x^2} = \frac{3}{5}x$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \Rightarrow \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 = 2 \cdot \frac{9}{25}x^2 - 1 = \frac{18}{25}x^2 - 1$$

Теорема косинусов для $\triangle BQA$:

$$AB^2 = BQ^2 + QA^2 - 2 \cdot BQ \cdot QA \cdot \cos \alpha$$

$$64x^2 = 25 + 25 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \left(\frac{18}{25}x^2 - 1 \right)$$

$$64x^2 = 50 - 50 \cdot \frac{18}{25}x^2 + 50$$

$$64x^2 = 100 - 36x^2$$

$$64x^2 + 36x^2 = 100$$

$$100x^2 = 100$$

$$x=1 \Rightarrow \underline{AB=8x=8}$$

Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$OD3: 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \Rightarrow (2x - 3)(x - 1) \geq 0$$

$$2x^2 + 2x + 1 \text{ всегда } > 0, \text{ т.к.}$$

$$D < 0$$



$$\frac{2}{3} \leq x \leq 1 \quad \frac{2}{3} > x > 1$$

$$(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1})(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}) = (2 - 7x) \cdot$$

$$\cdot (\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$2 - 7x = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$(2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} - 1) = 0$$

$$\left[x = \frac{2}{7} \right] - \text{попадает в область допустимых значений. } \frac{2}{7} < \frac{2}{3}$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 \quad (2)$$

$$(2) \quad 2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 + 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = -(4x^2 - 3x + 3)$$

$$4x^2 - 3x + 3 = 0$$

$$D = 9 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 9 - 36 < 0 \Rightarrow \text{выражение } (4x^2 - 3x + 3) > 0 \Rightarrow$$

$$-(4x^2 - 3x + 3) < 0$$

$$2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} > 0 \Rightarrow \text{уравнение (2) не}$$

имеет решений.

$$\text{Ответ: } \frac{2}{7}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

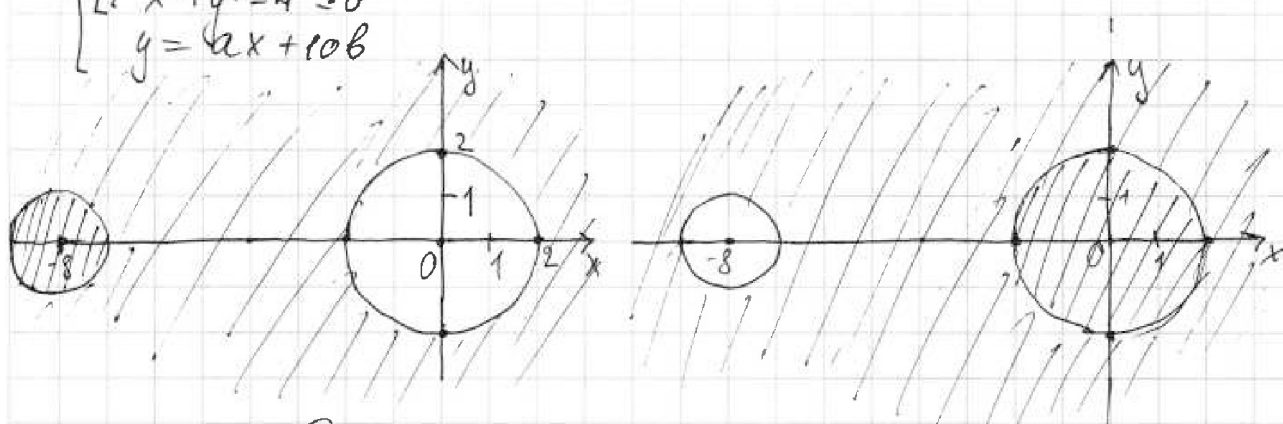
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)((x^2 + y^2 - 4)) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = ax + 10b, \text{ - на график-мишени} \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)((x^2 + y^2 - 4)) \leq 0 \end{cases}$$

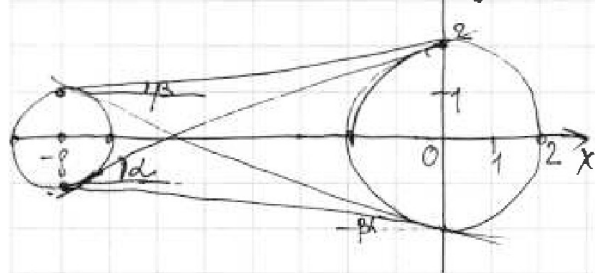
$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \\ (x+8)^2 + y^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \\ y = ax + 10b \end{cases}$$

$(x+8)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \text{окр. с центром } (-8; 0), R=1.$
 $x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow \text{окр. с центром } (0; 0), R=2.$



Система будет иметь решения, только если

$$(x+8)^2 + y^2 - 1 = 0, \quad x^2 + y^2 - 4 = 0.$$



Тогда график функции $y = ax + 10b$, должен касаться 2-ух окружностей одновременно и внутренним способом, так что $\tan \alpha = \pm \frac{3}{8}$,

$$\tan \alpha = \pm \frac{1}{8} \Rightarrow a = \pm \frac{3}{8}, \quad a = \pm \frac{1}{8}.$$

Answer: $\pm \frac{3}{8}, \quad \pm \frac{1}{8}.$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ax - y + 10b = 0,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x+8)^2 + y^2 - 1 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = ax + 10b, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{array} \right.$$

Система уравн. будет
иметь 2 р-и, при

$$(x+8)^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \text{и}$$

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$

Чтобы система имела 2

р-и, касат. к окруж. и прямая $y = ax + 10b$

должна касаться окружностей внеш. и внутр. способами.

