



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1. $ab: 2^5 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$, $bc: 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{18}$; $ac: 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{24}$.

из них произведем все 3 чис, для наименьших значений будут равны произведению притом все в степени кратно.

$a \cdot b \cdot c: 2^{30} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52} \rightarrow abc: 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$

$2^{18} \Rightarrow a$ содержит 2^4 , $b - 2^2$, $c - 2^{12}$ $ab - 2^6$, $bc - 2^{14}$, $ac - 2^{16}$

$3^{30} \Rightarrow a - 3^5$, $b - 3^5$, $c - 3^{10}$, $ab - 3^{10}$, $bc - 3^{15}$, $ac - 3^{20}$

$5^{24} \Rightarrow 5^{11} \cdot 5^{13} = 2^{24} < 5^{14}$, нам в левом случае не будет факта, равные или меньше в левом

$b - 5^8$, $a - 5^{11}$, $c - 5^{14} \rightarrow ab - 5^{14} : 5^{11}$, $bc - 5^{14} : 5^{13}$, $ac - 5^{24} : 5^{24} \rightarrow$

$a = 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{14}$, $b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^8$; $c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{14} \rightarrow abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$ - мин.

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

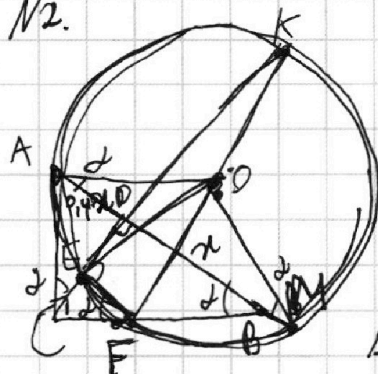
1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№2.



м.к. $\frac{AB}{BP} = 1,4$ $AB = 1,4 BP$, пусть $BP = x$, тогда $AB = 1,4x \Rightarrow AP = 0,4x$

$AB \parallel EF \Rightarrow \angle FEP = \angle EPF = 90^\circ$, м.к. $\angle PEF = 90^\circ \Rightarrow FK$ — диаметр

м.к. AC — касат. $\Rightarrow \angle OAC = 90^\circ \Rightarrow \angle CBA = \angle CAP$, так м.к.

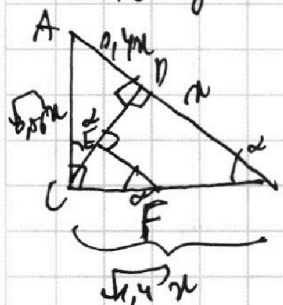
BC и AE — параллельны

м.к. CP — высота $\Rightarrow CP = \sqrt{AP \cdot BP} = \sqrt{0,4x \cdot x} = \sqrt{0,4} \cdot x$

$\triangle ACP \sim \triangle CEF$, м.к. $\angle CPA = \angle FEC = 90^\circ$, $\angle EFC = \angle ACP = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow$ их стороны относятся как квадраты катетов гипотенузы.

м.к. AC — касат., CK — хорда, $\angle ACK = 90^\circ$ $\Rightarrow AC^2 = CE \cdot CK$



$$AC = \sqrt{AP^2 + CP^2} = \sqrt{(0,4x)^2 + (\sqrt{0,4}x)^2} = \sqrt{0,16x^2 + 0,4x^2} = \sqrt{0,56} \cdot x$$

$$CB = \sqrt{CP^2 + BP^2} = \sqrt{(\sqrt{0,4}x)^2 + x^2} = \sqrt{1,4x^2} = \sqrt{1,4} \cdot x$$

$$EK = \sqrt{FK^2 - EF^2} = \sqrt{FK^2 - 4P^2}$$

Пусть катет гипотенузы $\triangle ACP$ и $\triangle CEF$ равен k , тогда $CF = AC - k = \sqrt{0,56} \cdot x - k$
 $CE = AP - k = 0,4x - k$; $EF = CP - k = \sqrt{0,4} \cdot x - k$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1/3. $\arccos(\sin x) = 95 - 2x$ $QD3: 0 \leq \arccos(x) \leq \pi \Rightarrow 0 \leq \frac{95-2x}{10} \leq \pi$

$$\arccos(\sin x) = \frac{95-2x}{10}$$

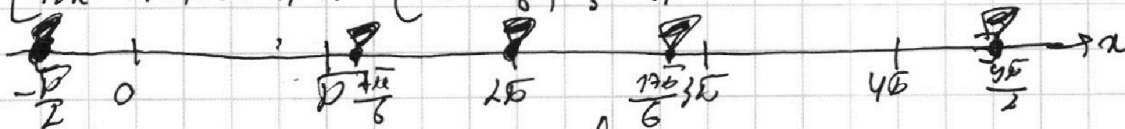
$$\sin x = \cos\left(\frac{95-2x}{10}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{95-2x}{10}\right)$$

$$\begin{cases} 95-2x \leq 6\pi \\ 95-2x \geq 0 \\ x \geq -\frac{\pi}{2} \\ x \leq \frac{95}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - x = \frac{95-2x}{10} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x - \frac{\pi}{2} = \frac{95-2x}{10} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5\pi - 10x = 95 - 2x + 20\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 10x - 5\pi = 95 - 2x + 20\pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x = -4\pi + 20\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 11x = 19\pi + 20\pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{7\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