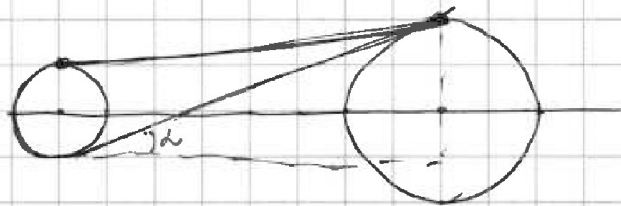
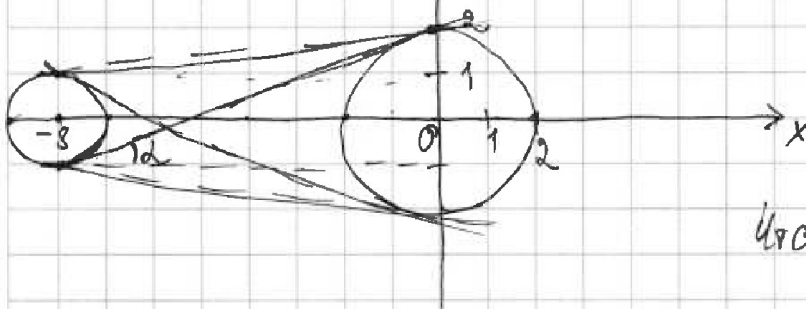
$$y = ax + 10b, \quad a = \operatorname{tg} \alpha$$

$$y = ax + 10b$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$\alpha = \pm \frac{3}{8}, \quad \alpha = \pm \frac{1}{8}$$

$$\text{Ответ: } \pm \frac{3}{8}, \quad \pm \frac{1}{8}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

$$a+b : m, \quad a^2-6ab+b^2 : m$$

$$a^2-6ab+b^2 = a^2-4ab+b^2-2ab = (a-b)^2-2ab$$

$$\parallel$$

$$a^2+2ab+b^2-8ab = (a+b)^2-8ab$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2-8ab} = \frac{a \cdot \frac{a}{b} + b \cdot \frac{a}{b}}{a^2 \cdot \frac{a}{b} - 8ab \cdot \frac{a}{b} + b^2 \cdot \frac{a}{b}} = \frac{\frac{a^2}{b} + a}{\frac{a^3}{b} - 8a^2 + ab}$$

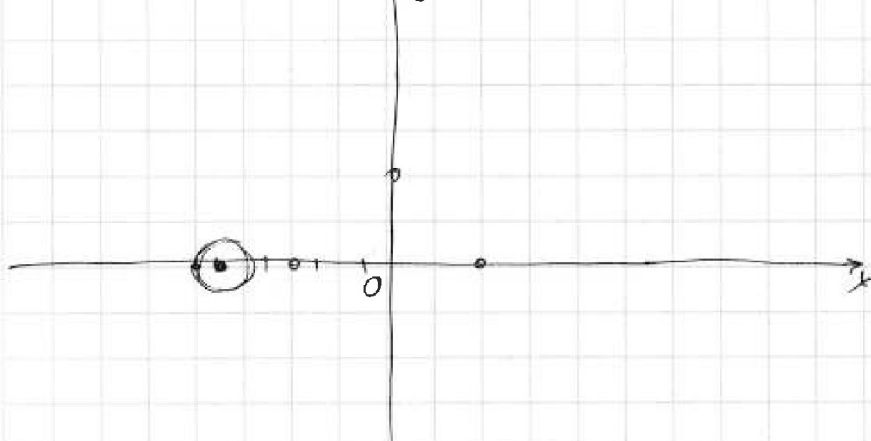
$$= \frac{a(\frac{a}{b} + 1)}{a(\frac{a^2}{b} - 8a + b)} = \frac{\frac{a}{b} + 1}{\frac{a^2}{b} - 8a + b}$$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a \cdot \frac{a}{b} + b \cdot \frac{a}{b}}{a^2 \cdot \frac{a}{b} - 6ab \cdot \frac{a}{b} + b^2 \cdot \frac{a}{b}} =$$

т.к. дробь $\frac{a}{b}$ несократима. Будем считать, что $a > b$.

$$= \frac{\frac{a^2}{b} + a}{\frac{a^3}{b} - 6a^2 + ab} = \frac{a(\frac{a}{b} + 1)}{a(\frac{a^2}{b} - 6a + b)} \quad \text{и тогда} \Rightarrow \frac{m=a}{\text{наиб}}$$

$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ ((x+8)^2+y^2-1)((x^2+y^2-4)) \leq 0 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$$

$$\text{OP 3: } 2x^2-5x+3 \geq 0$$

$$2x^2-5x+3=0 \Rightarrow (2x-3)(x-1)$$

$$D=25-2 \cdot 4 \cdot 3=1$$

$$(2x-3)(x-1) \geq 0$$

$$x_1 = \frac{5-1}{4} = 1$$

$$x_2 = \frac{5+1}{4} = \frac{3}{2}$$



$$x \leq \frac{3}{2}$$

$$x \geq 1$$

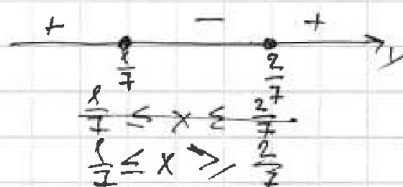
$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$$

$$2x^2-5x+3 - 2x^2-2x-1 - 2\sqrt{2x^2-5x+3} \cdot \sqrt{2x^2+2x+1} = (2-7x)^2$$

$$-2\sqrt{2x^2-5x+3} \cdot \sqrt{2x^2+2x+1} = (2-7x)(1-7x)$$

$$(2-7x)(1-7x) \leq 0$$

$$x = \frac{2}{7}, x = \frac{1}{7}$$



$$(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1) = 4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x^2 - 10x^3 - 5x + 6x^2 + 6x + 3 =$$

$$= 4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 - 5x + 6x^2 + 6x + 3 =$$

$$= 4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3$$

$$4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3 = 0$$

$$x=1: 4-6-2+1+3=4-4=0$$

$$4x^4 - 4x^3 - 2x^3 + 2x^2 - 4x^2 + 4x - 3x + 3 = 0$$

$$4x^3(x-1) - 2x^3(x-1) - 4x(x-1) - 3(x-1) = 0$$

$$(x-1)(4x^3 - 2x^3 - 4x - 3) = 0$$

$$4x^3 - 2x^3 - 4x - 3 = 0$$

$$x=2: 32-8-8-3 \neq 0$$

$$x=7: 49-2-4-3 \neq 0$$

$$x=-1: -4-2+4-3 \neq 0$$

$$2\sqrt{2x^2-5x+3} \cdot \sqrt{2x^2+2x+1} = (2-7x)(1-7x)$$

$$4(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1) = (2-7x)^2(1-7x)^2$$

$$\left(\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} \right) \left(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} \right) =$$

$$= 2-7x(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1})$$

$$(2x^2-5x+3 - 2x^2-2x-1) = 2-7x(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1})$$

$$2-7x = 2-7x(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1})$$

$$(2-7x)(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}) = 0$$

$$x = \frac{2}{7}$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} - 1 = 0 \quad (2)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2) \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 + 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 3x - 4x^2 - 3$$

$$-4x^2 + 3x - 3 = 0$$

$$4x^2 - 3x + 3 = 0$$

$$D = 9 - 4 \cdot 3 \cdot 3 < 0 \Rightarrow \text{ур. } 4x^2 - 3x + 3 \text{ всегда}$$