С учетом QD3 имеем скрещен, проверим их

$$\arccos(\sin(-\frac{\pi}{2})) = 95 + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arccos(-1) = 10\pi \Rightarrow 10\pi = 10\pi \checkmark \quad x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\arccos(\sin \frac{7\pi}{6}) = 95 - \frac{7\pi}{3} \Rightarrow \arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{20\pi}{3} \Rightarrow \frac{10-2\pi}{3} = \frac{20\pi}{3} \Rightarrow \frac{10\pi}{3} = \frac{20\pi}{3} \checkmark \quad x = \frac{7\pi}{6}$$

$$\arccos(\sin 2\pi) = 95 - 2 \cdot 2\pi \Rightarrow \arccos(0) = 4\pi - 4\pi \Rightarrow 10 \cdot \frac{\pi}{2} = 5\pi - 4\pi = \pi \checkmark \quad x = 2\pi$$

$$\arccos(\sin \frac{13\pi}{6}) = 95 - \frac{13\pi}{3} \Rightarrow \arccos(\frac{1}{2}) = \frac{10\pi}{3} \Rightarrow \frac{10-\pi}{3} = \frac{10\pi}{3} \checkmark \quad x = \frac{13\pi}{6}$$

$$\arccos(\sin \frac{9\pi}{2}) = 95 - \frac{9\pi}{2} \Rightarrow \arccos(1) = 0 \Rightarrow 10 - 0 = 0 \checkmark \quad x = \frac{9\pi}{2}$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{2}$; $x = \frac{7\pi}{6}$; $x = 2\pi$; $x = \frac{13\pi}{6}$; $x = \frac{9\pi}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N5. $5x+6ay-6=0$
 $(x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+9)=0$

$x^2+y^2=25$
 $x^2+(y+9)^2=4$

$6ay=6-5x$
 $y=\frac{6}{6a}-\frac{5x}{6a}$

при $a=0 \rightarrow 5x+6 \cdot 0 \cdot y-6=0 \rightarrow 5x=6$
 $x=\frac{6}{5}$ - решение.
 $a=0$ - не подходит - 11

в-мехе $\rightarrow y=\frac{6}{6a}-\frac{5x}{6a}$ - прямая, которая может касаться окружности на
 одной точке, от а зависит каковы прямая.

Найдём центральные углы α , в которых
 прямая касается окружности.

$\angle BAC = \angle CDE = 90^\circ \rightarrow \triangle ABC \sim \triangle CDE \rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{CE}$

пусть $CE=x$, $BC=9-x$
 $\frac{5}{2-x} = \frac{9-x}{x} \rightarrow 18-2x=5x \rightarrow x=\frac{18}{7}$

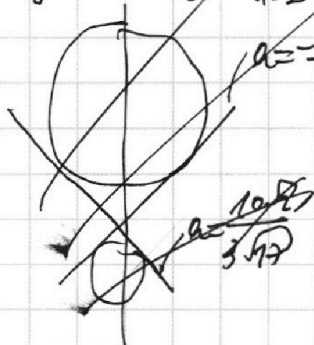
$DE = \sqrt{CE^2 + CD^2} = \sqrt{\left(\frac{18}{7}\right)^2 + 9^2} = \sqrt{\frac{324}{49} + 81} = \frac{\sqrt{4121}}{7}$
 $612 = \frac{CD}{CE} = \frac{9-2}{9-\frac{18}{7}} = \frac{\sqrt{125}}{14} = \frac{\sqrt{125}}{196} = \sqrt{\frac{32}{49}} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$

м.к. $\alpha + \beta = 90^\circ \rightarrow \sin \alpha = \cos \beta = \frac{612}{\frac{\sqrt{125}}{196}} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$

$\sin \alpha = \frac{4\sqrt{2}}{7} \rightarrow \alpha = \arcsin \frac{4\sqrt{2}}{7}$
 $\frac{17}{2} = \frac{\sqrt{17}}{4\sqrt{2}} \rightarrow \frac{17}{2} = \frac{\sqrt{17}}{6a} \rightarrow 6a = \frac{\sqrt{17}}{4\sqrt{2}} \rightarrow a = \frac{\sqrt{17}}{20\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{3\sqrt{17}}$