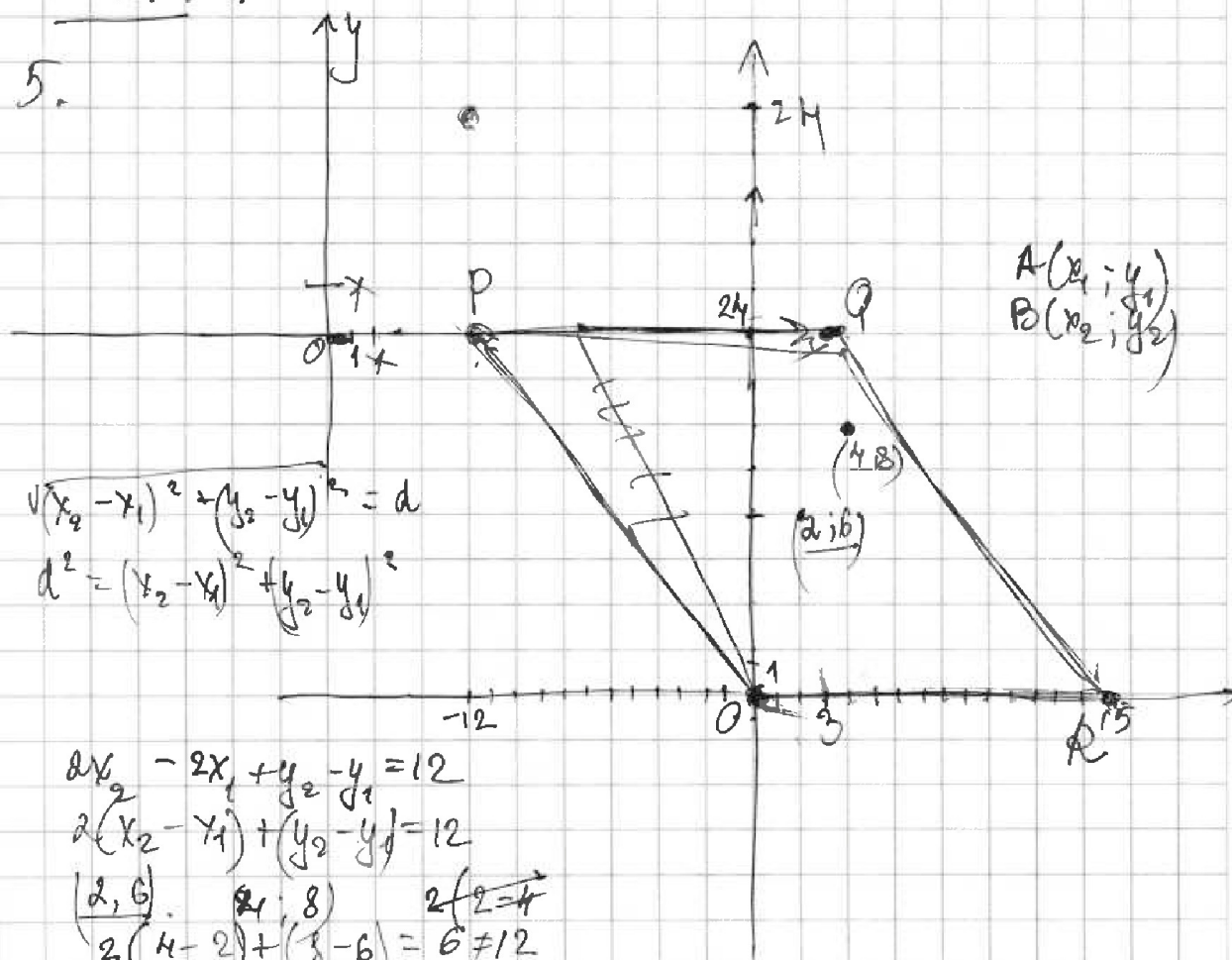
положительно

$$\text{ур. } -(4x^2 - 3x + 3) < 0$$

$$2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 0 \Rightarrow \text{ур. (2) } \emptyset$$

Answer: $\frac{2}{7}$

5.



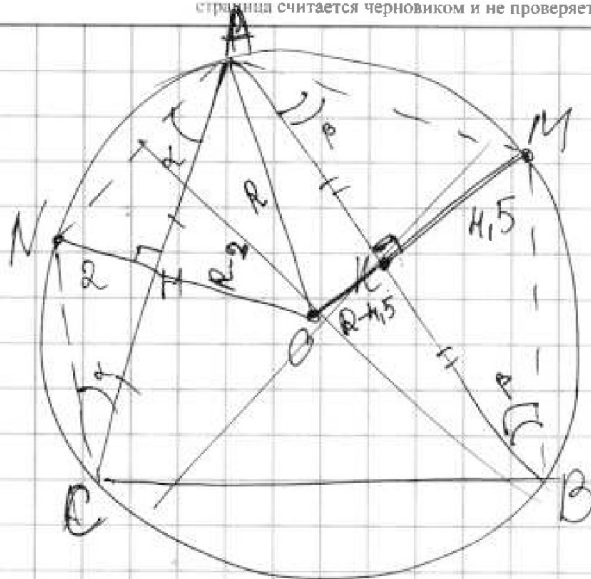
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

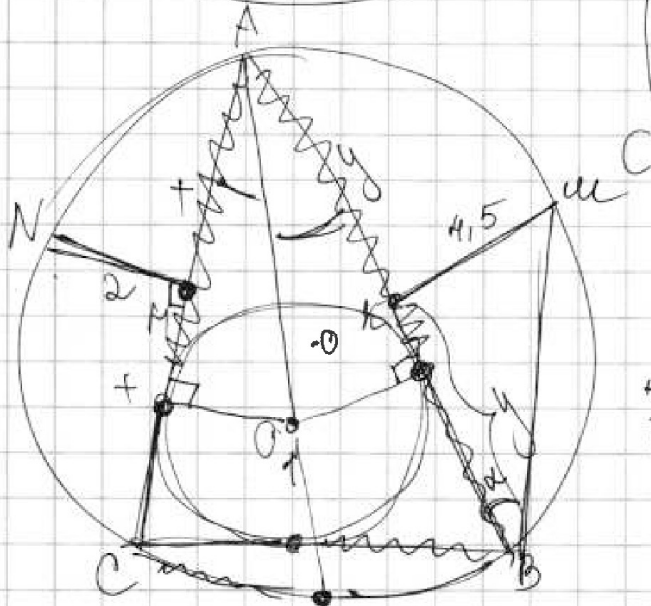
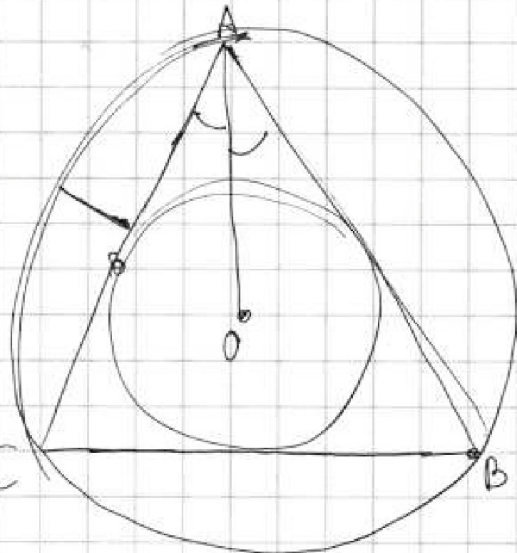
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AO = R - ?$$



$$a^2 - 6ab + b^2 = 0$$

$$a_1 = 9b^2 - b^2 = 8b^2$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 34 \\ + 17 \\ \hline 51 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 22 \\ + 37 \\ \hline 59 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ 14 \\ + 17 \\ \hline 31 \end{array}$$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

$$abc = ?$$

$$ab = k \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc = m \cdot 2^{12} \cdot 7^{12}$$

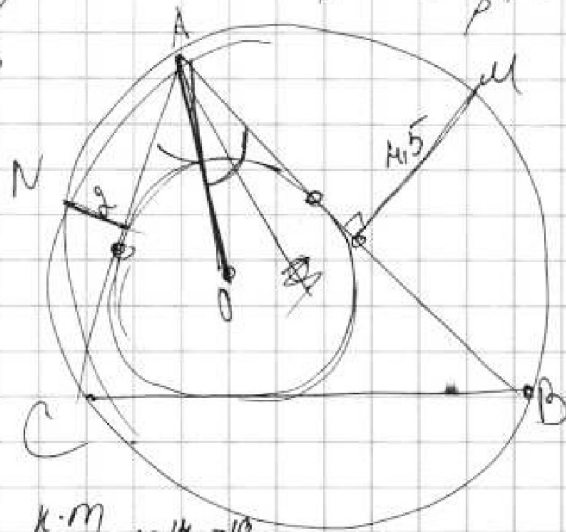
$$ac = n \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$\frac{ab}{bc} = \frac{k}{m} \cdot \frac{1}{2^3 \cdot 7^7}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{m}{k} \cdot 2^3 \cdot 7^7$$

$$c = \frac{m}{k} \cdot a \cdot 2^3 \cdot 7^7$$

$$b = \frac{k \cdot m \cdot 2^{17} \cdot 7^{12}}{a \cdot 2^3 \cdot 7^7} = \frac{k \cdot m}{a} \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

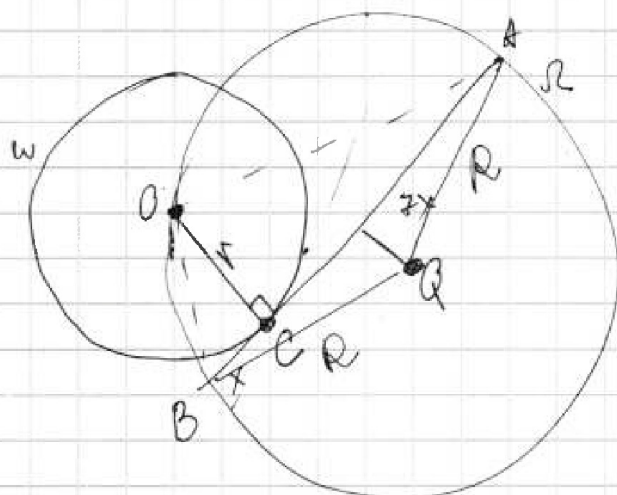
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2401x^4 - 16x^4 - 258x^3 + 24x^3 + 196x^2 + 8x^2 + 441x^2 - 4x - 84x + 8 = 0$$

3.