оценили углы α и β с помощью формулы синусов $\rightarrow$ нашли синусы углов α и β
 отсюда α и β $\frac{5}{6a} = \frac{\sqrt{92}}{4\sqrt{2}} \rightarrow a = \frac{10\sqrt{2}}{3\sqrt{17}}$

$a = \frac{10\sqrt{2}}{3\sqrt{17}} \rightarrow a \in \left(\frac{10\sqrt{2}}{3\sqrt{17}}, 10 \right) \cup \left(\frac{10\sqrt{2}}{3\sqrt{17}}, \frac{10\sqrt{2}}{3\sqrt{17}} \right)$





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

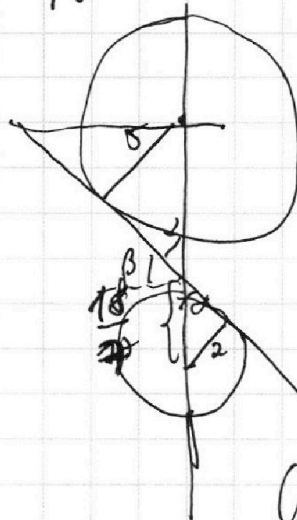
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

☐☐☐☒☐☐☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4.9. Решение.



$$\sin \alpha = \frac{27}{18} = \frac{3}{2}, \text{ т.к. } \sin \alpha \leq 1 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \frac{49}{81}} = \frac{4\sqrt{2}}{9}, \quad \cos \beta = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$\text{по теореме косинусов: } \frac{5}{6e} = \frac{4\sqrt{2}}{9} \Rightarrow e = \frac{35}{24\sqrt{2}}$$

из-за симметрии относительно вертикальной оси
центр окружности лежит на вертикальной оси

$$e = -\frac{35}{24\sqrt{2}}, \text{ тогда } e \in \left(-\frac{35}{24\sqrt{2}}; 0\right) \cup \left(0; \frac{35}{24\sqrt{2}}\right).$$

$$\text{Ответ: } e \in \left(-\frac{35}{24\sqrt{2}}; 0\right) \cup \left(0; \frac{35}{24\sqrt{2}}\right).$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

15. $\log_{11} x - 6 \log_{11} 11 = \log_{11} \frac{1}{121} - 5$ ОДЗ: $x > 0$
 $\log_{11} x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3} \log_{11} 11 - 5 \Rightarrow \log_{11} x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3} \log_{11} x - 5$
 пусть $\log_{11} x = t \Rightarrow t - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3}t - 5 \Rightarrow t^2 = \frac{16}{3}t - 5 \quad | \cdot 3$
 $3t^2 + 16t - 16 = 0, \quad 3t^2 + 16t - 16 = 0, \quad t \neq 0 \Rightarrow \log_{11} x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1.$

$\log_{11} (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{11,25y} (11^{-13}) - 5$ ОДЗ: $y > 0; 0,5y \neq 11 \quad y \neq 2$
 $\log_{11} (0,5y) + \frac{1}{\log_{11} (0,5y)} = \frac{-13}{3 \cdot \log_{11} (0,5y)} - 5$, пусть $\log_{11} (0,5y) = m$
 $m^4 + \frac{1}{m} = \frac{-13}{3m} - 5 \quad | \cdot 3$
 $3m^5 + 15m + 16 = 0, \quad 3m^5 + 15m + 16 = 0, \quad m \neq 0$
 $\log_{11} (0,5y) \neq 0 \quad 0,5y \neq 1 \quad y \neq 2$
 $3m^5 + 15m + 16 = 0 \quad (t^5 + m^5) + 5(t+m) = 0 \Rightarrow (t+m)(t^4 - t^3m + t^2m^2 - tm^3 + m^4) + 5(t+m) = 0$
 $3(t^5 + m^5) + 15(t+m) = 0 \quad | :3 \quad (t+m)(t^4 - t^3m + t^2m^2 - tm^3 + m^4 + 5) = 0$
 $t+m=0 \Rightarrow \log_{11} x + \log_{11} 0,5y = 0 \Rightarrow \log_{11} (0,5xy) = 0 \quad 0,5xy = 1 \Rightarrow \boxed{xy = 2}$
 $t^4 - t^3m + t^2m^2 - tm^3 + m^4 + 5 = 0 \quad (t^2 + m^2)^2 - t^2m^2 - tm(t^2 + m^2) + 5 = 0$
 пусть $t^2 + m^2 = a, \quad tm = b$
 $a^2 - b^2 - ab + 5 = 0 \quad D = b^2 + 4b^2 - 20 = 5b^2 - 20 = 5(b^2 - 4)$
 $a = \frac{b \pm \sqrt{5(b^2 - 4)}}{2} = \frac{b \pm \sqrt{5(b^2 - 4)}}{2}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