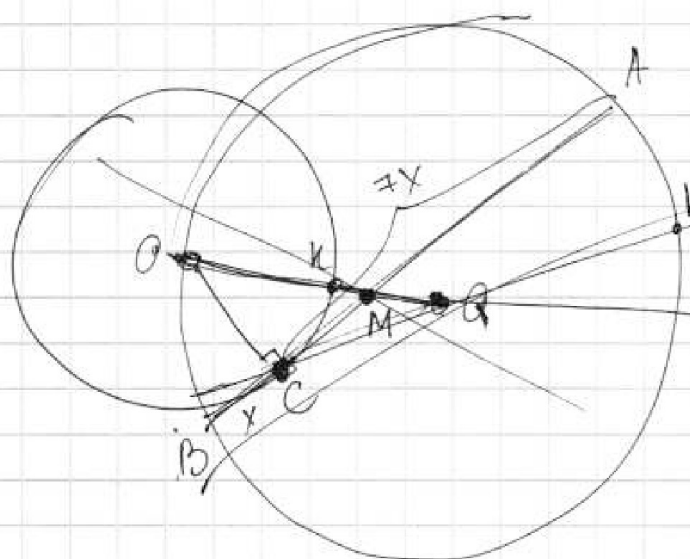


$$\frac{AC}{CB} = 7 \quad AB = ?$$
$$r = 1, R = 5.$$

$$AB = 8x$$
$$S_{BOA} = \frac{1}{2} r \cdot 8x$$

$$OQ = R$$

$$KQ = R - r = 5 - 1 = 4$$



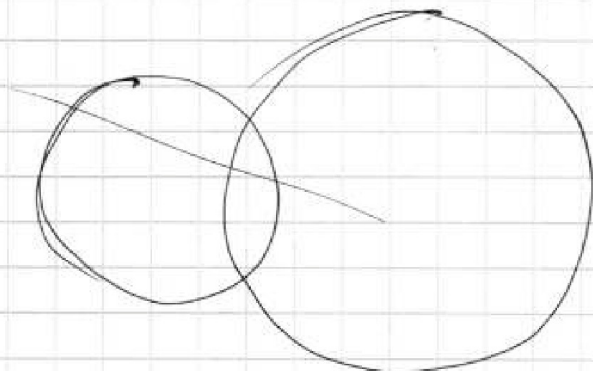
$$CO = 2$$

$$AB = 8x$$

$$KQ$$

$$x \cdot 7x = BC \cdot CH$$

$$8x^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

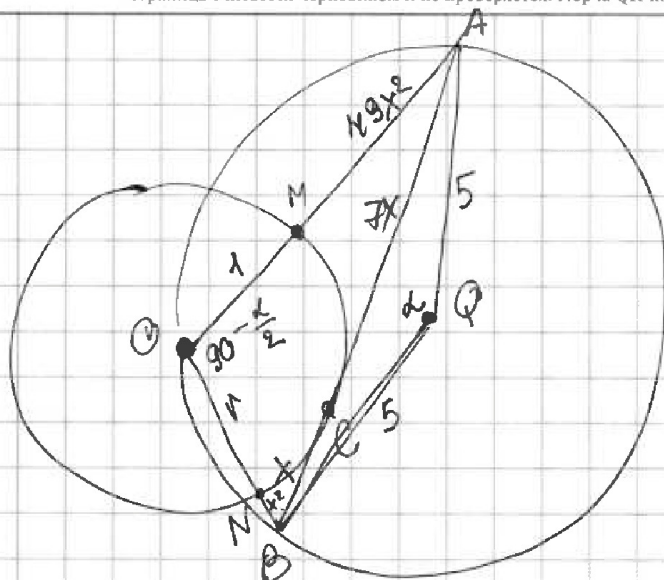
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5.3



$$CA^2 = OM \cdot MA$$

$$49x^2 = 1 \cdot MA \Rightarrow$$

$$MA = 49x^2$$

$$BN \cdot BO = BC^2$$

$$x^2 = BN \cdot 1$$

$$BN = x^2$$

$$AB^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos \alpha$$

$$(1) 8x^2 = 50 - 2 \cdot 25 \cdot \left(\frac{8}{5}x - 1\right)$$

$$\frac{360 - \frac{\alpha}{2}}{\cos} = 180 - \frac{\alpha}{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{AB}{2R}$$

$$\frac{AB}{\sin(90 - \frac{\alpha}{2})} = 2R$$

$$\frac{8x}{\cos \frac{\alpha}{2}} = 10 \Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{8x}{10} = \frac{4}{5}x \Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \Rightarrow$$

$$\sin(180 - \frac{\alpha}{2}) = \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\cos \alpha = 2 \cdot \frac{4}{5}x - 1 = \frac{8}{5}x - 1$$

$$\sin \alpha$$

$$\frac{8x}{\sin \frac{\alpha}{2}} = 10$$

$$(1) 8x^2 = 50 - 50\left(\frac{8}{5}x - 1\right)$$

$$8x^2 = 50 - 80x + 50 \Rightarrow 8x^2 + 80x - 100 = 0 \quad 30:5=6$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 25 \\ 150 \\ 150 \end{array}$$

$$\text{answer: } 20\sqrt{6} - 40$$

$$4x^2 + 40x - 50 = 0$$

$$2x^2 + 20x - 25 = 0$$

$$D = 100 + 4 \cdot 2 \cdot 25 = 150 = (\sqrt{150})^2 = (5\sqrt{6})^2$$

$$x_1 = \frac{-10 - 5\sqrt{6}}{2} - \text{не год}$$

$$x_2 = \frac{-10 + 5\sqrt{6}}{2} > 0$$

$$AB = 8x = 8 \cdot \left(\frac{-10 + 5\sqrt{6}}{2}\right) =$$

$$= +4(5\sqrt{6} - 10) = 20\sqrt{6} - 40$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$4(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1) = (2 - 7x)^2(1 - 7x)^2$$

$$4(4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 - 5x + 6x^2 + 6x + 3) = (4 - 28x + 49x^2) \cdot (1 - 14x + 49x^2)$$

$$16x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 40x^3 - 40x^2 - 20x + 24x^2 + 2$$

$$4(4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3) = 4 - 4 \cdot 14x + 4 \cdot 49x^2 - 28x + 28 \cdot 14x - 28x \cdot 49x^2 + 49x^2 - 49x^3 \cdot 14 + 49x^2 \cdot 4$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x \quad \text{одн: } 2x^2 - 5x + 3 \geq 0$$

$$2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 - 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = (2 - 7x)^2$$

$$-7x + 2 - 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = (2 - 7x)^2$$

$$-2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = (2 - 7x)(2 - 7x - 1)$$

$$= (2 - 7x)(1 - 7x)$$

$$(2 - 7x)(1 - 7x) < 0 \Rightarrow x \in \left(\frac{1}{7}; \frac{2}{7}\right)$$

$$(50 - 1)^2 = 2500 - 100 + 1$$

$$-2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 49x^2 - 7x - 14x + 2$$

$$49x^2 - 21x + 2$$

$$(50 - 1)(204) = 100 + 50 - 20 - 1 = 129$$

$$4(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1) = (49x^2 - 21x + 2)^2$$

$$4(4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 - 5x + 6x^2 + 6x + 3) = (49x^2 - 21x + 2)^2$$

$$4(4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3) = 49^2 x^4 - 49 \cdot 21x^3 + 2 \cdot 49x^2 - 21 \cdot 49x^3 + 21^2 x^2 - 21 \cdot 2x + 49 \cdot 2x^2 - 42x + 4$$

$$16x^4 - 24x^3 - 8x^2 + 4x + 12 = 2401x^4 - 2058x^3 + 196x^2 + 441x^2 - 84x + 4$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 49 \\ \times 4 \\ \hline 196 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21^2 \\ (20+1)^2 = \\ = 400 + 40 + 1 = \\ = 441 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 129 \\ \times 2 \\ \hline 258 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$2x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1$$

$$D = 4 - 8 = -4 < 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{5-1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

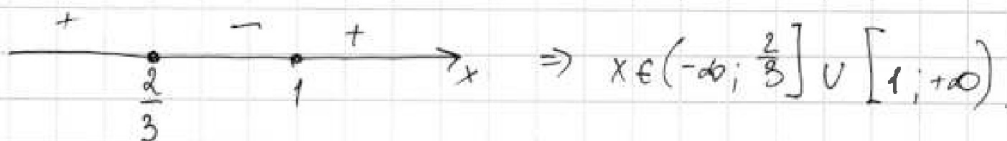
ур всегда положительная

$$x_2 = \frac{5+1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = (2x - 3)(x - 1)$$

$$\sqrt{(2x-3)(x-1)} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$OD3: (2x-3)(x-1) \geq 0$$



$$\sqrt{(2x-3)(x-1)} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\left(\sqrt{(2x-3)(x-1)} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \right)^2 = (2 - 7x)^2$$

$$(2x-3)(x-1) - (2x^2 + 2x + 1) - 2\sqrt{(2x-3)(x-1)}(2x^2 + 2x + 1) = 4 - 28x + 49x^2$$

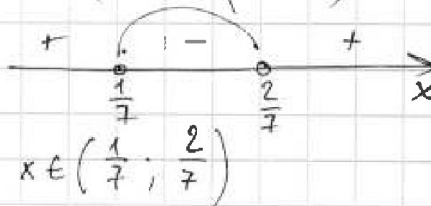
$$-7x + 2 - 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)}(2x^2 + 2x + 1) = (2 - 7x)^2$$

$$-2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)}(2x^2 + 2x + 1) = (2 - 7x)^2 - (2 - 7x)$$

$$-2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)}(2x^2 + 2x + 1) = (2 - 7x)(1 - 7x)$$

$$(2 - 7x)(1 - 7x) < 0 \Rightarrow$$

$$(7x - 2)(7x - 1) < 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Поря QR-кода неопустима!

6.
$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = ax + 10b, (1) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 (2) \end{cases}$$

$y = ax + 10b$ (1) — прямая.

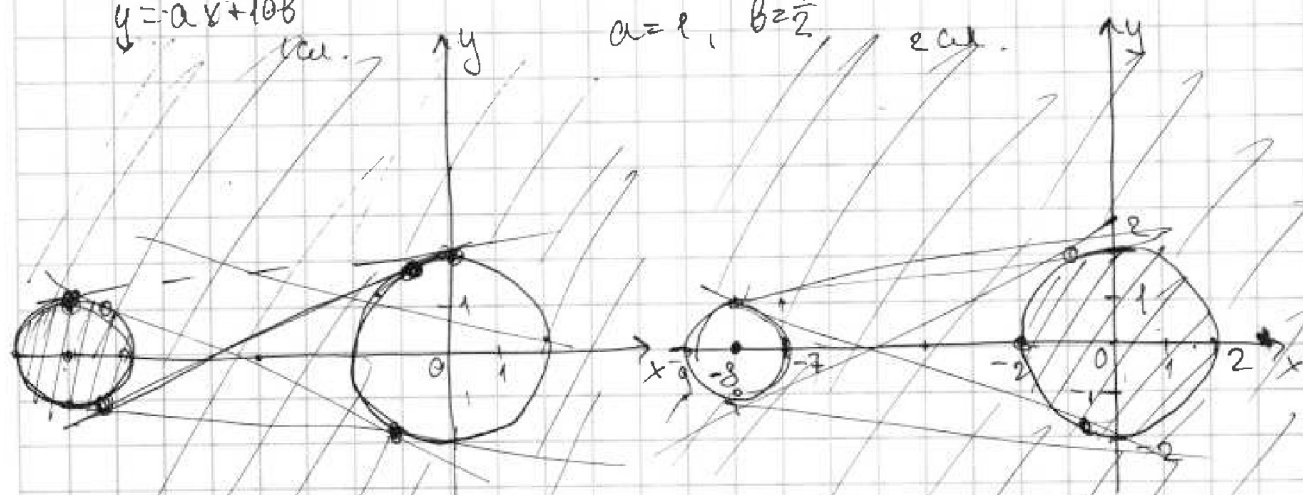
$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 = 0 \\ (x+8)^2 + y^2 = 1 \text{ — окр.} \\ x^2 + y^2 = 4 \text{ — окр.} \end{cases}$$

Решения
система ур. имеет 2
реш, если прямая
 $y = ax + 10b$ кас.
окр. M и N.

Это можно св. к-м
сл. 2 внутр. кас., 2
внеш. кас.

$y = ax + 10b$

$ax + 10b$
 $a = 1, b = \frac{1}{2}$



$$\begin{cases} y = ax + 10b \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

$$(x+8)^2 + (ax + 10b)^2 = 1$$

$$x^2 + 16x + 64 + a^2x^2 + 20abx + 100b^2 - 1 = 0$$

$$x^2(a^2 + 1) + 4x(4 + 5ab) + 100b^2 + 63 = 0$$

$$D = (4 + 5ab)^2 - (a^2 + 1)(100b^2 + 63) = 0$$

$$4(16 + 40ab + 25a^2b^2) - 100a^2b^2 - 100b^2 - 63a^2 - 63 = 0$$

$$64 + 160ab + 100a^2b^2 - 100a^2b^2 - 100b^2 - 63a^2 - 63 = 0$$

$$100b^2 + 63a^2 - 160ab - 1 = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab : 2^{14} \cdot 7^{10}, \quad bc : 2^{17} \cdot 7^{17}, \quad ac : 2^{20} \cdot 7^{37} \quad \min(abc) - ?$$

$$ab = \frac{k \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}}{k \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}}, \quad bc = \frac{n \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}}{n \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}}, \quad ac = \frac{d \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}}{d \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}}$$

$$a = \frac{b}{b}$$

$$ac = \frac{k \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}}{b} \cdot c = d \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$\frac{d}{c} = \frac{c}{b} = \frac{d \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}}{k \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}}$$

$$\frac{c}{b} = \frac{d}{k} \cdot 2^6 \cdot 7^{27}$$

$$\frac{d}{k} = \frac{ac \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}}{2^{20} \cdot 7^{37}} \cdot \frac{2^{14} \cdot 7^{10}}{b} = \frac{c}{b}$$

$$ab = m \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}, \quad bc = n \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}, \quad ac =$$

$$\begin{cases} ab = m \cdot 2^{14} \cdot 7^{10} \\ bc = n \cdot 2^{17} \cdot 7^{17} \\ ac = l \cdot 2^{20} \cdot 7^{37} \end{cases}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{m \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}}{l \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}} \quad bc = n \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$a = \frac{m \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}}{b} \quad b = \frac{n \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}}{c}$$

$$\frac{abc}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} =$$

$$a^2 - 6ab + b^2 = 0$$

$$D_1 = 9b^2 - 4b^2 = 5b^2$$

$$a_1 = \frac{3b - 2\sqrt{2}b}{2}$$

$$a_2 = 3b + 2\sqrt{2}b$$

$$\frac{a+b}{(a-3b+2\sqrt{2}b)(a-3b-2\sqrt{2}b)}$$

$$\begin{aligned} a^2 - 6ab + b^2 \\ D_1 = 9b^2 - 4b^2 = 5b^2 \\ a_1 = \frac{3b - b\sqrt{5}}{2} \\ a_2 = \frac{3b + b\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$